0 220742 190009

22-07-42-19
(123.17)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10-ый класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Титова Леонида Николаевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

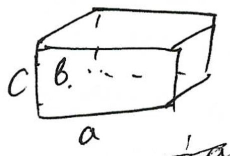
Подпись участника
Ти

 65 (Шестьдесят пять)

22-07-42-19 (123.17)

$V_{min} = ?$

Черновик.



$V = abc$; $S = 2(ab + bc + ac)$

$\cancel{abc + 2(ab+bc+ac) + a + b + c = 2026}$

$(a+2)(b+2)(c+2) =$

$(a+2)(bc + 2b + 2c + 4) = abc + 2ab + 2ac + 4a + 2bc + 4b + 4c + 8$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2026 + 8 + 3(a+b+c) = 2034 + 3(a+b+c)$

$ab + c \le 2\sqrt{abc}$, $bc + a \le 2\sqrt{abc}$, $ac + b \le 2\sqrt{abc}$

$ab + bc + ac + A \le 6\sqrt[6]{(abc)^{\frac{3}{2}} \cdot 2^3 \cdot 3\,(abc)^2} =$

$a > b > c$

$\cancel{2026 \ge c^3 + 6c^2 + 3c}$

$abc + 2(ab+bc+ac) + 4a + 4b + 4c = 2026 = (a+2)(b+2)(c+2) - 8$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034.$

$2034 = 2 \cdot 1017$

$1017 : 9 = 113$

$2034 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$

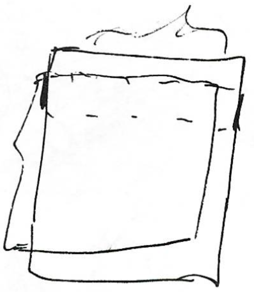
$(6, 3, 113)$

$4, 1, 111 \Rightarrow V = 444$

$\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y \cdot \operatorname{tg}z$ – max

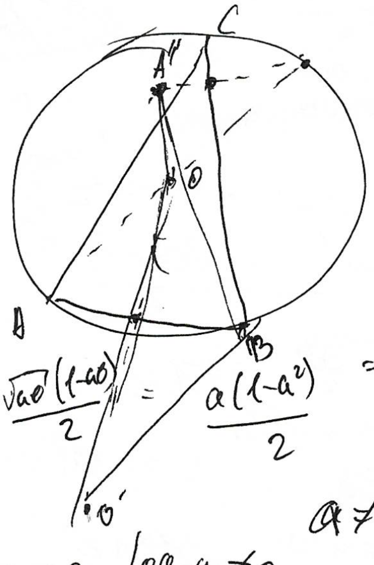
$x + y + z = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y = \operatorname{ctg}(x+y)$



$1, 100$

$\cancel{100 \cdot 4 \cdot (2^{99} - 1)}$



$\operatorname{tg}x = a$

$\operatorname{tg}y = b$

$$\frac{\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}(x+y)} = \frac{(\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y)(1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y)}{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}$$

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \ge 0$$

$$\frac{(a+b)(1-ab)}{a+b}$$

$$\frac{(ab)(1-ab)}{a+b} \le \frac{\sqrt{ab}(1-ab)}{2} = \frac{a(1-a^2)}{2}$$

$\log_2 a$

$a^2(a^{2x-2} - 3a^{x-1} + 2) \ge 0$

$$\frac{a^2(a^{x-1} - 2)(a^{x-1} - 1)}{\log_2 a} \ge 0$$

$a \ne 1$

$a > 0$, $\log_2 a \ne 0$

$a \ne 0$

$a = b$

$a^{x-1} = 1$

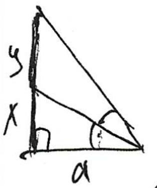
$x = 1$

$\left(-\frac{a^3}{2} + \frac{a}{2}\right)' = -\frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}$

$a^2 = \frac{1}{3}$

$a = \sqrt{3}$, $a = -\sqrt{3}$

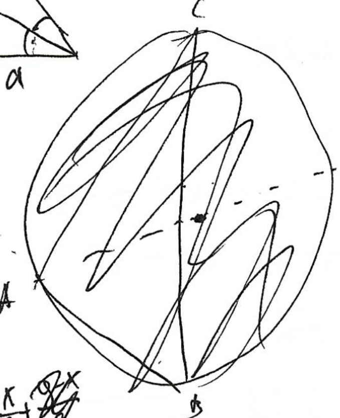
Черновик.

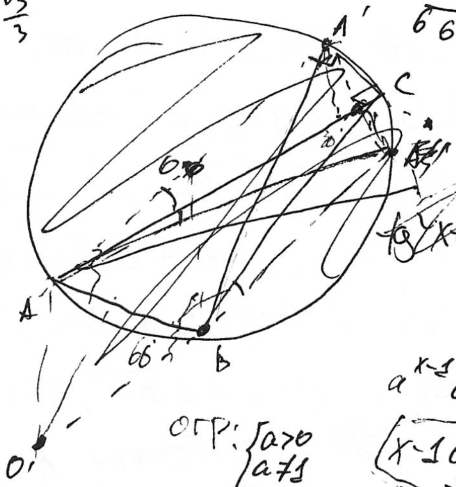


$tg 30^\circ = \frac{\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}} = \frac{\sqrt3}{3}$

$1666\cdot 5200$

66660800





$\frac{a}{x+y}+\frac{x}{a}$

$a^{x-1}\in[1;2]$

ОГР: $\begin{cases}a>0\\a\ne1\end{cases}$

$\boxed{x-1\in[0,\log_a 2]}$

$\log_2 a<0$

$\log_2 a>0$

$\frac{a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)}{\log_2 a}\ge 0$

$b\ge a$

$\frac{ab(1-ab)}{a+b}=ab\cdot\frac{(1-ab)}{a+b}$

$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$

$\left[\begin{array}{l}a^{x-1}<1\\a^{x-1}>2\end{array}\right.$

$x-1<0$

$x-1>\log_a 2$

$a+b<2b$

$1-ab>1-b^2$

$\frac{1-ab}{ab}>\frac{1-b^2}{b^2}$

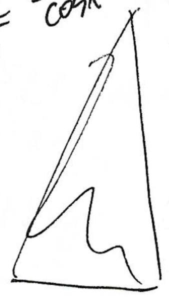
$\log_a 2=2026$

$tg x+tg y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=$

$2=a^{2026}$ $a=\sqrt[2026]{2}$

$\frac{BO}{\sin\alpha}=\frac{AB}{\sin x}$

$\frac{BO}{\sin2\alpha}=\frac{BC}{\sin y}$



$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$\angle A=72^\circ$

$\angle C=32^\circ$

$u=\pm\frac{1}{\sqrt3}$

$\angle BCO=2\angle BAO$

$\frac{\sqrt3}{6}-\frac{\sqrt3}{18}=\frac{2\sqrt3}{18}=\frac{\sqrt3}{9}$

$\angle OBC=3\angle ABO$

$\angle BOA\ ?\ \angle BAO$

да, это та формула

$\beta+3\beta=180-64=4\beta$

$\beta=45-16=29$

$2\cdot(2-\sqrt3)$

$4-2x\ ?\ \frac{x}{3}$

$4\cdot2x\ ?\ \frac{x}{9}$

$\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\sqrt3}{3}$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$; $\frac{2\cdot3\cdot5}{6}=5$; $\frac{3\cdot4\cdot7}{6}=14$, $4\ ?\ \frac{19}{9}x$

$4\ ?\ \frac43 x$

$\frac{25\cdot15\cdot33}{}=$

$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt3}}=\sqrt{2-\sqrt3}$

$5050\cdot33$

$33\cdot101\cdot50$

$\frac{12}{4}\ ?\ x$

$5050\cdot33$

15150

15150

166650

$166650+200=166850$

$166850\cdot4=667400$

$\frac{144}{49}$

$\log_a b\cdot\log_b a=x$ $a\ne0, a\ne1$

$a^x=(a^{\log_a b})^{\log_b a}=b^{\log_b a}=a \Rightarrow x=1$

$\frac{1}{\cos x}$

$tg15^\circ=\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}$

$\cos30^\circ=2\cos^2 15-1$

$\frac{\sqrt3+2}{4}=\cos^2 15$

$\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}$

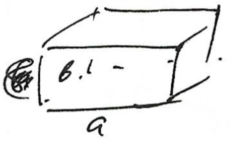
$2(2-\sqrt3)$

$\frac{2\sqrt{2-\sqrt3}}{\sqrt{2+\sqrt3}}=2(2-\sqrt3)$

22-07-42-19
(123.17)

Чистовик

① Пусть a, b, c – длина, ширина и высота данной прямоугольной призмы,
причём $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$.
Известно, что $\underbrace{abc+2(ab+bc+ac)+4(a+b+c)}_{=A}=2026$



Заметим, что $A+8=ab(c+2)+4(c+2)+2bc+2ac+4b+4a=(c+2)(ab+4+2a+2b)=(c+2)(a+2)(b+2)$.

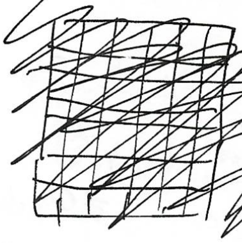
$\Rightarrow (a+2)(b+2)(c+2)=2026+8=2034$

$2034=2\cdot 1017=2\cdot 9\cdot 113$ (113 – простое число)

Поскольку $a, b, c \in \mathbb{N}$, то каждый из множителей $(a+2),(b+2),(c+2)$ хотя бы 3. Тогда либо $\{a+2, b+2, c+2\}=\{226,3,3\}$, либо $\{a+2, b+2, c+2\}=\{3,6,113\}$ (других способов разложения на мн-тели ≥ 3, очевидно, нет). В первом случае $V_1=(226-2)(3-2)(3-2)=224$, а во втором $V_2=(3-2)(6-2)(113-2)=444$. (надо группировать двойку с другими множителями) ($224<444$).

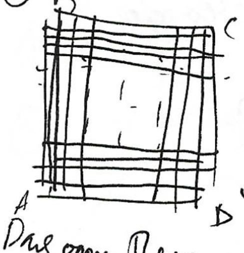
Ответ: 224.

~~③~~



~~Чтобы вырезать прямоугольник так, как сказано в условии, необходимо выбрать одну из сторон квадрата, произвольно то разре выбрать~~

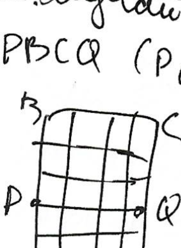
②



~~Т.к.~~ Поскольку после вырезания прямоугольника квадрат (вернее, то, что от него осталось) не распался, то хотя бы одна из сторон прямоугольника лежала на одной из сторон квадрата.

Для опред. Пусть на стороне AB (остальные случаи получаются поворотом и различаются из-за занумерованных клеток, так что умножим итоговое кол-во на 4). $N_{AB}=N_I+N_{II}$ (N – кол-во по случаям)

I случай: разрез сквозной, тогда вырезанный прямоугольник PBCQ ($P \in AB$, $Q \in CD$) или APQD.

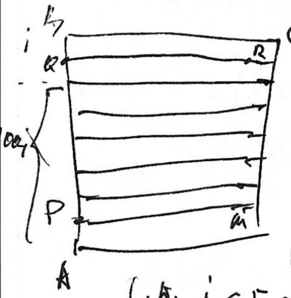


Точка Q однозначно определяется точкой P, а для отрезка BP есть 100 вариантов длины (от 1 до 100 в длинах клетки)

Тогда если вырезан листовик $ABCQ$, то 100 вариантов, а, из симметрии, для $APQD$ тоже 100 вариантов (можно сказать, что для каждого $ABCQ$ найдётся $APQD$, дополняющий его до $ABCD$.)

$\Rightarrow N_I = 200$

II. Разрез не сквозной. Тогда вырезаем $PQRM$



$(PQ \subset AB;\ R, M \notin CD)$

точка M одн. опред. точками P, B, Q.

Выберем сначала ~~точку~~ отрезок QP.

Пусть Q ближе к B, чем P

Пусть $BQ = i$ (клеток), тогда для т. P есть $100-i$ вариантов.

т.к. $i \in [1, 99]$, (если $i=100$, то точка P совпадёт с A, но мы это просчитали в случае I), то кол-во способов выбрать $QP = \sum_{i=1}^{99} i(100-i) = \sum_{i=1}^{99} 100i - \sum_{i=1}^{99} i^2 = 100 \cdot \frac{(99+1)\cdot 99}{2} - \frac{99\cdot 100\cdot 199}{6} =$

$= 50\cdot 100\cdot 99 - 33\cdot 50\cdot 199 = 33\cdot 50(300-199) = 33\cdot 50\cdot 101 = 166650$

для точки R есть 100 вариантов $(QR \in [1;100])$

$\Rightarrow N_{II} = 33\cdot 50\cdot 101\cdot 100 = 16665\cdot 10^3 \Rightarrow N_{AB} = \cancel{200}(\cancel{1+33\cdot 101\cdot 25})\ 16665200$

$\Rightarrow N_{\text{всё}} = 4\cdot 16665200 = 66660800$

Ответ: 66660800.

(4) $\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2((a^{x-1})^2 - 3a^{x-1} + 2)}{\log_2 a} = \frac{a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)}{\log_2 a} \geq 0 \quad (*)$

Из ограничений, накладываемых $\log_2 a$ в знаменателе ($\log_2 a \neq 0$ и $a>0$), следует, что $a>0$ и $a \neq 1$. $\Rightarrow a^2 > 0 \Rightarrow$

$(*) \Leftrightarrow \frac{(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)}{\log_2 a} \geq 0. \quad (1)$

I. $\log_2 a < 0$ $(0 < a < 1)$: $(1) \Leftrightarrow (a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2) \leq 0 \Leftrightarrow$ ~~$a^{x-1} \in [1;2]$~~.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^{x-1} \geq 1 \\ a^{x-1} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq \log_a 1 = 0 \\ x-1 \geq \log_a 2 \end{cases} \Leftrightarrow \{\log_a 2 + 1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [\log_a 2 + 1; 1].$

II. $\log_2 a > 0$ $(a>1)$: $(1) \Leftrightarrow (a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^{x-1} \leq 1 \\ a^{x-1} \geq 2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \leq \log_a 1 = 0 \\ x-1 \geq \log_a 2 = \frac{1}{\log_2 a} \end{array}\right.$ ~~$x \geq 1 + \log_a 2$~~

Чистовик

в случае II отрезок ~~вкладывается~~ не получается, т.к. подойдёт любой $x \le 1$.

значит, осталось найти a для случая I.

$\log_a^2 2 \; 1 - \log_a 2 - 1 = 2026 \Rightarrow \log_a 2 = -2026 \Rightarrow 2 = (a)^{-2026} \Rightarrow$

$a^{2026} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[2026]{2}} \in (0;1)$

Ответ: при $a = \frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

(5) Пусть $A = tgx \cdot tgy \cdot tgz$. Т.к. $z = \frac{\pi}{2} - x - y$, $tgz = ctg(x+y) \Rightarrow$

~~$A = \frac{tgx \cdot tgy}{tg(x+y)}$ Пусть $a = tgx$, $b = tgy$. Тогда $A = \frac{ab}{\frac{a+b}{1-ab}} = \frac{ab(1-ab)}{a+b} \le \frac{ab(1-ab)}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}(1-ab)}{2}$~~

$A = \frac{tgx \cdot tgy}{tg(x+y)}$. Пусть $a = tgx$, $b = tgy$ ($a, b > 0$, т.к. $x, y \in (0; \frac{\pi}{2})$) $\Rightarrow$

$A = \frac{ab(1-ab)}{a+b} \le \frac{ab(1-ab)}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}(1-ab)}{2}$ (нер-во о средних)

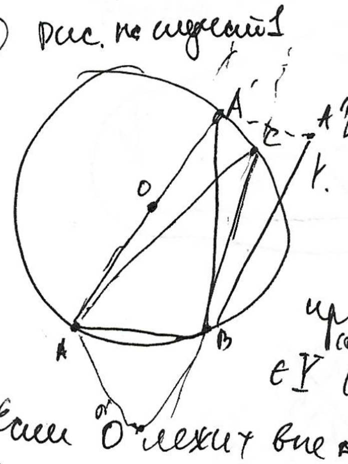
~~Пусть $u = \sqrt{ab}$. Тогда $A \le \frac{(1-u^2)u}{2} = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{2}$; $(\frac{u}{2} - \frac{u^3}{2})' = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}u^2$~~;

Равенство достигается при $a = b$. $\Rightarrow tgx = tgy$

Аналогично выразив y как $\frac{\pi}{2} - x - z$, получаем, что $tgx = tgy = tgz \Rightarrow x = y = z$ (т.к. на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$ tgx возрастает) $\Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow A = (tg\frac{\pi}{6})^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

(3) рис. по случаю 1



Пусть BC делит пл-ть (ABC) на две полуплоскости: X и Y, причём $A \in X$.

Если O лежит внутри $\triangle ABC$ или ~~все~~ $O \in Y$ ~~$\triangle ABC$ напротив A~~, то точка A', диам. противоп. A, принадлежит $Y \Rightarrow A'' \in X \Rightarrow O'$ должно $\in Y$ (сечение $\angle A''BO' < 180°$) ~~(случай)~~

Если O' лежит вне $\triangle ABC$ и $\in X$, то $O' \in X$ и $A'' \in Y$ (случай 1)

(параметр)

Случай 1: $\angle ABA' = 90°$, $\angle ABO' = \angle ABO$ (симметрия) $= 60°$ (т.к. $\angle C = 30°$)

; $\angle A'BC = \angle A''BC = \alpha$ (симметрия). Тогда $60° + 90° + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 15° \Rightarrow \angle ABC = 105°$.

Черновик.

$$\frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2}$$

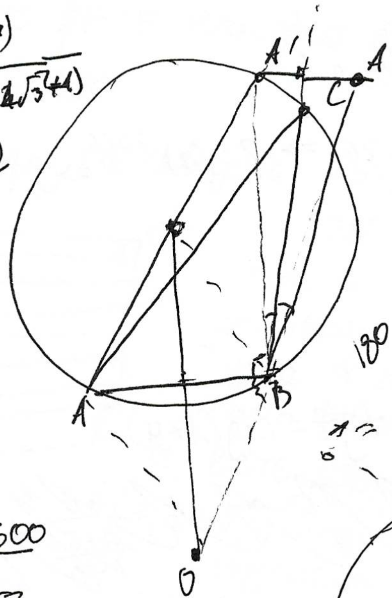
$$\frac{2(2-\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}$$

$$\cancel{\frac{2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}\,2}}$$

$$\cancel{\sin 150}\ \frac{2x}{1-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{x^2}{\sqrt{3}}+2x-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

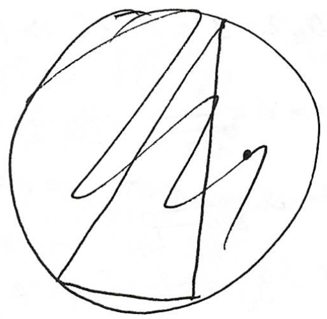
$\cancel{tg}$ $\quad (1-x^2)\frac{\sqrt{3}}{3}=2x$ $\quad D=4+4$

$$x_1=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=-\sqrt{3}\pm\sqrt{6}$$



$\frac{175}{16}$

$180-29-16$



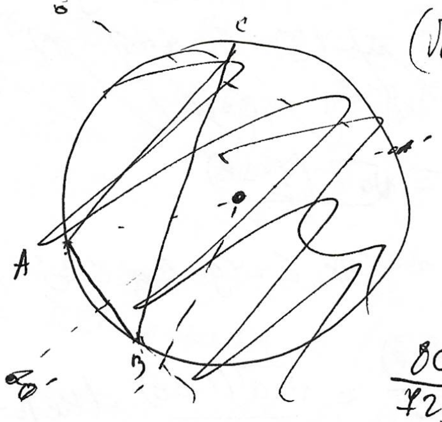
1600

$\frac{40}{27}\ ?\ \sqrt{2}$

$$\cos 15=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}}{2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin 15=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$tg\,15=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}$$



$$(\sqrt{6}-\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{2}-1\ ?\ \frac{\sqrt{3}}{9}$$

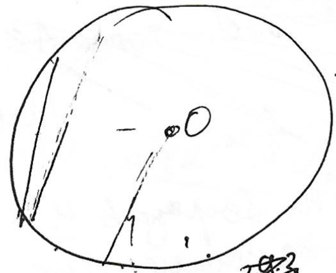
$$3-2\sqrt{2}\ ?\ \frac{1}{27}$$

$$81\ ?\ 54\sqrt{2}$$

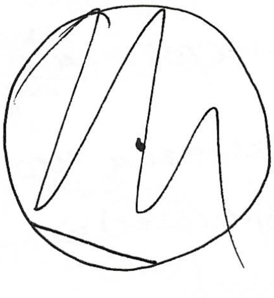
$$\frac{40}{27}\ ?\ \sqrt{2}$$

$$\frac{800}{729}\ ?\ 1 \qquad \frac{BO}{\sin A}=\frac{AB}{\sin O}$$

$27\cdot1.4=$
$27+10.8$
37.8



$$\frac{BO}{\sin C}=\frac{BC}{\sin O'}$$



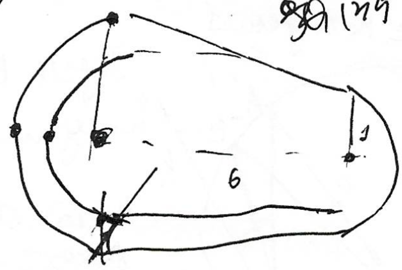
$$\frac{2(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{1-(9-2\cdot3\sqrt{2})}$$

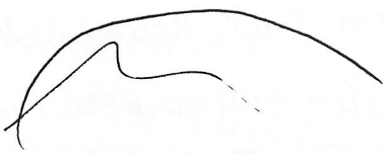
$$\frac{2(\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)}{6\sqrt{2}-8}=$$

$100-29-$

$$90+\frac{2\cdot29+32}{2}$$

$\cancel{90}\ 175$





$2x\sqrt{3}=1-x^2$

$x^2+2x\sqrt{3}-1=0$ $\quad x=\pm2-\dots$

$D=4\cdot4^2$

$(2-\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{3}\ ?\ \frac{\sqrt{3}}{9}\quad \frac{3\sqrt{3}}{3}\ ?\ 3$

$1111 \times 15 = 5555 + 1111 = 16665$

$16665 \times 4 = 66660$

Чистовик

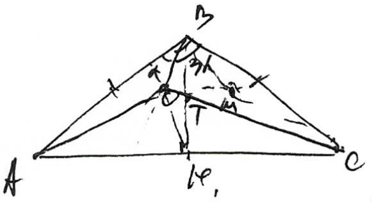
Случай 2. Пусть $OO' \cap AB = H$. Понятно, что если $O' \notin \underline{X}$, то $H \in \underline{X} \Rightarrow O' \in \underline{X}$. А значит, этот случай невозможен.

Другие случаи. Если $O \in AC$, то $\angle A''BO' = \angle CBO' = 150° < 180°$.

Если $O \in BC$, то $A'' \in \underline{X}_1$ и $B' \in \underline{X} \Rightarrow \angle A''BO' < 180°$.

Ответ: $105°$

6



$\angle BCO = 2\angle BAO \overset{=2\beta}{}$, $\angle OBC = 3\angle ABO = 3\alpha$

$\Rightarrow \angle ABC = 180° - 2 \cdot 3\alpha = 4\angle ABO \Rightarrow \angle ABO = 2\alpha$

Пусть M — такая т, что $\angle MBC = \alpha$, M лежит внутри $\triangle OBC$ и $\angle MCB = \beta$. Тогда $\triangle ABO = \triangle BCM$ по стороне и двум углам и $\angle MCO = \beta$.

Проведём $BH \perp AC$, $BH \cap OC = T$

$\angle HBC = 2\beta \Rightarrow BM$ - бис-а $\angle ABC \Rightarrow$ BH - бис-а в $\triangle BTC$ и CM - бис-а в $\triangle MCT \Rightarrow M$ - инцентр $\triangle TBC \Rightarrow$ $\angle BMC = 90 + \frac{\angle BTC}{2} =$

$180 = \frac{\angle BTC + \angle BCO}{2} = 180 -$