18-38-80-15
(124.23)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Татуева Владислава Вячеславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

18-38-80-15
(124.23)

50 (Пятьдесят) [illegible]

№1 Чистовик

апелляция: 90 (Девяносто)

$$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 6\left(1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 16\cos^2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 3(\sin^2 x - \cos^2 x) = 8\sin^2 x\cos^2 x \quad (1) \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

(1): $-3\cos 2x = 2\sin^2 2x$

$-3\cos 2x = 2 - 2\cos^2 2x$

$2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0$

3 −4
4 −1

$2(\cos 2x - 2)(\cos 2x + \frac{1}{2}) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 2 \quad (\varnothing, \text{т.к. } \cos\alpha \in [-1;1]) \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

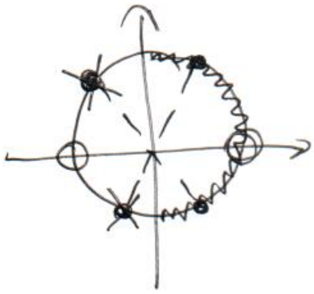
$\cos 2x = -\frac{1}{2}$

$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \; n \in Z$

вернёмся в систему:

$$\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n \\ \cos x \geq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$



Отв: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \; n \in Z$

№2 Чистовик

Пусть ~~это~~ подходит число – a

$S(a)$ – сумма его цифр, тогда его можно представить в виде:

$a = S(a) \cdot 9 \cdot k$ (т.к. $a : S(a) = 9 \cdot k$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \vdots 9$, тогда и $S(a) \vdots 9$, т.е.

$S(a) = 9 \cdot p$, тогда $a = 9 \cdot p \cdot 9 \cdot k = 81 \cdot n$

~~т.е.~~ Найдем все такие трехзначн~~ые~~ целые числа подставляя ~~натур.~~ n ~~...~~

($n > 0$, т.к. a – нат. по усл):

$\times n = 1 \cdot a = 81$ (не трехзн.)

$n = 2 - a = 162$

$n = 3 - a = 243$

$n = 4 - a = 324$

$n = 5 - a = 405$

$n = 6 - a = 486$

$\times n = 7 - a = 567$

$n = 8 - a = 648$

$\times n = 9 - a = 729$

$n = 10 - a = 810$

$\times n = 11 - a = 891$

$n = 12 - a = 972$

$\times n = 13 - a = 1053$

Заметим что среди чисел есть только с суммой цифр 9 и 18

При этом: если $S(a) = 9$, то ~~...~~ $a : 9 = 81 \cdot n : 9 = 9n$ точно кратно 9 и цел.

если $S(a) = 18$, то

$\frac{a}{18} = \frac{81n}{18} = \frac{9n}{2}$, т.е.

n должно быть чёт

Тогда уберем числа где n – неч и $S(a) = 18$

Итого:

$\left[\begin{array}{l} \underline{162},\ 243,\ 324,\ 405,\ 486, \\ \underline{648},\ 810,\ \underline{972} \end{array}\right]$

$$\begin{array}{r} 972 \\ +\ 162 \\ \hline 1134 \\ +\ 648 \\ \hline 1782 \end{array}$$

$162 + 648 + 972 = 1782$

Отв: 1782 (числа см. выше)

18-38-80-15 (124.23)

№3 Чистовик

Т.к. катеты ||-ны осям, то пл-ть тр-ка будет ||-на соответствующей координатной пл-ти (или совпадать) по признаку ||-х пл-тей.

Для одной координатной пл-ти: ||-х пл-тей в F — 6

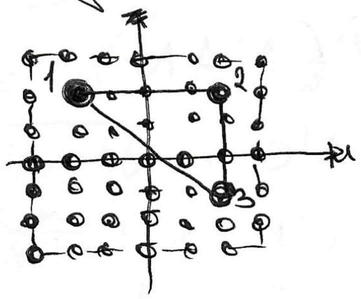
3 с одной стороны и 3 с другой

с учётом самой коорд. пл-ти — 7

Таких пл-тей 3, т.е. всего $7 \cdot 3 = 21$ пл-ти для п/у тр-в.

Рассмотрим одну такую пл-ть отдельно:

Будем строить тр-к от острого угла:



- для выбора 1-й точки $7 \cdot 7 = 49$ вар-в
- для выбора второй (прямой угол) $2 \cdot 6 = 12$ (2 сп. - выбрать пр-ю ||-ю оси и 6 сп. выбрать точку на ней)
- для выбора 3-й (второй остр. угол) 6 — сп. выбрать точку на оставш. пр-й.

Тогда в одной пл-ти мы ~~сч~~ учитываем каждый тр-к дважды — от одного остр. угла или от второго, т.е. всего способов построить —

$\frac{49 \cdot \cancel{12}^{6} \cdot 6}{\cancel{2}} = 1764$ — в одной пл-ти, а их — 21, т.е. $1764 \cdot 21 = 37044$

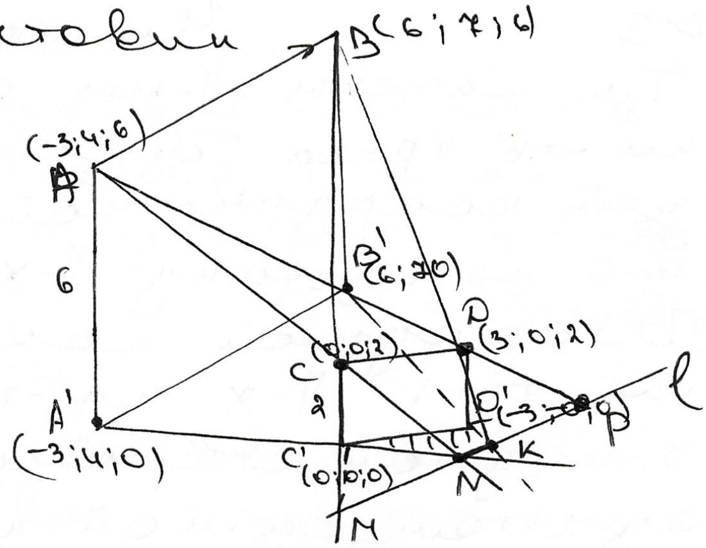
Ответ: 37044

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№6 Чистовик

Спроецируем все точки на „землю" (пл-ть XOy)

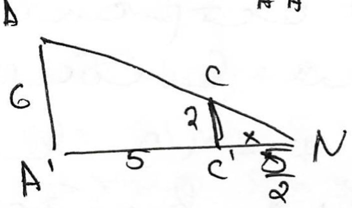
И построим пр-ю ~~после~~ пос которой всё будет освещено (l)



Соединим крайние точки траектории с крайними точками забора и получим затенённую область

1) $(A'AN)$: $\triangle A'AN \sim \triangle C'CN$ $\quad k = \frac{CC'}{AA'} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$A'C = \sqrt{(-3-0)^2(4-0)^2} = 5$



$C'N = x$: $\cancel{\frac{x}{5+x}}$ $\frac{C'N}{A'N} = k$

$\frac{x}{5+x} = \frac{1}{3}$

$3x = 5 + x$

$x = \frac{5}{2}$ $\qquad C'N = \frac{5}{2}$

2) $(B'BK)$: Аналогично:

$\frac{KD'}{KB'} = k = \frac{1}{3}$ $\qquad$ Пусть $KD' = x$

$B'D' = \sqrt{(6-3)^2+(7-0)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

$\left(A'B' = \sqrt{(-3-6)^2+((4-7)^2} = \sqrt{9^2+3^2} = 3\sqrt{9+1} = 3\sqrt{10} \right)$

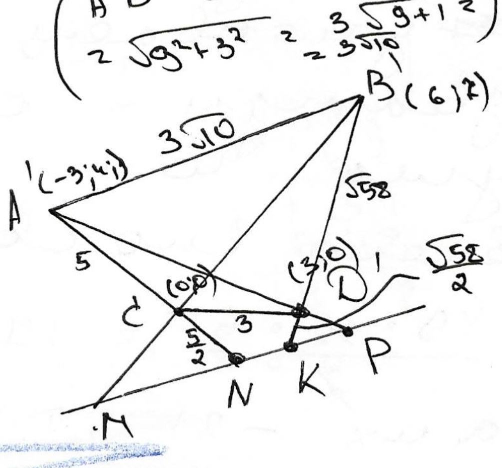
$\frac{x}{\sqrt{58}+x} = \frac{1}{3}$

$3x = \sqrt{58} + x$

$x = \frac{\sqrt{58}}{2}$ $\qquad D'K = \frac{\sqrt{58}}{2}$

3) $(A'B'D')$:

$S_{MC'D'P}$ - ?



18-38-80-15
(124.23)

$\frac{NC'}{AN} = \frac{1}{3}$ ~~$\Rightarrow (0;0)$~~ Чистовик

пусть $N(x;y)$ тогда из отношения отр-в:

$0 = x(1-\frac{1}{3}) + (-3)\frac{1}{3} = \frac{2}{3}x - 1$

$x = \frac{3}{2}$.

$0 = y(1-\frac{1}{3}) + 4\frac{1}{3} = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$

$\frac{2}{3}y = -\frac{4}{3}$ $\quad N(\frac{3}{2}; -2)$

$y = -2$

4) K: Аналогично: $K(x;y)$

$3 = x(1-\frac{1}{3}) + 6\frac{1}{3} = \frac{2}{3}x + 2$

$\frac{2}{3}x = 1$

$x = \frac{3}{2}$

$0 = y(1-\frac{1}{3}) + 7\frac{1}{3} = \frac{2}{3}y + \frac{7}{3}$

$\frac{2}{3}y = -\frac{7}{3}$ $\quad K(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2})$

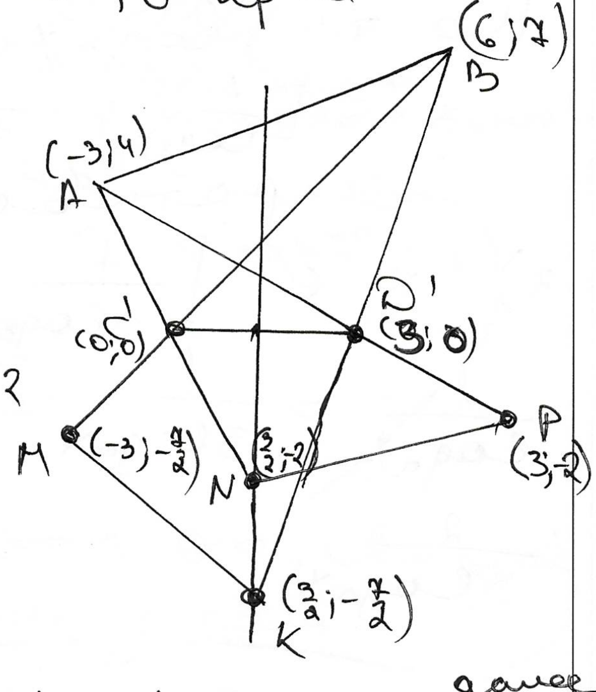
$y = -\frac{7}{2}$

5) Зададим пр-ю через N и K

т.к. $x = \frac{3}{2}$ у двух точек то пр-я вида $x = \frac{3}{2}$

6) Перерисуем:

$\frac{MC'}{MB} = \frac{PD'}{AP} = \frac{1}{3}$



7) $M(x;y)$:

$0 = x(1-\frac{1}{3}) + 6\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}x + 2$

$\frac{2}{3}x = -2 \quad x = -3$

$0 = y\frac{2}{3} + 7\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}y + \frac{7}{3}$

$\frac{2}{3}y = -\frac{7}{3} \quad y = -\frac{7}{2}$

8) P: $3 = \frac{2}{3}x + (-3)\frac{1}{3} \Rightarrow x = 3 \quad y = -2$ далее $\rightarrow$

№8 Чистовик

$3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$

ОДЗ: $\begin{cases} a \neq 1 \\ x \neq 1 \\ x > 0 \\ a > 0 \end{cases}$

пусть $\log_a x = t$

$3x^2 t - \frac{1}{t} - 2x \leq 0$

$3x^2 t - \frac{1}{t} - 2x = 0$

$D_1 = 1 + 3t \cdot \frac{1}{t} = 4$

$x = \frac{1 \pm 2}{3t}$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} = \frac{1}{\log_a x} \\ x = \frac{1}{3t} \quad \frac{1}{3\log_a x} \end{array}\right.$

т.е. $x \in \left[\frac{1}{\log_a x}; \frac{1}{3\log_a x}\right]$ (1) или

$\left[\frac{1}{3\log_a x}; \frac{1}{\log_a x}\right]$ (2) в зав-ти от того что меньше (без учёта огранич.)

1) $x \in \left[\frac{1}{\log_a x}; \frac{1}{3\log_a x}\right]$

$\frac{1}{3\log_a x} > \frac{1}{\log_a x}$

$\frac{-2}{3\log_a x} > 0$ ~~т.е.~~ $\Rightarrow \log_a x < 0$

$x \in (0; a)$

Но т.к. $\log_a x < 0$, то из $x \in \left[\frac{1}{\log_a x}; \frac{1}{3\log_a x}\right] \Rightarrow x < 0$

противоречие

2) $x \in \left[\frac{1}{3\log_a x}; \frac{1}{\log_a x}\right]$

$\frac{1}{\log_a x} > \frac{1}{3\log_a x}$

$\frac{2}{3\log_a x} > 0 \Rightarrow \log_a x > 0$

$x \in (1; +\infty)$

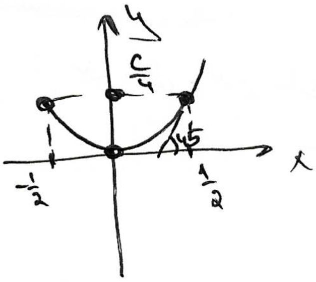
Чистовик

Тогда:

$x \in \left[\frac{1}{3\log_a x}; \frac{1}{\log_a x}\right]$

$x \in (1; +\infty)$

№5



Построим первую пар-лу $y = Cx^2$ тогда ~~~~ „высота" этого кусочка будет $y(\frac{1}{2}) = \frac{C}{4}$

тогда ~~R будет рав.~~ $R = \frac{1 - 2\cdot\frac{C}{4}}{2} = \frac{1-\frac{C}{2}}{2} =$

$= \frac{1}{2} - \frac{C}{4}$ (сторона квадрата минус 2 „высоты" нижней и верхней параболы)

~~Заметим что tg угла наклона производной в~~

Заметим что угол наклона касательной к т ($x = \frac{1}{2}$) ~~~~ $- 45^0$

$y' = 2Cx$ $\qquad y'(\frac{1}{2}) = C = tg 45^0 = 1$

$R = \frac{1}{2} - \frac{C}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$

(угол 45^0 т.к. касат - диаг. квадрата а его стороны ||-ны осям

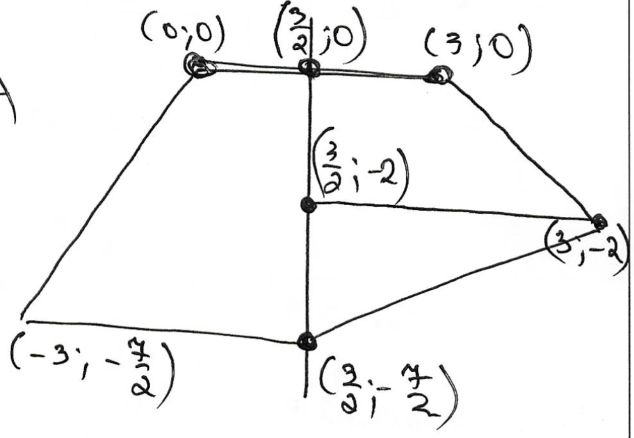
№6 Продолжение Чистовик

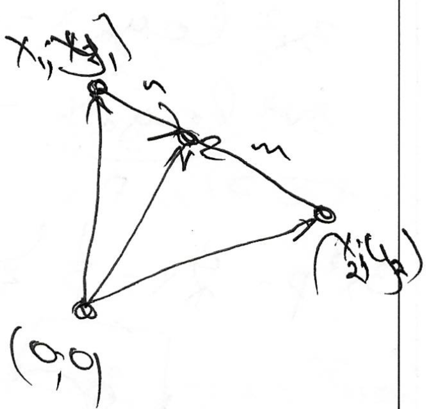
$$S = \frac{\frac{3}{2} + 3 + \frac{3}{2}}{2} \cdot \frac{7}{2} +$$

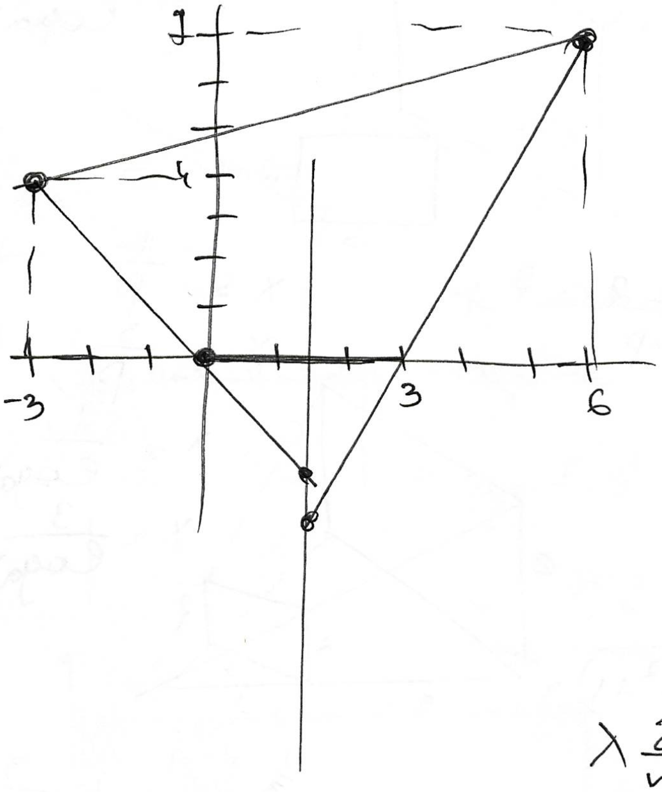
$$+ \frac{3 - \frac{3}{2} + 3 - \frac{3}{2})}{2} \cdot 2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{21}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} = \frac{105}{8}$$







$(x_1;y_1)+$

$\frac{m}{n+m}(x_1-x_2;y_1-y_2)$

$\frac{n}{n+m}(x_2-x_1;y_2-y_1)$

$\lambda(x_2-x_1)+x_1=$

$=\lambda x_2-x_1+x_1=$

$=\lambda x_2;\lambda y_2$

$(x_2-x_1)\lambda$

x_1

$x'=x_2\lambda-x_1\lambda+x_1=$

$=\boxed{x_2\lambda+x_1(1-\lambda)}$

$\frac{x_1+x_2}{2}$

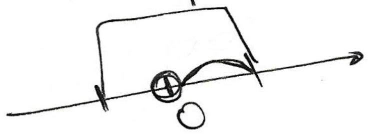
$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

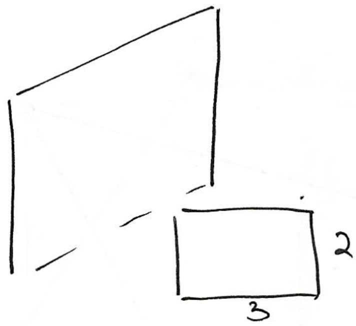
$a \ne 1$
$x \ne 1$
$a > 0$
$x > 0$

$3x^2 \underbrace{\log_a x}_{p} - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0$

$3x^2 p - 2x - \frac{1}{p} \ge 0$

$x = \frac{1}{\log_a x}$





$1 + \frac{1}{p} \cdot 3p = \sqrt{4} = 2$

$x = \frac{1 \pm 2}{3p}$

$x = \frac{1}{p}$

$x = \frac{3}{p}$

$\sqrt{(-3-6)^2 + (4-7)^2}$

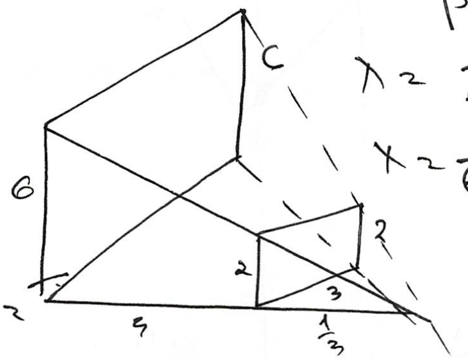
$x = \frac{1}{\log_a x}$

$x = \frac{3}{\log_a x}$

$= \sqrt{9^2 + 3^2} =$

$= \sqrt{3^4 + 3^2} = \sqrt{3^2(3^2+1)} =$

$= 3\sqrt{10}$



$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\log_a x}; \frac{3}{\log_a x}\right]$

$\frac{1}{\log_a x}$ $\frac{1}{3\log_a x}$

$Ax + By + C = 0$

$y = kx + \cancel{b}$

$4 = k - 3$

$k = 7$

$y = 7x$

$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{3x}$

$y = kx + b$

$\frac{1}{100}$ $\frac{1}{300}$

$7x = \frac{7}{3}x - 7$

$21x = 7x - 21$

$14x = -21$

$x = -\frac{21}{14} = -\frac{3}{2}$

$y = -\frac{3}{2} \cdot 7 = -\frac{21}{2}$

$\begin{cases} 7 = k6 + b \\ 0 = 3k + b \end{cases}$

$3k = 7$

$k = \frac{7}{3}$

$0 = 7 + b$

$b = -7$

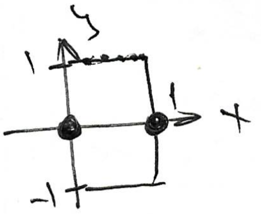
$y = \frac{7}{3}x - 7$

$\frac{1}{x} > \frac{1}{3x}$

$x > 0$

$3 > 1$

$\frac{1}{\log_a x} > \frac{1}{3\log_a x}$ $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{21}{2}\right)$ $\frac{3-1}{\log_a x} > 0$



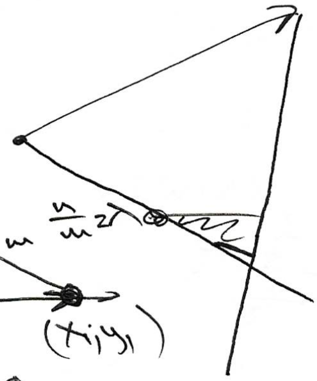
$\frac{1}{3}$

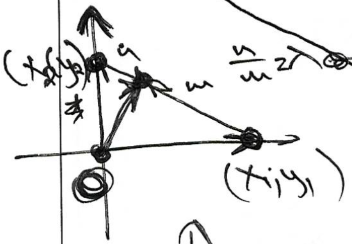
$\sin k\pi x$ $\quad \sin 11\pi x$

$\sin 13\pi x$

$(-3; 4; 6)$ $\quad \sin 15\pi x$

$(0; 0; 2)$





$(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$

$\frac{15}{22}x$

$x = \frac{1}{\log_a x}$

$x \log_a x = 1$

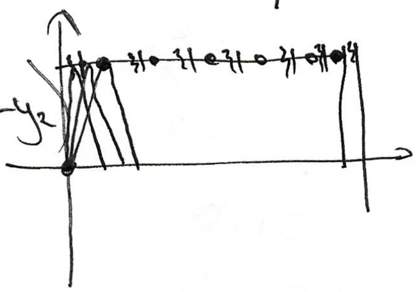
$11\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$11x = \frac{1}{2} + 2n$

$x = \frac{1}{22} + \frac{4}{22}n$

$\frac{1}{22} \quad \frac{5}{22} \quad \frac{9}{22}$

$\frac{13}{22} \quad \frac{17}{22} \quad \frac{21}{22}$



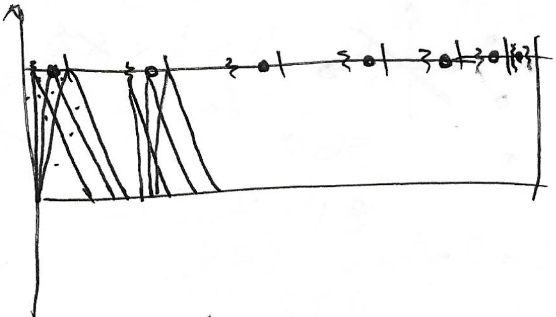
$y = -Cx^2 - 2R$

$y = -Cx^2 - 1 + \frac{C}{2}$

$y = -Cx^2 + \frac{1}{2}C - 1$

$13x = \frac{1}{2} + 2n$

$x = \frac{1}{26} + \frac{4}{26}n$

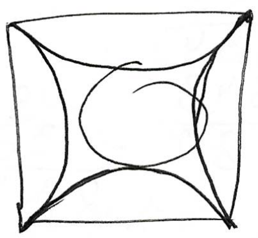


$\frac{\lambda x_1 + x_2}{1 - \lambda}$ $\quad \frac{x_1 + x_2}{1 - \lambda}$

$\frac{1 \quad 5 \quad 9}{26}$

$\frac{13 \quad 17 \quad 21 \quad 25}{26}$

1 $\quad$ 0,5



$\frac{1}{2}$

$y = Cx^2$

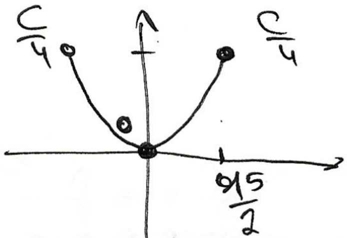
$\frac{1}{4}$

15

$\frac{1 \quad 5 \quad 9 \quad 13}{30}$

$\frac{17 \quad 21 \quad 25 \quad 29}{30}$

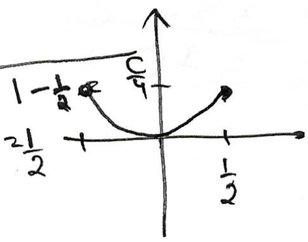
$x = \frac{\lambda x_1 + \lambda x_2}{1 - \lambda}$ $\quad R = \frac{1}{2} - \frac{C}{4}$



$\frac{1}{11}$ $\quad \frac{2}{15}$

$\frac{15}{11} < \frac{22}{15}$

$\frac{x_1 + x_2}{2} =$



$\frac{x_1 + x_2}{4} =$

$x = Py^2$ $\quad \frac{1}{2} = P\frac{C^2}{16}$

$x = \frac{8}{C^2}y^2$ $\quad P = \frac{8}{C^2}$

$2Cx$ $\quad C = tg45$ $\quad y^2 = \frac{C^2 x}{8}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$$\begin{cases}\cos x \geq 0\\ 8^3(1-ctg^2x) = 16^8\cos^2 x\end{cases}$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$\begin{cases}\cos x \geq 0\\ 3(\sin^2 x - \cos^2 x) = 8\sin^2 x\cos^2 x\\ \cancel{\cos}\sin x \neq 0\end{cases}$$

$2 \cdot 2 = 4$

$2\sin^2 2x$

$\cos x \geq 0$
$\sin x \neq 0$
$-3\cos 2x = 2\sin^2 2x$

$58 : 2 = 29$, -4, 18

$-3\cos 2x = 2 - 2\cos^2 2x$

$2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0$

$3 \quad -4$

$2(\cos 2x - 4)(\cos 2x + 1) = 0$

$4 \quad -1$

$111 : 3 = 37$, -9, 21

$a = \frac{5}{9} \cdot 9 \cdot k \quad a = 81 \cdot p$

$162 : 9$, $\cancel{81}$, $9 \cdot 2 = 18$

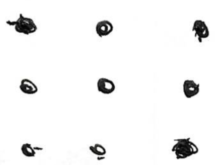
$y \quad x^2$

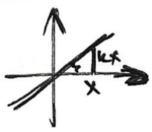
$y = kx$

$tg = \frac{kx}{x} = k$

$\times 81$, 13, 13, $+104$, 1053

$y = 2x$





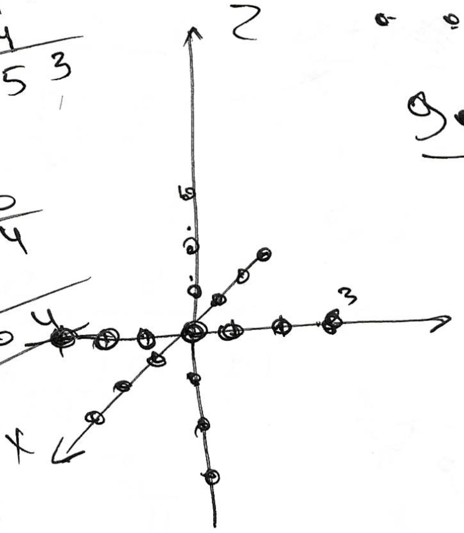
567

$81 \cdot 7$ 118

$= 36$

$\frac{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}$

$\times 49$, 36, 294, $+147$, 1764



$\times 972$, 162, 1134, $+648$, 1782

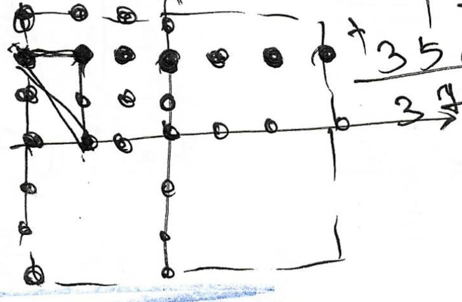
$\times 49$, 36, 294, $+147$, 1764

$\times 1764$, 21, 1764, $+3528$, 37044

$\times 1764$, 21, 1764, $+3528$, 37044

$7 \cdot 7 = 49$

$\frac{49 \cdot 6 \cdot 6}{3}$



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Повысить оценку на 40 баллов (старая оценка – 50 баллов, новая оценка – 90 баллов)

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников „Ломоносов"
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему
от участника заключительного этапа
по профилю „математика"
Татуева Владислава Вячеславовича

апелляция

Прошу пересмотреть мой индивидуальный
предварительный результат заключительного
этапа, а именно 50 баллов, поскольку считаю,
что задачи 1, 2, 3 и 5 решены полностью верно,
в 6 задаче допущена арифметическая ошибка
(вторая часть решение была на последнем черно-
вике, возможно, ее не заметили, доказательст-
во формулы координаты точки, делящей отре-
зок в заданном отношении, есть в черновике),
по критериям это не менее, чем ±, в 8 задаче
были совершены преобразования, но задача не
дорешена, что, как я понял, по критериям не
менее, чем ±. Также хочу заметить, что мои
задачи не все из одного варианта (не знаю,
должно быть так или нет). То есть 2 задача –
В-1 в разборе, 3 задача – В-4, 5 задача – В-2 (отве-
ты на эти задачи с ответами в разборе совпа-
дают)

Подтверждаю, что я ознакомлен с Положением
об апелляциях на результаты олимпиады школь-
ников „Ломоносов" и осознаю, что мой индивиду-
альный предварительный результат может
быть изменен, в том числе в сторону умень-
шения количества баллов.

23.04.2026