выход: 12:40
вход: 12:45

0 275757 740008

27-57-57-74
(129.8)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Калининград
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Таскаева Ивана Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

70 (семьдесят) среда

27-57-57-74
(129.8)

№1 чистовик

$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 6(1-ctg^2x) = 16\cos^2x \\ \cos x \geq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 6 - 6\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x} = 16\cos^2x \\ \cos x \geq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 6\sin^2x - 6\cos^2x = 16\cos^2x\sin^2x \ (1) \\ \cos x \geq 0 \\ \sin x \neq 0 \ (2) \end{cases}$

(1) $6\sin^2x - 6\cos^2x = 16\cos^2x\sin^2x$

$6(1-\cos^2x) - 6\cos^2x = 16\cos^2x\sin^2x$

$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1$

$6 - 6\cos^2x - 6\cos^2x = 16\cos^2x(1-\cos^2x)$

$6 - 12\cos^2x = 16\cos^2x - 16\cos^4x$

$-16\cos^4x + 28\cos^2x - 6 = 0 \ |:-2$

$8\cos^4x - 14\cos^2x + 3 = 0$

~~$\cos^2x = t,\ t \geq 0,\ t \neq 1,\ t < 1$~~

~~$8t^2 - 12t + 3 = 0$~~

~~$t = \dfrac{12 \pm \sqrt{144-96}}{16}$~~

~~$12 \cdot 8 =$~~

~~$t = \dfrac{12 \pm \sqrt{48}}{16}$~~ ~~$t = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$~~ ~~$\sqrt{3} > \sqrt{1} > 1$~~

~~$3 + \sqrt{3} > 4$~~

~~$t = \dfrac{12 \pm 4\sqrt{3}}{16}$~~ ~~$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4} \\ t = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4} \\ 0 \leq t < 1 \end{array}\right.$~~ $\Leftrightarrow t = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$ ~~$\dfrac{3+\sqrt{3}}{4} > 1$~~

~~$\sqrt{3} < \sqrt{4} < 2$~~

~~$3 - \sqrt{3} > 1$~~ ~~$\sqrt{9} > \sqrt{3}$~~

~~$\dfrac{3-\sqrt{3}}{4} > \dfrac{1}{4}$~~ ~~(отв. < 4, $4 > -4$)~~

№1 (продолжение) черновик

$8\cos^4 x - 14\cos^2 x + 3 = 0$

$\cos^2 x = t \quad 0 \le t < 1$

$8t^2 - 14t + 3 = 0$

$t = \dfrac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{16}$

$t = \dfrac{14 \pm 10}{16}$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{24}{16} \\ t = \dfrac{4}{16} \end{array}\right. \\ 0 \le t < 1 \end{array}\right. \iff t = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

$\left\{\begin{array}{l} \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \\ 0 \le \cos x < 1 \end{array}\right. \iff \cos x = \dfrac{1}{2}$

$\cos x = \dfrac{1}{2} \iff x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$

№2

Пусть N - число, принадлежащее множеству A, обозначим за S_n - сумму цифр этого числа. N имеет вид $\overline{xyz}$ (по разрядам), значит $S_n = 100\cdot x + 10\cdot y + z$

$\dfrac{N}{100\cdot x + 10\cdot y + z} = 9k \quad (k \in Z)$

$N = 9k(100x + 10y + z) \Rightarrow N \,\vdots\, 9$

таблица умножения 9

$9\cdot 11 = 99$

$9\cdot 12 = 108$

$9\cdot 13 = 117$

$9\cdot 14 = 126$

$9\cdot 15 = 135$

$9\cdot 16 = 144$

$9\cdot 17 = 153$

$9\cdot 18 = 162$

$9\cdot 19 = 171$

$9\cdot 20 = 180$

27-57-57-74 (12/8)

1) $\frac{99}{18}$ ~~…~~ 9 (не трехзначное) черновик

2) $\frac{108}{9}=12$

3) $\frac{117}{9}=13$

если $N \vdots 9$, то и $S_n \vdots 9$ (признак делимости на 9, число $\vdots$ 9, если $S_n \vdots 9$) $\Rightarrow N \vdots 81$ $(N = 9k(100x+10+z)$
$\quad 9j\ (j \in Z)$

~~$81 \cdot 1 = 81$ (двузн.)~~

1) $81 \cdot 2 = 162$

2) $81 \cdot 3 = 243$

3) $81 \cdot 4 = 324$

4) $81 \cdot 5 = 405$

5) $81 \cdot 6 = 486$

$81 \cdot 7 = 567$

$81 \cdot 8 = 648$

$81 \cdot 9 = 729$

$81 \cdot 10 = 810$

$81 \cdot 11 = 891$

$81 \cdot 12 = 972$

$81 \cdot 13 = 1053$ (не трехзначное)

~~Проверим~~ ~~(Очевидно, что частное всех чисел, произведение делимости k, едо при делении на 9k)~~

Проверим

1) $\frac{162}{9} = 18\ (9 \cdot 2)$

2) $\frac{243}{9} = 27\ (9 \cdot 3)$

3) $\frac{324}{9} = 36\ (9 \cdot 4)$

4) $\frac{405}{9} = 45\ (9 \cdot 5)$

5) $\frac{486}{18} = 27\ (9 \cdot 3)$

6) $\frac{567}{18} \neq$ цело; нечет. / чет.

7) $\frac{648}{18} = 36$

8) $\frac{729}{18} \neq$ цело; нечет. / чет.

9) $\frac{810}{9} = 90$ нечет.

10) $\frac{891}{18} \neq$ целое; чет.

11) $\frac{972}{18} = 54$

$27 \cdot 18 = 270 + 160 + 56$

$567 : 18 = 3 \ldots$ (54, 27)

$729 : 18 = 40 \ldots$ (72, 09)

$891 : 18 = 4 \ldots$ (72, 171) не делим

$324 + 486 = 810$

1620

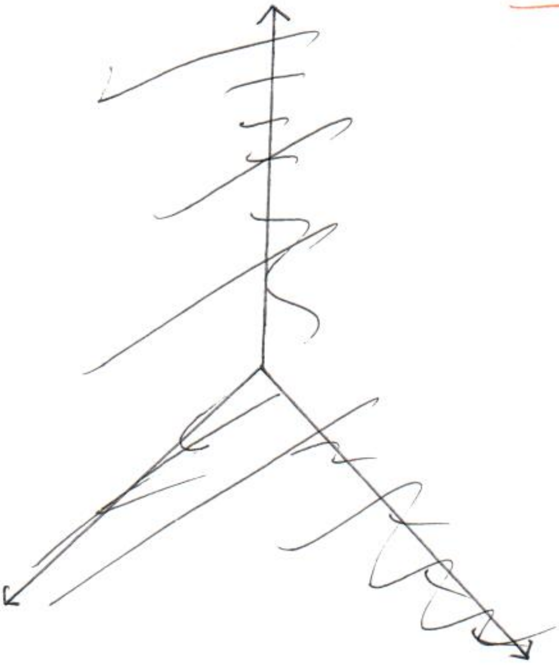
Ответ: список: 162, 243, 324 (3), 405, 486 (5), 648, 810, 972

$S_{(3+5+\text{предл.})} = 324 + 486 + 810 = 1620$

Ответ: 1620

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

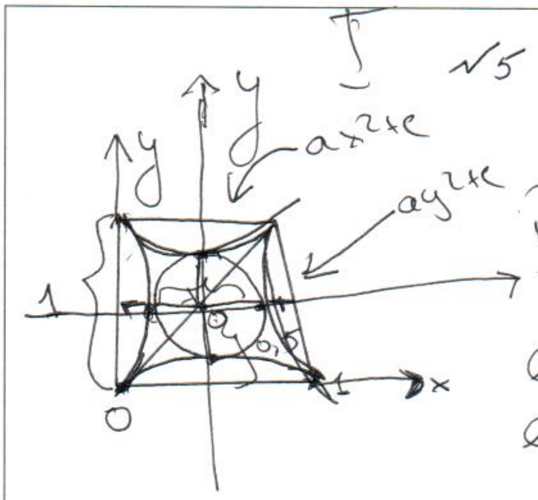
№3 черновик



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

27-57-57-74 (129.3)

№5 Чистов



~~соединим соседние вершины, получим квадрат со стороной 1~~

~~Введем декартову прямоугольную СК в начале с точки O~~

Обозначим вершины за V_1, V_2, V_3, V_4. В силу симметрии ~~расстояние между~~ рассмотрим вершины в точках $(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2})$.
В силу центральной симметрии и нулевых углов ур-ие др ограничат фигуру ур-ями 1) ax^2+c (верхнее) 2) ay^2+c (правое) 3) $-(ax^2+c)$ (нижнее) 4) $-(ay^2+c)$ (левое)
Рассмотрим вершину в 1 четверти (в т. $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$); сходятся верхняя и правая, заданная $g(x,y)=x^2-ay-c=0$.
Чтобы был нулевой угол их касательные в точке должны совпадать. А это есть равность производных обеих кривых.
для верхней: $y'=2ax$ В точке имеем $y'=a$
~~для нижней:~~
для правой (дифференцируем по x) $x=ay^2+c$ получим

$1=2ayy' \Rightarrow y'=\frac{1}{2ay}$

в точке имеем $y'=\frac{1}{a}$

производные, как говорилось ранее равны

$a=\frac{1}{a} \Rightarrow a^2=1$, т.к. для верх. фигуры $\Rightarrow$ ветви вверх $(a>0)$

$a=1$

$\frac{1}{2}=(\frac{1}{2})^2+c$

$c=\frac{1}{4}$

ур-ие верх. границы

$y=x^2+\frac{1}{4}$

$y_{min}=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$R=\frac{1}{4}$ Ответ: $\frac{1}{4}$

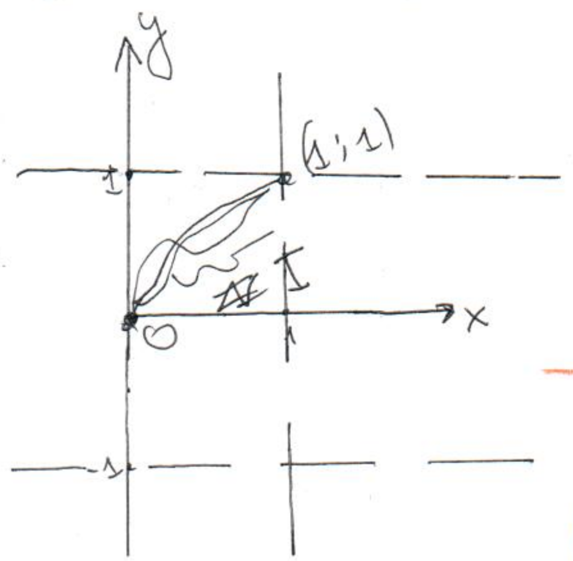
№1 чистовик

$0 \le x \le 1$

$-1 \le y \le 1$

$y = \sin k\pi x$

$n=3$



полоса ограничена прямыми: $x=0$, $x=1$; $y=1$; $y=-1$

Все три функции $y = \sin k\pi x$ (при $k \in \{11, 13, 17\}$ на промежутке $[0, 1]$ обладают следующими свойствами при $x=0$ все функции равны при $x=1$ все функции равны ($\sin 11\pi = \sin 13\pi = \sin 17\pi = 0$) получается, все функции исходят из 1 точки и „приходят" в 1 точку. На правой границе N кол-во областей, где кривые соединяющие две точки на границе разбивают $N = (n+1) I$ $n=3$, I – общее число пересечений кривых на промежутке, не включая границы ($0 < x < 1$). Это справедливо, если все пересечения являются простыми. Найдем точки пересечения каждой пары: $\sin k_1 \pi x = \sin k_2 \pi x \Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\pi x\right) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\pi x\right) = 0$

$k = 11$ $k = 13$

$\sin kx = 0 \Rightarrow x$ не внутри рассматриваемого промежутка

$\cos 12\pi x = 0 \Rightarrow 12x = \frac{1}{2} + m \Rightarrow x = \frac{2m+1}{24}$. Для $x \in (0,1)$ имеем $2m+1$ ($m \in \{1, 2, 3 \dots 23\}$) – 12 точек.

сумма: 12

№8 Шепелев

$3(x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geq 0 \iff \begin{cases} a>0 \\ a \neq 1 \\ x>0 \\ \dfrac{3x^2}{\log_x a} - \log_x a - 2x \geq 0 \quad (1) \end{cases}$

Пусть $\log_x a = t$, тогда неравенство 1 примет вид

$\frac{3x^2}{t} - \cancel{\log}\, t - 2x \geq 0$

$D = \cancel{12t}\,2 + 4t \cdot \frac{3}{t} = 14 \Rightarrow$ ур-ие $\frac{3x^2}{t} - t - 2x$ всегда имеет 2 корня,
а значит и два интервала. Значит надо найти такие значение a при котором один из интервалов выродится в точку

№4 (продолжение)

$n = 11$ $\quad \sin 3\pi x = 0$

$n = 14$

$3x = m \Rightarrow x \in \{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\}$ – 2 точки

итого 16 точек $\cos 14\pi x = 0$ $\quad 14x = \frac{1}{2} + m \Rightarrow x = \frac{2m+1}{24}$

$n = 13$ $n = 14$ $\qquad$ для $x \in (1, 3, \ldots 24)$ m – 14 точек.

$\sin 2\pi x = 0$ $\quad 2x = m$ $\quad x = \frac{1}{2}$ – 1 точка

$\cos(13\pi x) = 0 \Rightarrow 15x = \frac{1}{2} + m \Rightarrow x = \frac{2m+1}{30}$ для $x \in (0;1)$

подходят $m \in \{1, 3 \ldots 29\}$ – 15 точек

итого. 16 точек

Проверим $\frac{2m+1}{24} = \frac{2n+1}{2\cancel{8}}$ или $\frac{2m+1}{24} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ общих точек
нет $\Rightarrow$ все пересечения двойные

$\Sigma = 12 + 16 + 16 = 44$

$N = (n+1)\Sigma = 4 \cdot 44 = 176$ (подели на 2) – $176 : 2 = 88$

Ответ: ~~176~~ 88

№8 черновик

$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

$$\begin{cases} 3x^2 \dfrac{\ln a}{\ln x} - 1 - 2x \geq 0 \ (1) \\ x > 0;\ x \neq 1 \\ a > 0;\ a \neq 1 \end{cases}$$

$3x^2 \ln a - \ln a - 2x \ln a \geq 0$ ($\ln x > 0$, либо $x > 0$)

$3x^2 \ln a - \ln a (2x + 1) \geq 0$

~~условие существования точки: функция должна касаться Ox~~

исследуем функцию:

при $x = 1$ - точка разрыва (существование множителя)

при $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ может найтись изолированная точка

при e

№8 черновик

$3x^2 \log_a x + \log_x a - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \\ x>0 \\ 3x^2 \cdot \frac{1}{\log_x a} + \log_x a - 2x \geq 0 \end{cases}$

Пусть $\log_x a = t$, тогда

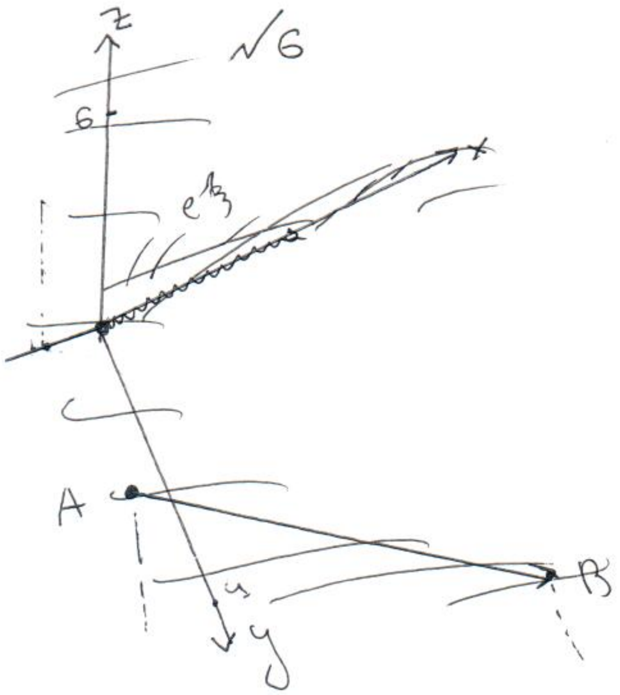
$\frac{3x^2}{t} - t - 2x \geq 0$, чтобы парабола была выше/касалась Ox, тогда $D \leq 0$

$\frac{3x^2}{t} - 2x - t \geq 0$

$D =$

$D = 4 + 4 \cdot \frac{1}{t} \cdot t = 8$

№6

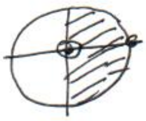


 черновик

$\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x$

$\cos x \geq 0$

$\cos x \neq 0$



$\frac{3}{\cancel{4}}\cdot\frac{9}{1}=3$

$ctg^2x=3$

$6(1-ctg^2x)=16\cos^2x$

$\cos\frac{11}{3}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}\cdot\cancel{\frac{4}{\sqrt3}}$

$\sin\frac{11}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$

$6-6ctg^2x=16\cos^2x$

$6-6\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=16\cos^2x \,\Big|\cdot\cos^2x$

$16\cos^4x-6\cos^2x=0$

$\cos^2x(16\cos^2x-6)=0$

$6-6\sin^2x=16\cos^4x$

$6-6(1-\cos^2x)=16\cos^4x$

$6\sin^2x-6\cos^2x=16\cos^2x\sin^2x$

$6-6+6\cos^2x=16\cos^4x$

$\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot 6=4.$

$\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\cancel{6}^{2}$ 4

$16\cos^2x\sin^2x-6\sin^2x+6\cos^2x=0$

$2=2$

$16\cos^2x\sin^2x-6(1-\cos^2x)+6\cos^2x=0$

$16\cos^2x\sin^2x-6+6\cos^2x+6\cos^2x=0$

$\frac{N}{S_N}=9k$

$16\cos^2x\sin^2x-12\cos^2x-6=0$

$N=S_N 9k \Rightarrow N \vdots 9$

$16\cos^2x(1-\cos^2x)-12\cos^2x-6=0$

$16\cos^2x-16\cos^4x-12\cos^2x-6=0$

$16\cos^4x-4\cos^2x+6=0$

$t=\cos^2x$

$16t^2-4t+6=0$

$t=4\pm\sqrt{}$