0 172515 700000

17-25-15-70

(129.6)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Усть-Лабинск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математика
профиль олимпиады

Таможниковой Ангелины Кирилловны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход в туалет 13:37 – 13:41

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Чистовик 1

№4 Дано: $0 \le x \le 1$,

$-1 \le y \le 1$.

$y = \sin k\pi x$.

$k \in \{11; 15; 17\}$.

N - ?

1 Сначала построим графики.

1) $y = \sin 11\pi x$

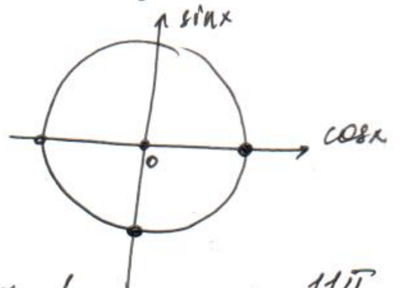
2) $y = \sin 15\pi x$

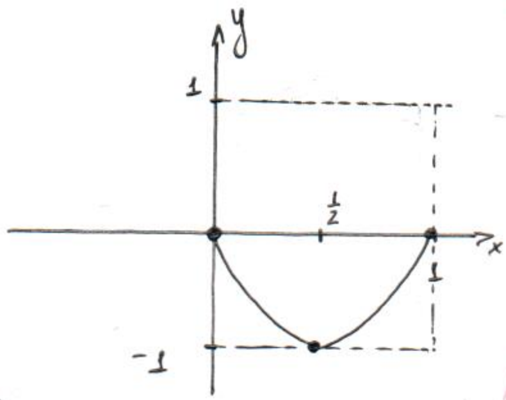
3) $y = \sin 17\pi x$.

Заметим, что данные 2-функции отличаются на $4\pi x$, а т.к. $\sin \alpha$ – это периодическая величина, то 2 этих графика совпадут

→ $y = \sin 11\pi x$.

$x = 0 \to y = \sin 0 = 0$





$x = \frac{1}{2} \to y = \sin \frac{11\pi}{2} = \sin\left(\frac{8\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{8\pi}{2}$

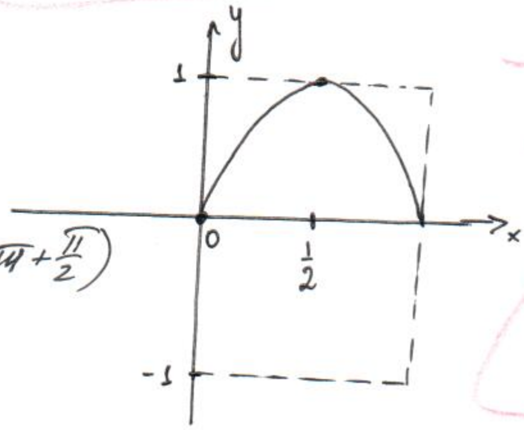
$x = 1 \to y = \sin 11\pi = \sin \pi = 0$, у $y = \sin 15\pi x$ такой же график.

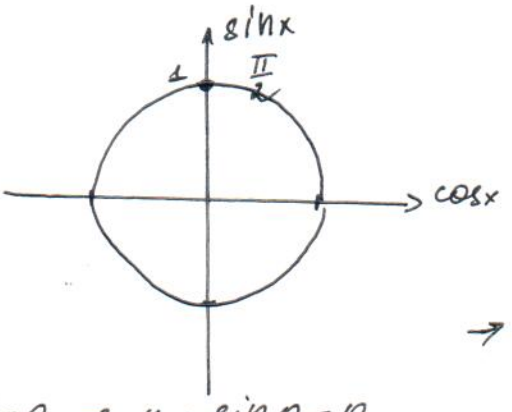
→ $y = \sin 17\pi x$.

$x = 0 \to y = \sin 0 \to y = 0$

$x = \frac{1}{2} \to y = \sin \frac{17\pi}{2} =$

$= \sin\left(\frac{16\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{2}\right)$



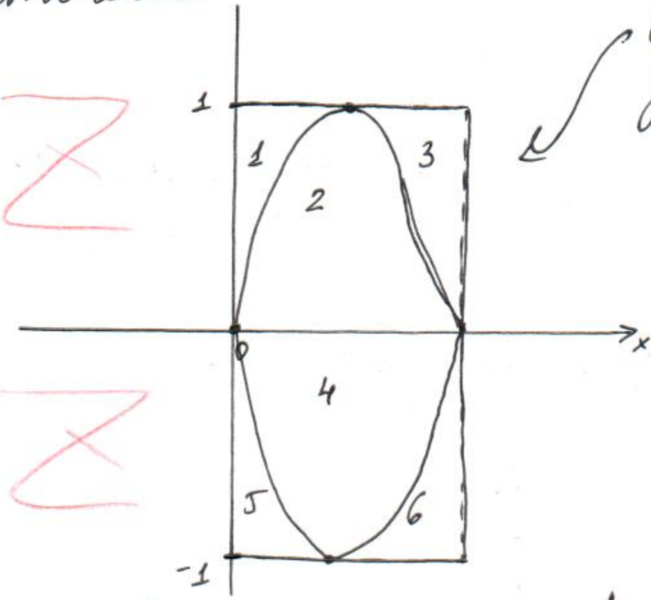


$x = 0 \to y = \sin 0 = 0$.

→ Совмещаем 2 графика

Продолжение на след. странице

Чистовик 2



Сколько областей здесь? → всего 6 получается.

Ответ: 6

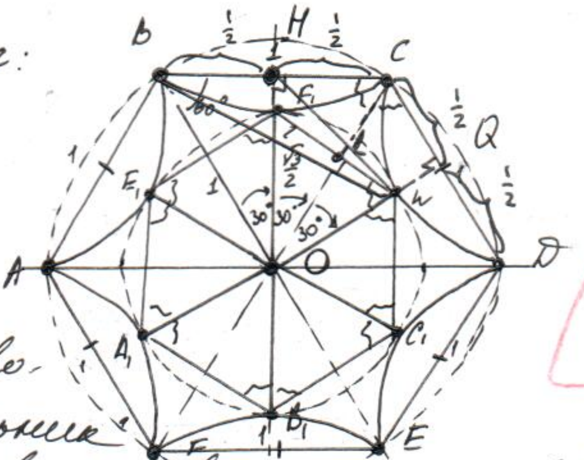
Задача №5.

Дано: $y = Cx^2$

$l = 1$.

r – ?

Решение:



1. Т.к. в условии говорится, что шестиугольник симметричный и равносторонний → то его можно считать правильным. (ABCDEF – прав. шест.).
2. По св-ву правильного шестиугольника → пересечение диагоналей образуют равносторонние треугольники → т.е. $BO = OC = BC = 1$, т. H – т. середины BC → ~~..~~ OH – высота, медиана и бис-са → BOH – прямоугольный Δ → $OH = BO \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OQ \perp CD$ (по св-ву равнос. Δ)
3. $\Delta OLH \sim \Delta OCQ$ (по 1-ому признаку: $\angle OLW = \angle OQC = 90°$; $\angle COQ$ – общий угол.) → $\angle OWL = \angle OCQ = 60°$ так можно продолжать далее, тогда можно заметить, что $A, B, C, W F, E,$ – правильный шестиуг.
4. Рассмотрим OHW → $F_1W \parallel CD$, т.к. т. F_1 и т. W – соединяют вершину параболы с серединой её основания, т.к. F_1W – касательная к ~~окружности~~ параболе вида $y = Cx^2$

Тогда в ΔHOW → $OW = OH \cdot \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

17-25-15-70 (29.6)

Чистовик. 3

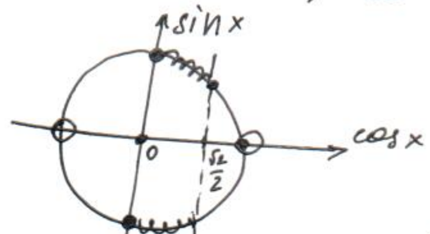
№1. $\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x.$

1) ОДЗ: $\begin{cases} 3(1-ctg^2x) \geq 0 \\ \cos x \geq 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-ctg^2x \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ctg^2x \leq 1 \ (1) \\ \cos x \geq 0. \ (2) \end{cases}$

$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} \leq 0$; $\boxed{\sin x \neq 0}$

$\rightarrow \cos^2 x - (1-\cos^2 x) \leq 0 \rightarrow 2\cos^2 x \leq 1 \rightarrow \cos^2 x \leq \frac{1}{2}.$

а т.к. $\cos x \geq 0$, то $0 \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



2) Можем возвести в квадрат: $3(1-ctg^2x) = 8\cos^2 x$

$3 - 3ctg^2x = 8\cos^2 x \rightarrow 3 - \frac{3\cos^2 x}{\sin^2 x} = 8\cos^2 x$;

~~3~~ По основному тригонометрическому ~~св-ву~~ формуле.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\rightarrow 3 - \frac{3\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = 8\cos^2 x \rightarrow 3 - \frac{3t}{1-t} = 8t$

$(t = \cos^2 x)$

$3 \cdot (1-t) - 3t = 8t(1-t) \rightarrow 3 - 3t - 3t = 8t - 8t^2$

$3 - 6t - 8t + 8t^2 = 0; \quad 8t^2 - 14t + 3 = 0$

$D = 196 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 - 24 \cdot 4 = 10^2$

$t_{1,2} = \frac{14 \pm 10}{16} \rightarrow t_1 = \frac{24}{16} \rightarrow \varnothing$ (т.к. $|\cos x| \leq 1$)

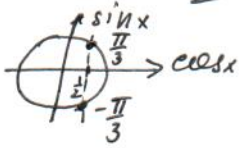
$t_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow$ $\cos x = \frac{1}{2}$ – удовл. ОДЗ.

$\cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow$ не удовл ОДЗ.

$\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$1 \leq \sqrt{2}$

$\rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow$



Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in Z.$

Задача №2. Чистовик 4

Т.к. в множество А входят все натур числа, которые при делении на сумму своих цифр дают целое число, кратное 9, то

Промоделируем: $\frac{A}{S_A}=k$ $(k \underset{9}{\equiv} 0)$, то

$A = S_A \cdot k \to A \underset{9}{\equiv} 0.$, тогда по св-ву, если число делится на 9, то и сумма цифр этого числа делится на 9. Тогда

$A \underset{81}{\equiv} 0 \to$ Рассмотрим эти числа:

трёхзначное

1) $81 \cdot 2 = \underbrace{162}_{9}$: $\frac{162}{9} = 18.$ $(18 \underset{3}{\equiv} 0)$. 1-ое число найдено

2) $81 \cdot 3 = \underbrace{243}_{9}$: $\frac{243}{9} = 27$ $(27 \underset{3}{\equiv} 0)$. 2-ое число 3-зн. найд.

3) $81 \cdot 4 = \underbrace{324}_{9}.$: $\frac{324}{9} = 36.$ $(36 \underset{3}{\equiv} 0)$. 3-е число.

4) $81 \cdot 5 = \underbrace{405}_{9}$: $\frac{405}{9} = \frac{81 \cdot 5}{9} = 45$ $(45 \underset{9}{\equiv} 0)$ – 4-е число

~~5) $81 \cdot 6 = 486$: $\frac{81 \cdot 6}{9} = \frac{9 \cdot 6}{1} = 54$ $(54 \underset{9}{\equiv} 0)$ – 5-е число~~

~~6) $81 \cdot 7 = 567$: $\frac{81 \cdot 7}{}$~~

5) $81 \cdot 6 = 486$: $\frac{486}{18} = 27.$ $(27 \underset{9}{\equiv} 0)$ – 5-е число

6) $81 \cdot 7 = 567$: $\frac{567}{18}$ $(567 \underset{2}{\not\equiv} 0 \to$ не целое число$) \to \varnothing$

7) $81 \cdot 8 = 648$: $\frac{648}{18} = \frac{324}{9} = 36) \to$ 6-е число.

8) $81 \cdot 9 = 729$: $\frac{729}{18}$ $(729 \underset{2}{\not\equiv} 0 \to) \to \varnothing$

9) $81 \cdot 10 = 810$: $\frac{810}{9} = 90 \to$ 7-е число

~~10) $81 \cdot 11 = 891$: $\frac{891}{9} = \frac{81 \cdot 11}{9} = 99 \to$ 8-е число~~

~~11) $81 \cdot 12$~~ 10) $81 \cdot 11 = 891$: $\frac{891}{18}$ $(891 \underset{2}{\not\equiv} 0) \to \varnothing$

17-25-15-70 (29.6)

Чистовик. 5

11) $81 \cdot 12 = 972$; $\frac{972}{18} = \frac{486}{9} = 54$. – 8-ое число.

12) $81 \cdot 13 = 1053$; → уже четырёхзначное число.

Расположение в порядке возрастания:

162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972

$S = 243 + 648 + 972 = 891 + 972 = 1863$. Ответ: 1863.

Задача № 3.

1. Т.к. F – множество точек в пространстве, не превосходящие 5 → то тогда способов. $11 \cdot 11 \cdot 11$ (т.к. пространство по условию является трёхмерным).

2. Допустим, у нас есть т. $S\{x_0; y_0 z_0\}$., и из неё 2 отрезка, соединяющих с т. M, W так, что $M\{x_0; y'; z_0\}$, $W\{x''; y_0; z_0\}$, Сл-но вариантов здесь будет $10 \cdot 10$, т.к. x_0 и y_0 – уже заняты установителем S.

3. Теперь заметим, что как можно менять 2 пары координат $\begin{matrix} x & y & x \\ y & z & z \end{matrix}$ ← последовательность не важна.

т.е. 3 варианта → $10 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 3 =$

$= 1331 \cdot 100 \cdot 3 = 399300$ Ответ: 399300

Задача № 8. $8x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

$$8x^2 \cdot \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} - \frac{\log_{10} a}{\log_{10} x} - 2x \geq 0$$

$$8x^2 \cdot \log_{10}^2 x - \log_{10}^2 a - 2x \cdot \log_{10} a \cdot \log_{10} x \geq 0$$

$$8x^2 (\log_{10} x - \log_{10} a)(\log_{10} x + \log_{10} a) - 2x \cdot \log_{10} a \cdot \log_{10} x \geq 0$$

$$8x^2 \cdot \log_{10} \frac{x}{a} \cdot \log_{10} ax - 2x \cdot \log_{10} a \cdot \log_{10} x \geq 0$$

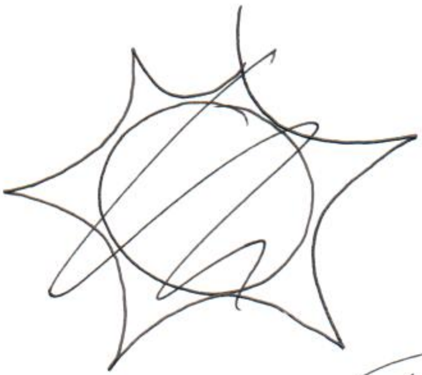
ОДЗ: $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$ чистовик 6

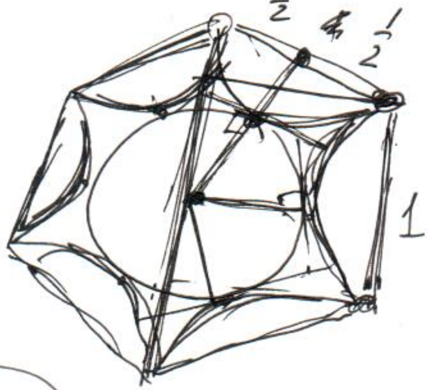
$\rightarrow x(8x \log_{10}\frac{x}{a} \cdot \log_{10}ax - 2 \cdot \log_{10}a \cdot \log_{10}x) \geq 0$

$\underline{x\neq 0} \rightarrow x>0 \quad 8x \cdot \log_{10}\frac{x}{a} \cdot \log_{10}ax - 2 \cdot \log_{10}a \cdot \log_{10}x \geq 0 \;|:2$

$4x \cdot \log_{10}\frac{x}{a} \cdot \log_{10}ax - \log_{10}a \cdot \log_{10}x \geq 0$

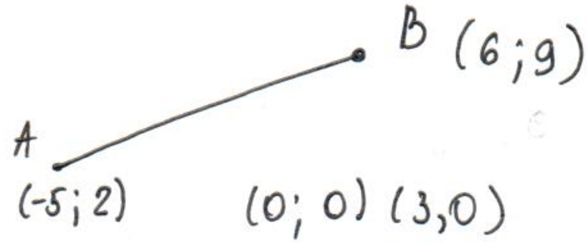
Черновик 5



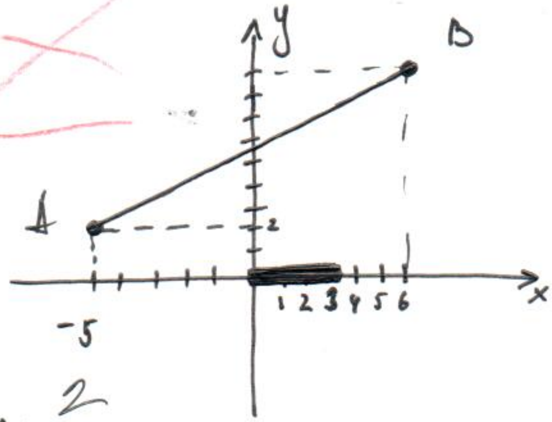


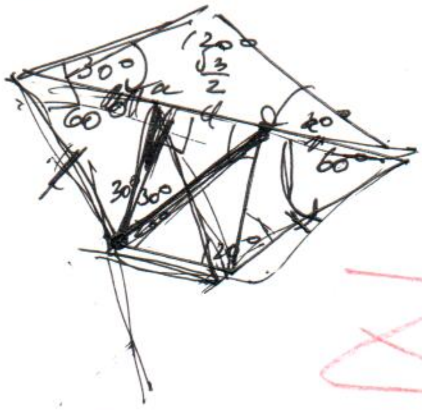
$y' = 2Cx$

Черновик 4



$121 \times 11 = 1331$





$AB^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$

т.к. множество точек, не превосходящих 5

→ то всего вариантов 11·11·11

Зададим такие векторы, что:

A {x₀; y₀; z₀}, B {x₀; y₁; z₀}; C {x₁; y₀; z₀}

→ и тогда при таком раскладе

y_1 {10} → 11·11·11·10·10

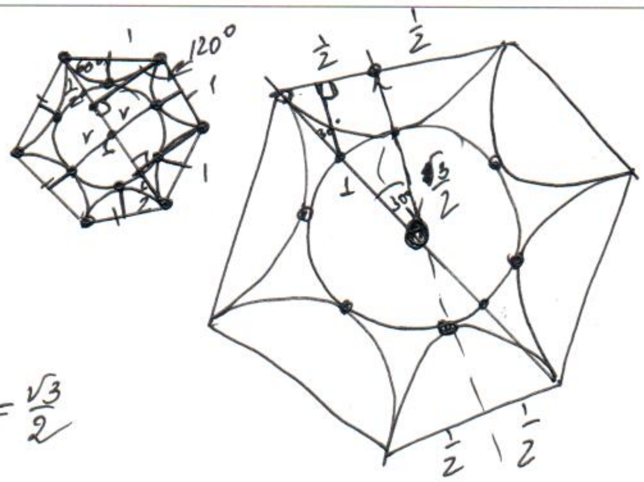
x_1 {10}

также вариантов перестановок 3шт

$y_1 \to x_1 \to z_1 \to$ 11·11·11·11·10·10·3

$x_1 \quad z_1 \quad y_1$

Черновик. 3

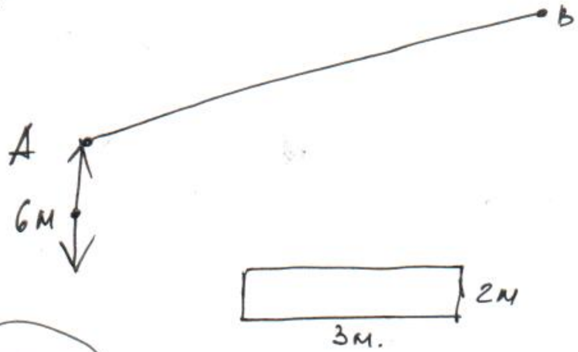


$r + \frac{c}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

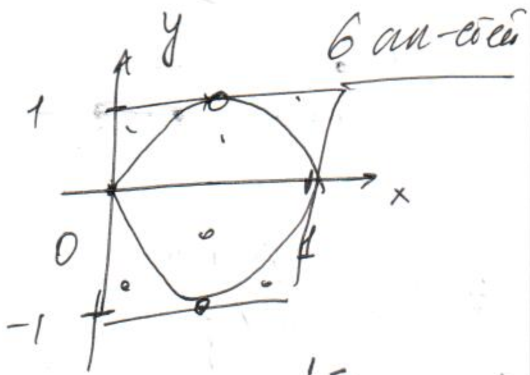
$r +$ 1

$$\begin{array}{r} 243 \\ +\,648 \\ \hline 891 \\ +\,972 \\ \hline 1863 \end{array}$$

№ 6.



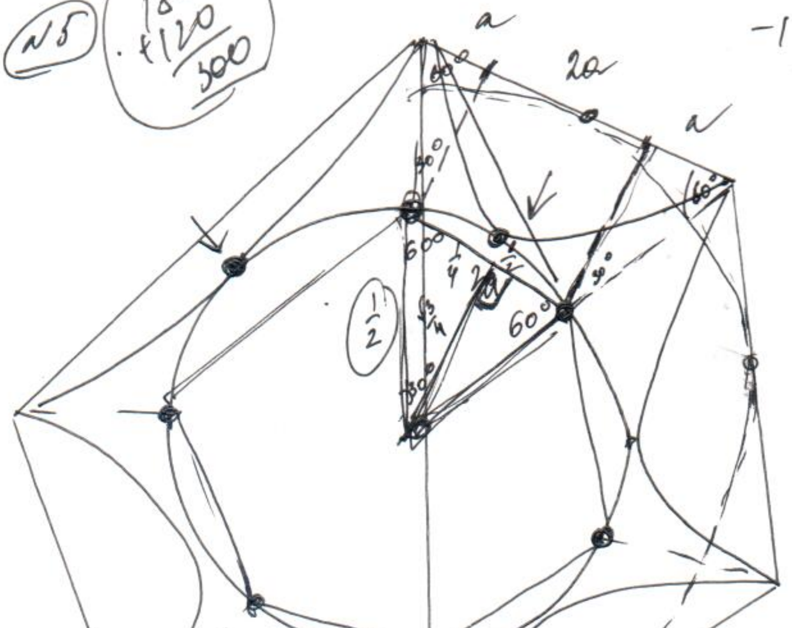
6 ан-стей

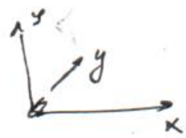


$\alpha =$

№ 5

$$\begin{array}{r} 180 \\ +\,120 \\ \hline 300 \end{array}$$





$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geqslant 0$

$8x^2 \cdot \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} - \frac{\log_{10} a}{\log_{10} x} - 2x \geqslant 0$

Черновик 2

№2. $\frac{100}{1} = 100 \to \varnothing$

$\frac{102}{3} = 34$

$\frac{101}{2} \Rightarrow \varnothing$

$\frac{A}{S_A} = k \quad (k \equiv_9 0)$

$\frac{102}{3} = 34 \to \varnothing$

$\to A = k \cdot S_A \to A \equiv_9 0$

103; 104; 105; 106; 107; 108; $\frac{108}{9} = 12$

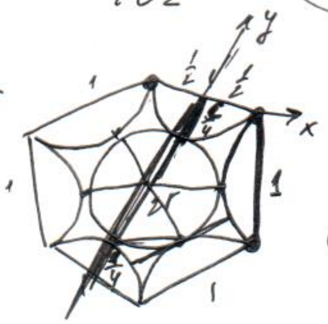
109; $\frac{110}{2}$; $\frac{111}{3}$; ~~10~~ 112; 113; 114; 115; 116; 117 $\quad \frac{117}{9} = 13 \to \varnothing$

$\frac{118}{10}$; $\frac{119}{11}$; $\frac{120}{3}$; $\frac{121}{4}$; $\frac{122}{5}$; ~~123~~ $\frac{125}{6}$; ~~127~~ $\frac{126}{9}$ $\quad \frac{126}{9} = 14$

$\to$ Число должно делиться на 81

$\to 81 \times 2 = 162 \quad \frac{162}{9} = 18 \quad 81 \times 3 = 243 \quad \frac{162}{9} = 18$

№5.

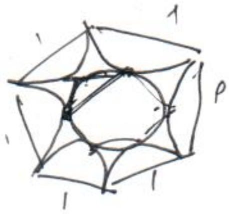


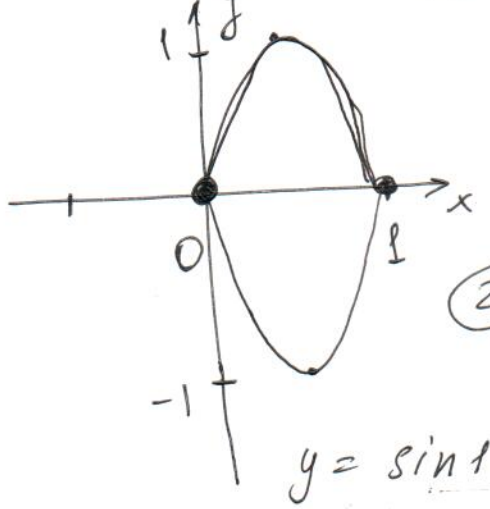
$y = cx^2 \quad 2r+$

$y = c \cdot \frac{1}{4} = \frac{c}{4}$

$81 \times 13 = 243 + 81 = 1053$

№5.





$y = \sin k\pi x$

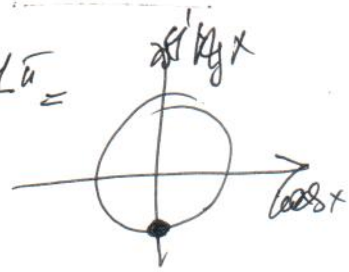
$y_1 = \sin 15\pi x$

$x = \frac{1}{2}$

$\frac{15\pi}{2} = \frac{12\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 6\pi$

$y = \sin 11\pi x$

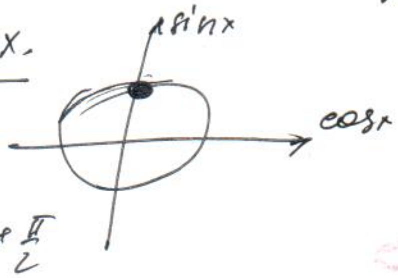
$y = \sin \frac{11\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$



$y = \sin 17\pi x.$

17π

$\frac{17\pi}{2} = 8\pi + \frac{\pi}{2}$



Черновик 1

$$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

$$3(1-ctg^2x) = 8\cos^2 x$$

$$3 - 3ctg^2x - 8\cos^2x = 0$$

$$3 - \frac{3\cos^2x}{1-\cos^2x} - 8\cos^2x = 0$$

$$3(1-\cos^2x) - 3\cos^2x - 8(\cos^2x)\cdot(1-\cos^2x) = 0$$

$$3 - 3\cos^2x - 3\cos^2x - 8\cos^2x + 8\cos^4x = 0$$

$t = \cos^2x \to$ $3 - 3t - 3t - 8t + 8t^2 = 0$

$$3 - 14t + 8t^2 = 0$$

$$8t^2 - 14t + 3 = 0$$

$$D = 196 - 4\cdot8\cdot3 = 196 - 32\cdot3 = 10^2$$

$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{14 \pm 10}{16}$ $t_1 = \frac{24}{16} \to \varnothing$

$t_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$\to \cos^2x = \frac{1}{4} \to \cos x = \pm\frac{1}{2}$

ОДЗ: $\cos x \geq 0$ $1 - ctg^2x \geq 0$

$1 \geq ctg^2x$

$ctg^2x \leq 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$ctg^2 = \frac{\cos x}{\sin x} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \frac{1}{3}$ V

$$\begin{array}{r|l} 567 & 18 \\ -54 & 3 \\ \hline 27 & \end{array}$$

$567 /$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 12 \\ \hline 162 \\ +81 \\ \hline 972 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 8 \\ \hline 648 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 648 & 18 \\ -54 & 3 \\ \hline 108 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 6 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 324 & 9 \\ -27 & 36 \\ \hline 54 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 11 \\ \hline 81 \\ +81 \\ \hline 891 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 162 & 9 \\ -9 & 18 \\ \hline 72 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 243 & 9 \\ -18 & 27 \\ \hline 63 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 2 \\ \hline 162 \end{array}$$

$+\ 8$

$$\begin{array}{r|l} 486 & 18 \\ -36 & 27 \\ \hline 126 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 7 \\ \hline 126 \end{array}$$

Черновик 1

$$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

$$3(1-ctg^2x) = 8\cos^2x$$

$$3 - 3ctg^2x - 8\cos^2x = 0$$

$$3 - \frac{3\cos^2x}{1-\cos^2x} - 8\cos^2x = 0$$

$$3(1-\cos^2x) - 3\cos^2x - 8(\cos^2x)\cdot(1-\cos^2x) = 0$$

$$3 - 3\cos^2x - 3\cos^2x - 8\cos^2x + 8\cos^4x = 0$$

$t = \cos^2x \to$ $3 - 3t - 3t - 8t + 8t^2 = 0$

$$3 - 14t + 8t^2 = 0$$

$$8t^2 - 14t + 3 = 0$$

$$D = 196 - 4\cdot8\cdot3 = 196 - 32\cdot3 = 10^2$$

$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{14\pm10}{16}$ $t_1 = \frac{24}{16} \to \varnothing$

$t_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$\to \cos^2x = \frac{1}{4} \to \cos x = \pm\frac{1}{2}$

ОДЗ: $\cos x \geq 0$ $1 - ctg^2x \geq 0$

$1 \geq ctg^2x$

$ctg^2x \leq 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$ctg^2 = \frac{\cos x}{\sin x} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \frac{1}{3}$ V

$$\begin{array}{r} 567 \mid 18 \\ -54 \quad 3 \\ 27 \end{array}$$

$567 \mid$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 12 \\ 162 \\ +81 \\ 972 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 8 \\ 648 \mid 18 \\ -54 \quad 3 \\ 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 6 \\ 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \mid 9 \\ -27 \quad 36 \\ 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 11 \\ 81 \\ +81 \\ 891 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 162 \mid 9 \\ -9 \quad 18 \\ 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \mid 9 \\ -18 \quad 27 \\ 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 2 \\ 162 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 486 \mid 18 \\ -36 \quad 27 \\ 126 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 7 \\ 126 \end{array}$$