0 664995 610004

66-49-95-61
(123.21)

Выход: 13:08 ±Шанг
Приход: 13:10

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва (город) дешифр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов (наменование олимпиады)

по МАТЕМАТИКЕ (профиль олимпиады)

Тараева Егора Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника Тар-

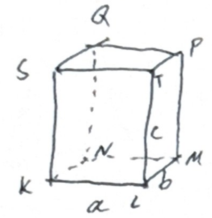
 50 (пятьдесят)

66-49-95-61 (123.21)

$\boxed{№1}$

$V = abc$ (V – объем)

S – площадь ее полной пов-ти



$S = 2(S_{KLMN} + S_{LMPT} + S_{KLTS}) =$

$= 2(ab + bc + ac)$

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$V + S + 4(a+b+c) = 2026$

$abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$

~~нер-во между средними~~

~~$a(bc + 2b + 2c) + 2bc + a + b + c = 2026$~~

~~$a = \dfrac{2026 - b - c - 2bc}{bc + 2b + 2c + 1}$~~

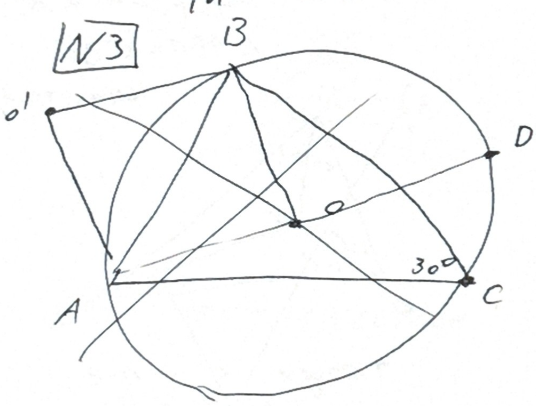
~~$2026 \geq 3\sqrt[3]{abc} + 6\sqrt[3]{(abc)^2} + abc$~~

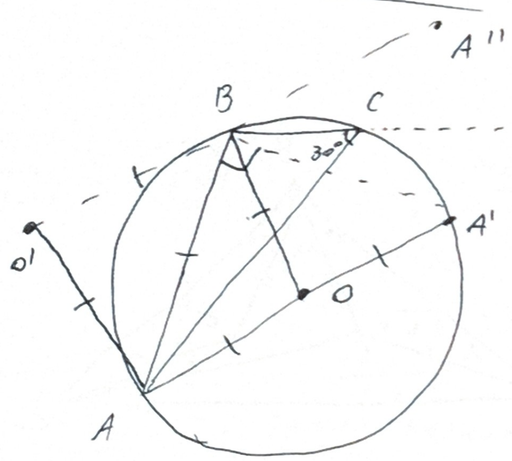
~~$t = V^{\frac{1}{3}}$~~

~~$2026 \geq 3t + 6t^2 + t^3$~~

чистовик

$\boxed{№3}$





1) $\angle ACB = 30°$

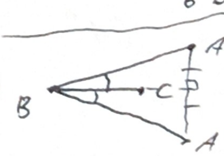
$\Rightarrow \angle AOB = 60° = \angle AO'B$ (центральный угол)

$\Rightarrow \Delta AOB$ и $\Delta AO'B$ – р/ст. $\Rightarrow \angle OBO' = 60° + 60° = 120°$

$\Rightarrow \angle OBA'' = 60°$

2) $\angle ABA' = 90°$ (диам. противоп. точка)

3) $\angle A'BA'' = 180° - \angle ABA' - \angle O'BA = 30°$

4) 

$\angle A'BC = \frac{1}{2}\angle A'BA'' = 15°$

$\angle ABC = 90° + 15° = 105°$

~~№3 $\angle ABC \geq 90^\circ$, иначе точка A' будет на дуге BC без A, а точка A''~~

$5 \cdot 6 \cdot 7 = 30 \cdot 7 = 210$

№1 продолж-е

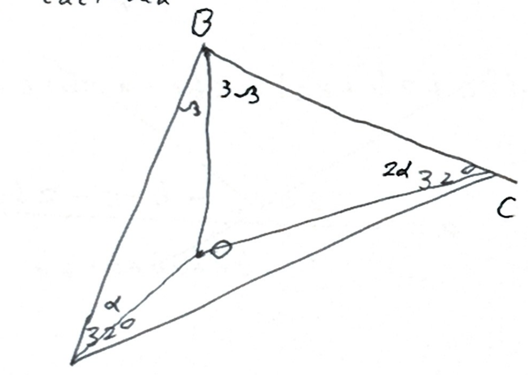
$$abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$$

нер-во коши:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \qquad \frac{ab+bc+ac}{3} \qquad (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ac)$$

очев.

№6 чистовик



1) $\angle BAO = \alpha$

$\angle ABO = \beta$

$4\beta = \angle ABC = 180^\circ - 32^\circ - 32^\circ =$

$= 116^\circ$

$\beta = 29^\circ$

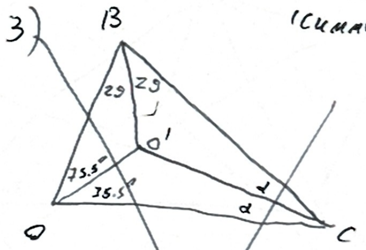
2) ОТРАЗИМ O

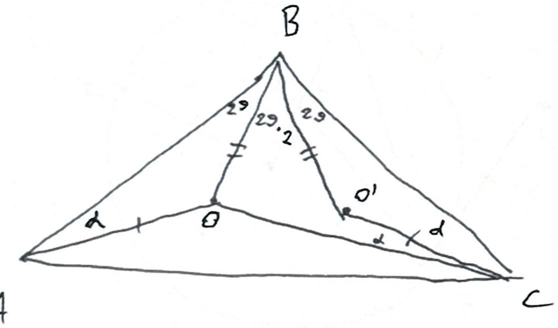
отн-о сер⊥-ра к AC.

$\Delta ABO = \Delta CBO'$

(симметрия)

3)



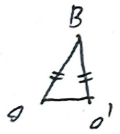


тогда O' - л-е

ц.с ΔOBC

$\Rightarrow \angle BOO' = \angle O'CO$

4)



$\angle BOO' = \dfrac{180^\circ - 29^\circ \cdot 2}{2} = ~~\dfrac{151^\circ}{2} = 75.5^\circ~~$

$= 61^\circ$

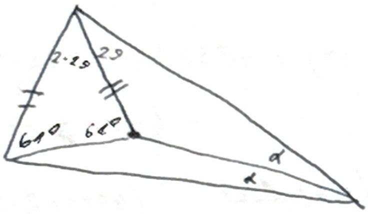
5) сумма углов ΔOBC:

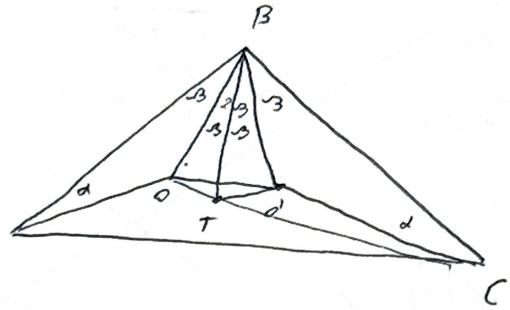
$180 = 2 \cdot 29 + 151 + 2\alpha$

→ см. далее

дежифр

$\boxed{N6}$ пр-е (продолжение) чистовик.





5) Проведем бис-су угла OBO', пусть она $\cap$-т CO в точке T

(если $BT \parallel CO$, то $CO \perp AC$, но $\angle ACO < 32°$)

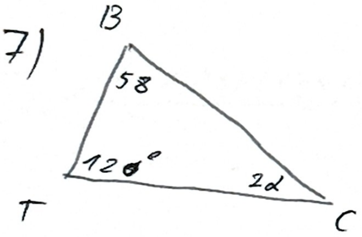
6) O' - $\cap$-е бис-с $\triangle CBT$

симметрия

$\Rightarrow \angle OTB = \angle BTO' = \angle O'TC = \gamma$

$3\gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 60°$

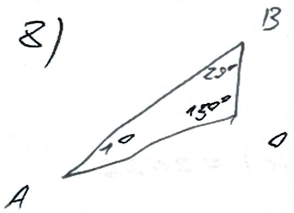
7)



$180° = 58° + 120° + 2\alpha$

$\Rightarrow \alpha = 1°$

8)



$\Rightarrow \dfrac{\angle BOA}{\angle BAO} = 150$

$\boxed{N1}$ продолжение.

$t = a+b+c$

$\dfrac{t^3}{3} + 2\left(\dfrac{t^2}{3}\right) + 4t \geq 2026$ (числа различные $\Rightarrow$ нер-ва не достигаются)

≥ 2025

$\iff$ $t^3 + 2t^2 + 12t \geq 6075$

$t^3 + 2t^2 + 12t - 6075 \geq 0$

$14 \times 14 = 196$; $196 \times 14 = 2744$; 42 ✓ 41

$507 + 1600 = 2107$; $12 \times 144 = 1728$; $13 \times 13 = 169$; $169 \times 13 = 2197$; $15 \times 15 = 225$; $225 \times 15 = 3375$

$17 \times 17 = 289$; $289 \times 17 = 4913$; $18 \times 18 = 324$; $324 \times 18 = 5832$

см. далее.

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times\ 19 \\ \hline 171 \\ +\ 19\ \ \\ \hline 361 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 361 \\ \times\ 19 \\ \hline 3249 \\ +\ 361\ \ \\ \hline 7259 \end{array}$$

$f(t) = t^3 + 2t^2 + 12t - 6075.$

$f(18) = 5832 + 2\cdot 324 + 12\cdot 18 - 6075 \geqslant 0$

$f(17) < 0 \quad (4913 + 2\cdot 289 + 12\cdot 17 < 6075)$

и $f(t)$ возрастает при $t > 0$

$\Rightarrow t \geqslant 18$

$a+b+c \geqslant 18$

$\boxed{N1}$ $V = ab+bc+ac$

$S = 2$

$\boxed{N1}$ $V = abc$

$S = 2(ab+bc+ac)$

$P = 4(a+b+c)$

$t = a+b+c \qquad abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$

$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \qquad (a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ac)$

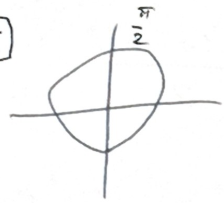
нер-ва не достигаются т.к. числа различные.

$\left(\frac{t}{3}\right)^3 + 2\cdot\frac{t^2}{3} + 4t \geqslant 2024$

66-49-95-61 (123.21)

чистовик

$\boxed{N5}$



$0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ $\quad x+y+z = \frac{\pi}{2}$

$tgx \cdot tgy \cdot tgz \to max$

$tg(z) =$

$= (tg(\frac{\pi}{2} - x - y)) =$

$= ctg(x+y)$

=> ищем max от:

$$\frac{tgx \cdot tgy}{tg(x+y)} =$$

$$tg(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y} = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy}$$

$$\cancel{= \frac{tgx \cdot tgy (tgx + tgy}{}} \quad = \frac{(tgx \cdot tgy)(1 - tgx \cdot tgy)}{tgx + tgy} =$$

$tgx + tgy \geq 2\sqrt{tgx \cdot tgy}$ $\quad t = tgx \cdot tgy$

$a = tgx; \; b = tgy$

$$\leq \frac{t(1-t)}{2\sqrt{t}} = \qquad = \frac{ab(1-ab)}{a+b}$$

~~воспользуемся методом~~

см. далее

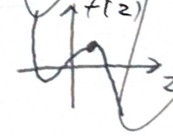
$$= \frac{t - 2t^2}{4\sqrt{t}} \quad \cancel{f'(t)} \quad \cancel{1-4t}$$

$z = \sqrt{t}$

$$\frac{z^2 - 2z^4}{2z} = \frac{z}{2} - z^3 \to f'(z)$$

$\frac{1}{2} - 3z^2 = 0$

$z = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$



=> max при $z = \sqrt{\frac{1}{6}}$

=> $t = \frac{1}{6}$

см. далее

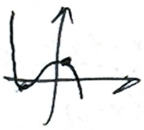
чистовик

$$\frac{t(1-t)}{2\sqrt{t}} = \cancel{\frac{t^2(1-t^2)}{2t}} = \frac{z^2(1-z^2)}{2z} = \frac{z(1-z^2)}{2}$$

$z=\sqrt{t}$ ищем max от $z(1-z^2) =$

$$= z - z^3 \xrightarrow{f'(z)} 1-3z^2=0$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$



$\Rightarrow z = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$t = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{t(1-t)}{2\sqrt{t}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{2\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$ — верхняя оценка

достижимость

$$\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}y,\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y = \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

не удивительно, что $x=y=z=30^\circ$ (симметрия)

т.е. с функциями и нер-вами между средними получил оценку $\frac{\sqrt{3}}{9}$, и достигается при $x=y=z=30^\circ$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{9}$

$\boxed{№4}$

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0$$

$$\cancel{\frac{(a^x-a^1)(a^x-a\cdot a^{\log_a(2)})}{\log_2 a}}\geq 0$$

т.к. есть $\log_2 a$ то $a>0$, $a\neq 1$

$$\frac{(a^x-a)(a^x-2a)}{\log_2 a}\geq 0 \to \frac{(a^x-a^1)(a^x-a\cdot a^{\log_a(2)})}{\log_2 a}\geq 0$$

см. далее

демидов

$\boxed{№4}$ продолжение (чистовик)

$$\frac{(a^x - a^1)(a^x - a^{1+\log_a(2)})}{\log_2(a)} \geqslant 0$$

↓ рационализация

$$\frac{(a-1)(x-1)(a-1)(x-1-\log_a(2))}{\log_2(a)} \geqslant 0$$

1) $a \geq 1$

$\log_2(a) \geqslant 0$

2) $a < 1$

$\log_2(a) < 0$

$$\frac{(a-1)^2(x-1)(x-1-\log_a(2))}{(a-1)} \geqslant 0$$

$$(a-1)(x-1)(x-1-\log_a(2)) \geqslant 0$$

~~1) $a < x$~~, то 1) $a > 1$, то решение от x

не отрезок.

2) $a < 1$

$$(x-1)(x-1-\log_a(2)) \leq 0$$

1 $\quad 1+\log_a(2)$

$a < 1 \Rightarrow \log_2(a) < 0$

~~$1 \vee 1+\log$~~

$\Rightarrow \log_a(2) < 0$

$\Rightarrow 1 > 1 + \log_a(2)$

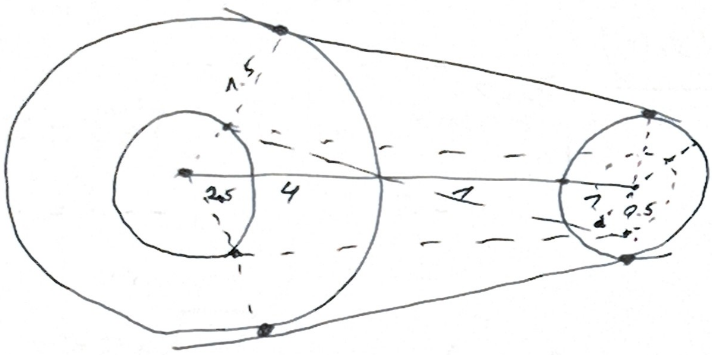
отрезок длины 2026

$\Rightarrow \log_a(2) = 2026$

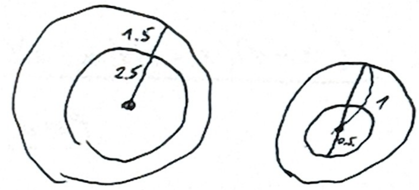
$a^{2026} = 2$

$\Rightarrow \boxed{a = \sqrt[2026]{2}}$, т.к. $a > 0$

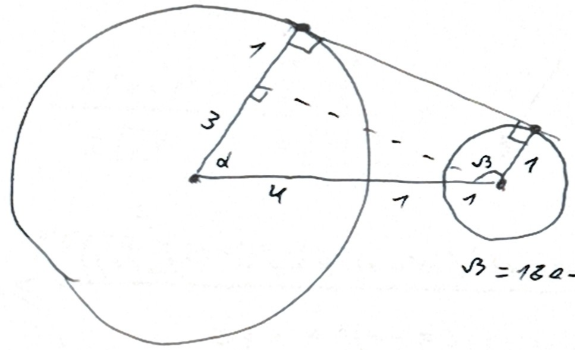
№7 чистовик.



траектория травы- такая выйдет как на рисунке (окр-ти радиусов 2.5 и 0.5)



До

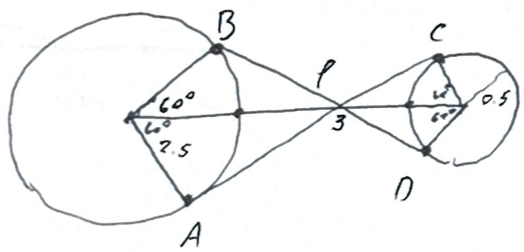


$\cos\alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\beta = 180 - \alpha = 120^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

После:

$\rho = BD$



$X = 2\rho + \frac{2}{3}(2\pi \cdot 2.5) + \frac{2}{3}(2\pi \cdot 0.5) =$

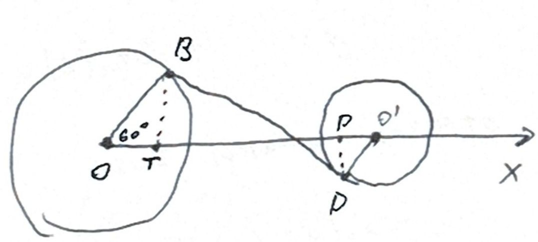
$= 2\rho + \frac{10\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} =$

$= 2\rho + 4\pi$

$\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ едем $\frac{2}{3}$ окр-ти

введем координаты:



$OT = \frac{1}{2}OB = \frac{2.5}{2} = \frac{5}{4}$

$\frac{BT}{2.5} = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BT = \frac{\sqrt{3}\cdot 5}{4}$

см. далее $\longrightarrow$

дешифр

чистовик

$\Rightarrow$ координаты $B\left(\frac{5}{4}; \frac{\sqrt{3}\,5}{4}\right)$

~~аналогично~~

$O'P = \frac{0.5}{2} = \frac{1}{4} \quad PD = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$OP = OO' - O'P = 6 - \frac{1}{4} = 5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$

$PD = \frac{\sqrt{3}}{4}$

т. Пиф.

$\Rightarrow D\left(\frac{23}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\Rightarrow BD = \sqrt{\left(\frac{23}{4} - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\,5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} =$

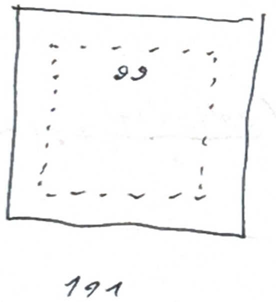
$= \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 3} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{12}{4}} = \sqrt{\frac{93}{4}} =$

$= \frac{\sqrt{93}}{2}$

$\Rightarrow X = 2 \cdot \frac{\sqrt{93}}{2} + 4\pi = \boxed{\sqrt{93} + 4\pi}$

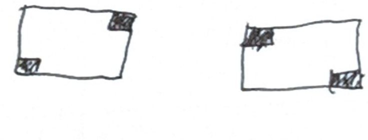
(возможно где-то небольшой арифмет, но ход вычислений точно правильный)

$\boxed{№2}$



подходит = все − не подходит.

все: прямоугольник задается 2-мя точками



1) способы выбрать 2 клетки: $C^2_{101^2}$ (берем С, чтобы каждый посчитали единожды)

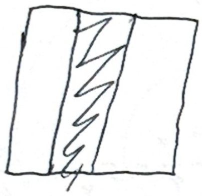
2) если оставляет дырку $\Rightarrow$ внутри $99 \cdot 99$ таких $C^2_{99^2}$

см. далее

$\frac{99\cdot 98}{2}+99=$
$=\frac{100\cdot 99}{2}$

№2 продолжение чистовик

3) осталось посчитать распады на 2 части

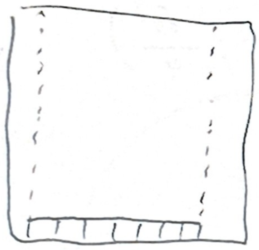


вертик.

горизонт.

Распады = верт. распады + гориз. распады =

= 2 · верт. распады.



99

их C^2_{99} (задаем нижними точками)

$\times\ 101$, 101 → 101, 101 → 10201

$10202 \,|\, 2$ → 5101

⇒ нужные =

$$=\left(C^2_{101^2}+\underbrace{101^2}_{\text{не учел 1 на 1}}\right)-\left(C^2_{99^2}+\underbrace{99^2}_{\text{не учел 1 на 1}}\right)-2\left(C^2_{99}+\underbrace{99}_{1\times k}\right)=$$

$$=\frac{101^2(101^2-1)}{2}+101^2-\left(\frac{99^2(99^2-1)}{2}+99^2\right)-2\left(C^2_{99}+99\right)=$$

$$\cancel{-(101^2\ 101^2}=\frac{101^2(101^2+1)}{2}-\left(\frac{99^2(99^2+1)}{2}+2\left(\frac{100\cdot 99}{2}\right)\right)$$

$$=$$

$$10201\cdot 5101-\frac{99^2(99^2+1)}{2}\dots$$

$\boxed{№1}$ $a, b, c \in \mathbb{N}$ - стороны. чистовик

в нер-вах Коши знаки строгие т.к. числа различные

$abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$

$t = a+b+c$

$\frac{t}{3} > \sqrt[3]{abc}$ $\quad t^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) > 3(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \left(\frac{t}{3}\right)^3 + 2\frac{t^2}{3} + 4t > 2026$

$\left(\frac{t}{3}\right)^3 + 2\frac{t^2}{3} + 4t \geqslant 2024$ (два раза $\geqslant$ для натур. чисел).

$f(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3 + 2\frac{t^2}{3} + 4t - 2024$

$f(42) = \underbrace{14^3}_{2744} + \underbrace{(\ldots)}_{>0} - 2024 > 0$

$f(39) < 0$

Воспользуемся методом штурма

$a+b = const$, $a < b$

$a+\varepsilon \quad b-\varepsilon$

Тогда для a', b', c':

$\underset{\uparrow\uparrow}{a'b'c'} + 2(\underset{\uparrow\uparrow}{ab} + \underset{\text{так же}}{(a+b)c}) + \underset{\text{так же.}}{4(a+b+c)} \geqslant 2026.$

Пусть $a < b < c$

$\Rightarrow$ ~~$2026 < c^3 + 2$~~

$abc = 2026 - 2(ab+bc+ac) - 4(a+b+c)$

min

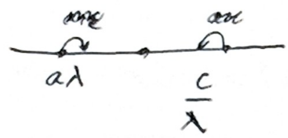
$\Rightarrow$ ищем max $(ab+bc+ac) - 2(a+b+c)$

$\rightarrow$

чистовик.

$abc = fix$

$a < b < c$



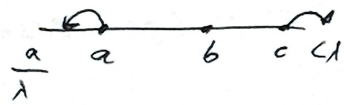
$\lambda > 1$

тогда выражение: $\underbrace{abc}_{const} + 2(ab\lambda + ac + \frac{bc}{\lambda}) + a\lambda + b + \frac{c}{\lambda} =$

$= abc + 2(ac + b(a\lambda + \frac{c}{\lambda})) + a\lambda + \frac{c}{\lambda} b < 2026$ $\quad a\lambda + \frac{c}{\lambda} < a + c$

а если наоборот

$f(a,b,c) = abc + 2(ab + bc + ac) + 4(a+b+c)$



то $f(a,b,c) \uparrow\uparrow$

т.е. если даны a, b, c, то сделав

$1, b, ca, \quad f(a', b', c') > 2026.$

$1, 2, \frac{abc}{2} \quad f(a'', b'', c'') > 2026$

вот и найдем

$\frac{abc}{2} - t = x = c'''$

$1, 2, \frac{abc}{2} - t$, что

$f(1, 2, \frac{abc}{2} - t) = 2026$

меньше нельзя из-за штурма

$2x + 2(2 + 2x + x) + 4(1 + 2 + x) = 2026.$

$x + 2 + 3x + 2(3 + x) = 1013$

$6x + 8 = 1013$

$6x = 1005 \quad x = \frac{1005}{6} = \frac{335}{2}$

$V = abc = 335$ ответ такого порядка