Выход из аудитории
13:37:10 – 13:38:50
+1 лист
+1 лист

0 830367 590006

88-03-67-59
(129.2)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Тихомирова Ильи Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» МАРТА 2026 года

Подпись участника
Тихом

88-03-67-59
(129.2)

ЧЕРНОВИК

$$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x \qquad 1+tg^2x = \frac{1}{\cos^2x}$$

$$tg^2x = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\sqrt{3\left(1-\frac{\sin^2x}{1-\sin^2x}\right)} = 2\sqrt{2}\sin x \qquad 3-\frac{3\sin^2x}{1\cos^2x} =$$

$$\frac{\sqrt{3-4\sin^2x}}{\cos^2x} = 2\sqrt{2}\sin x \qquad tg\,x \in [-1;1]$$

$$\Downarrow$$

$$x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$$

$$\frac{\sqrt{3\cos^2x-1}}{\cos x} = 2\sqrt{2}\sin x \qquad max = 2$$

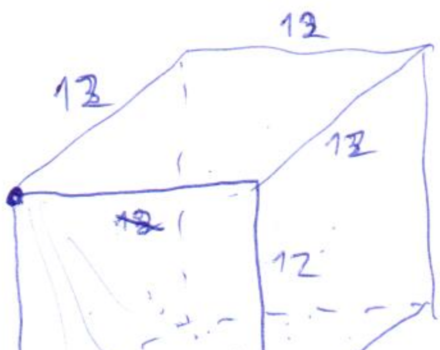
if $\overline{abc} \vdots (a+b+c) = 9k$, то +

100 : 1
101 : 2
102 : 3

$$100a+10b+c = 9(a+b+c)$$

$$91a+b-8c=0$$

$$a=1$$



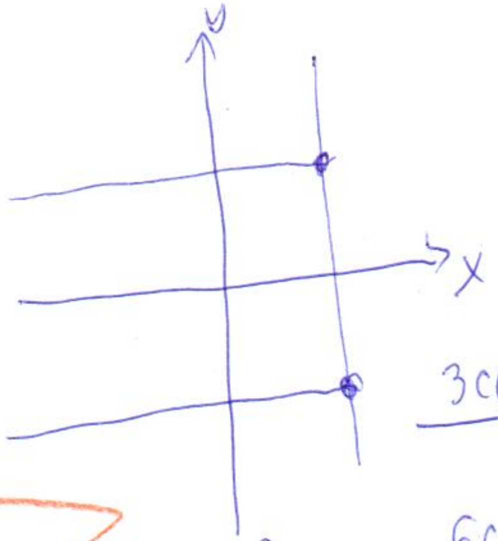
13

$13 \cdot 6 = 78 \cdot 13$

$78^2 \cdot 2$

12

Черновик



$\sin 11\pi x$

$\sin 13\pi x$

$\sin 15\pi x$

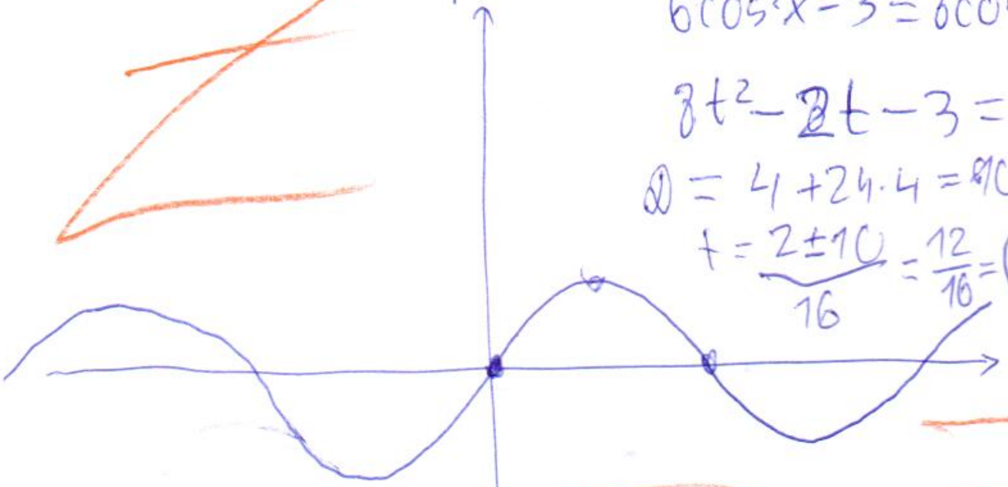
$$\frac{3\cos^2 x - 3\sin^2 x}{\cos^2 x} = 8(1-\cos^2 x)$$

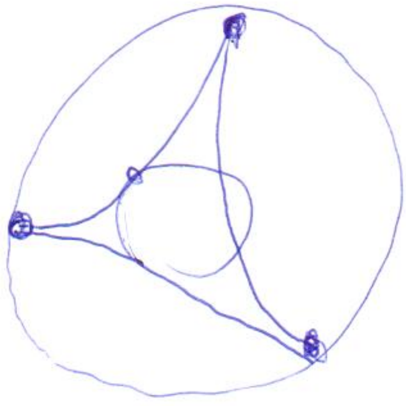
$$6\cos^2 x - 3 = 8\cos^2 x - 8\cos^4 x$$

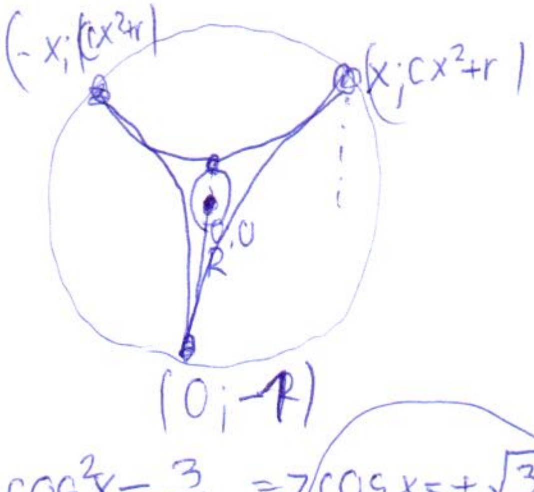
$$8t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$D = 4 + 24\cdot 4 = 100$$

$$t = \frac{2\pm 10}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$







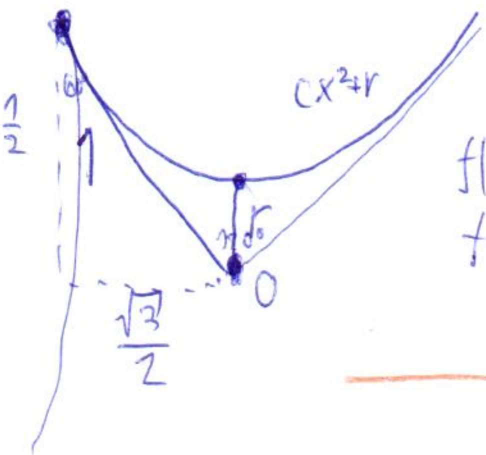
а)

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

88-03-67-59 (12º.2)

ЧЕРНОВИК



$\sqrt{3}$

$f(x) = cx^2 + r$

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4}c + r = \frac{1}{2}$

$3c + 4r = 2$

$y = kx + \cancel{b}$

$1 = k\sqrt{3}$

$k = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{x}{\sqrt{3}} \\ y = cx^2 + r \end{array}\right| \Rightarrow \exists!$ реш

$cx^2 - \frac{x}{\sqrt{3}} + r = 0$

$D = \frac{1}{3} - 4rc = 0$

$1 - 12rc = 0$

$1 - 3c \cdot 4r = 0$

$1 - (2 - 4r) \cdot 4r = 0$

$1 - 8r + 16r^2 = 0$

$(4r - 1)^2 = 0$

$r = \frac{1}{4}$

$3 - 3tg^2 x = 8 \sin^2 x$

$3 - \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} = 8 \sin^2 x$

$\frac{3(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x} = 8 - 8\cos^2 x$

$6\cos^2 x - 3 = 8\cos^2 x - 8\cos^4 x$

$8t^2 - 2t - 3 = 0$

$D = 4 + 96 = 100$

$t = \frac{2 \pm 10}{8} = 1$

108
117
126
135
144

ЧЕРНОВИК

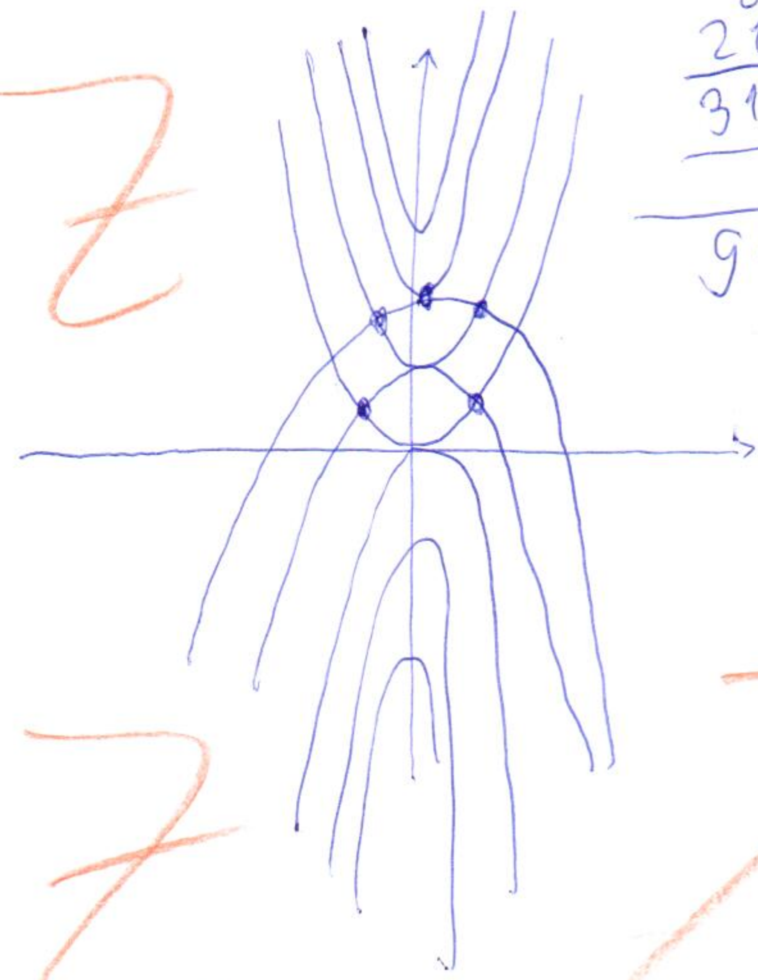
169
13

~~567~~
~~169~~

162 : 9 = 18
243
324
405
486
567
648
729
810
891
972

810
891
1701

169
13
507
169
2197
144
8788
8788
2197
316368
3
949104



ЧЕРНОВИК

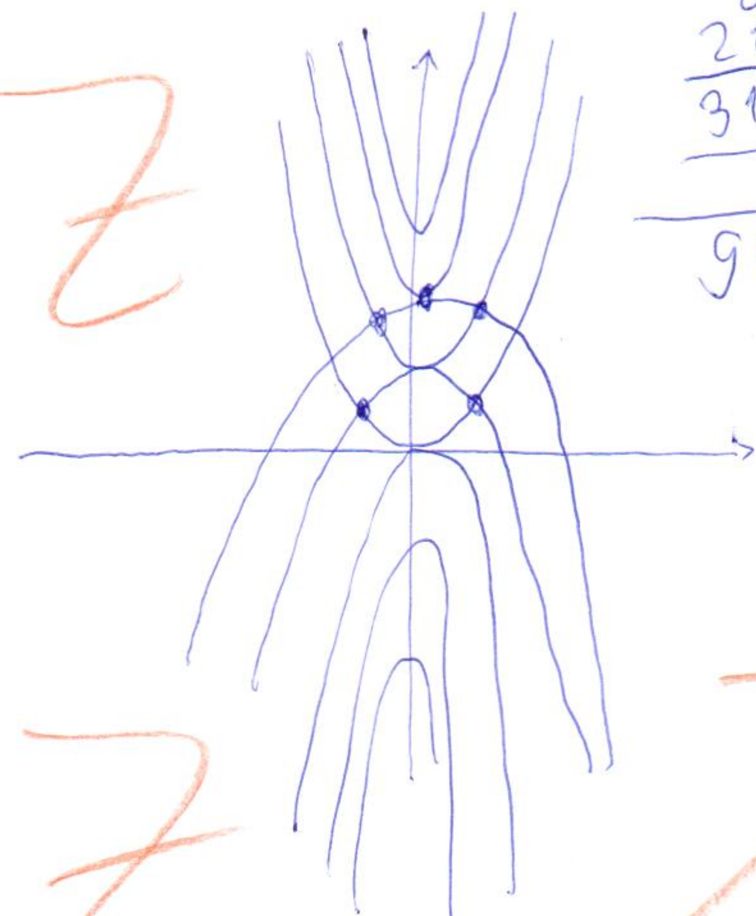
108
117
126
135
144

162 : 9 = 18
243
324
405
486
567
648
729
810
891
972

810
891
1701

169
13
~~567~~
~~169~~

169
13
507
169
2197
144
8788
8788
2197
31636 8
3
949104



Чистовик

№1

$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x$

$3(1-tg^2x) = 8\sin^2x$

$3-3tg^2x = 8(1-\cos^2x$

$\frac{3\cos^2x-3\sin^2x}{\cos^2x} = 8-8\cos^2x$

$6\cos^2x-3 = 8\cos^2x-8\cos^4x$

$\cos^2x = t \in [0;1]$

$8t^2-2t-3=0$

$D = 4+4\cdot3\cdot8 = 100$

$t = \frac{2\pm10}{2\cdot8} = \frac{3}{4}; -\frac{1}{2}$

$t=-\frac{1}{2}$ не удовл усл $t\in[0;1]$

$t=\frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x\in[0;\frac{\pi}{4}+2\pi k]\cup[\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\pi+2\pi k] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k$

ОДЗ:

$1-tg^2x \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow tg^2x\in[-1;1]$ $\Rightarrow$

$\sin x \geq 0$

~~$x\in[\frac{\pi}{4}+2\pi$~~

$x\in[0;\frac{\pi}{4}+2\pi k]\cup[\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\pi+2\pi k]$

№2

$\exists$ число, удовл. усл. $- n$, а его сумма цифр $- S$

$n = 9kS$, $k\in \mathbb{N} \Rightarrow n \underset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow$ по признаку делимости на 9

$S \underset{9}{\equiv} 0$. Тогда $\exists S = 9m, m\in\mathbb{N} \Rightarrow n = 81\underbrace{km}_{=x} = 81x, x\in\mathbb{N}$

Тогда могут подходить только ~~все 3х~~ трехзначные числа, кратные 81, а именно:

~~162~~ Чистовик №2 (продолжение)

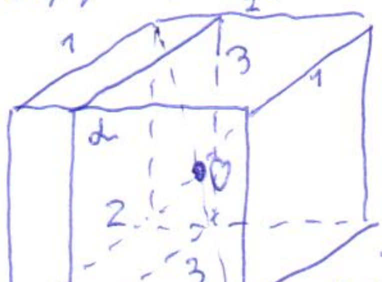
162 : (1+6+2) = 18
243 : (2+4+3) = 27
324 : (2+4+3) = 36
405 : (4+0+5) = 45
486 : (4+8+6) = 27
567 : (5+6+7) = 31,5 – не удовл усл —
648 : (6+4+8) = 36
729 : (7+2+9) = 40,5 – не удовл усл —
810 : (8+1+0) = 90
891 : (8+9+1) = ~~48,5~~ 49,5 – не удовл усл —
972 : (9+7+2) = 54

Искомая сумма: 324 + 486 + 810 = 810+810=~~1620~~
1620

Ответ: 1620, подходящие числа: 162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972

№3

Заметим, что по условию все вершины треугольников будут находиться внутри куба, ребра которого параллельны осям координат, центр которого лежит в начале координат и сторона которого равна 12



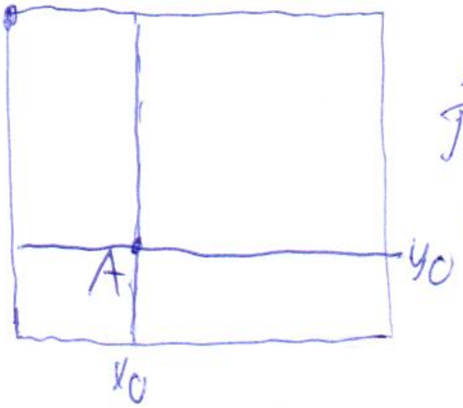
По усл все координаты целочисленные, а также катеты прям. Δ параллельны ребрам куба ⇒ Δ лежат в сечениях квадрата, ∥ одной из его пар граней, и проходящих своими вершинами ч/з целочисленные координаты (включая грани)

Всего таких сечений будут (12+1) · 3 = 39
сторона куба; пары противоположн. сеч

Рассмотрим одно из таких сечений α

Чистовик

№3 (продолжение) вершина Δ



Рассмотрим произвольную (·)A, лежащую в целочисл. коорд. $(x_0; y_0)$. Тогда, ~~т.~~ (·)B может лежать только на прямой $x = x_0$, а (·)C – на $y = y_0$

Потом обрезаем, всего вариантов таких 4-ков:

$$\underset{(\cdot)A}{13^2} \cdot \underset{(\cdot)B}{12} \cdot \underset{(\cdot)C}{12} = \underline{13^2 \cdot 12^2}$$

Обратим внимание, что ~~в~~ ~~х~~ кол-во вариантов для (·)B и (·)C не меняется в случае, если A ∈ ребрам квадрата

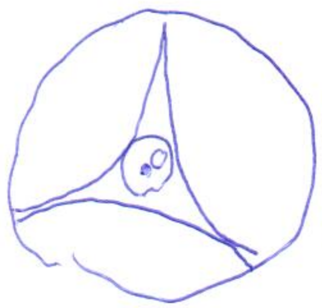
Итого ТАКИХ ст Δ:

$$13 \cdot 3 \cdot 13^2 \cdot 12^2 = \underline{13^3 \cdot 12^2 \cdot 3} = 949104$$

Ответ: 949104

Чистовик

№ 5



$R = 1$

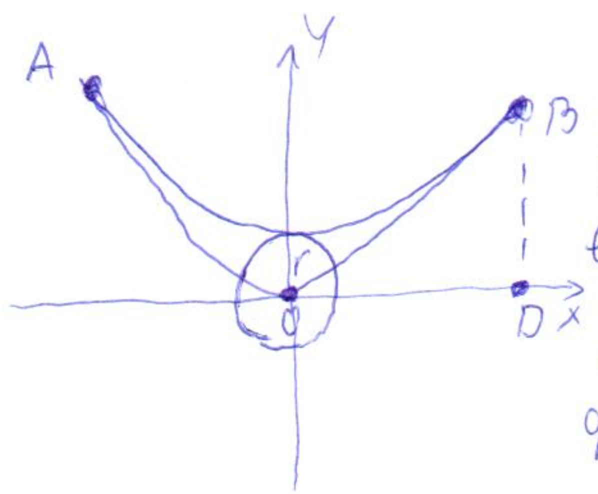
парабола cx^2

$r - ?$

По усл., параболы касаются =>

=> проведем кас. Из симметрии, она пройдет ч/з (·) O

Рассмотрим одну из парабол



т. кас $\in$ опис. окр =>

=> $AO = BO = 1$

Введем ось координат с ц. в (·) O

Тогда парабола задается функцией $f(x) = cx^2 + r$

Из симметрии изначального рисунка $\angle AOB = \frac{360°}{3} =$

$= 120°$ =>

Д.П.: BD - перп из (·) B на OX:

$\angle BOD = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$, $OB = 1$, $\triangle OBD$ - прям $\Rightarrow$ $BD = OB \cdot \sin 30 = \frac{1}{2}$, $OD = OB \cdot \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Тогда $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{4}c + r = \frac{1}{2} \Rightarrow 3c + 4r = 2$

прямая OB проходит ч/з $(0;0)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Чистовик $\quad$ № 5 (продолжение)

] (прямая) ОВ задается ур-ем $g(x) = kx+b$

$g(0)=0 \Rightarrow b=0$

$g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{k=\frac{1}{\sqrt{3}}}$

ОВ кас парабол

$\Downarrow$

$f(x)=g(x)$ - один к.

$cx^2+r=\frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow cx^2-\frac{x}{\sqrt{3}}+r=0$

$D=\frac{1}{3}-4cr=0$

$\Downarrow$

$12cr=1$

$\begin{cases} 3c+4r=2 \\ 3c\cdot 4r=1 \end{cases} \Rightarrow (2-4r)\cdot 4r=1$

$16r^2-8r+1=0$

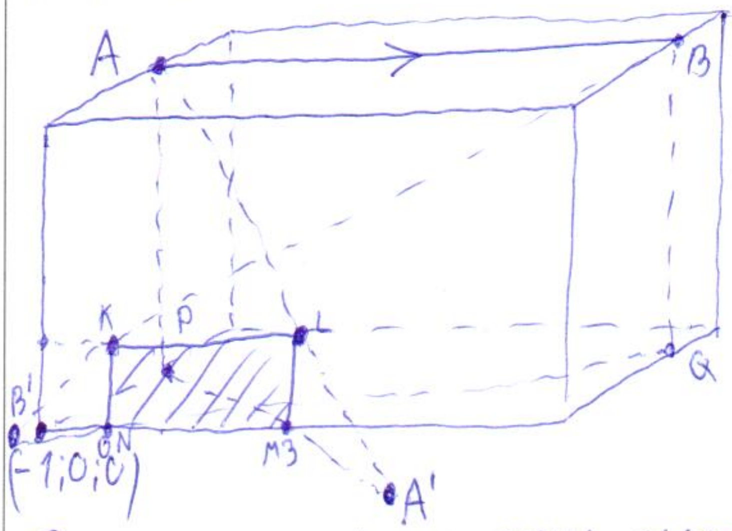
$(4r-1)^2=0 \Rightarrow r=\frac{1}{4}$

Ответ: $r=\frac{1}{4}$

Чистовик

Введем систему координат №6
прям.
Нарисуем параллелепипед с вершинами в (·):

$(-1;0;0)$; $(-1;0;6)$; $(7;0;6)$; $(7;0;0)$
$(-1;5;0)$; $(-1;5;6)$; $(7;5;6)$; $(7;5;0)$



Введем в эту систему координат траекторию светлячка (z=6) и забор (z=2)

Заметим, что тень ~~исходящая~~ по правую сторону забора уменьшается по мере перемещения светлячка, а по левую сторону увеличивается.

~~Найдем подходящий "угол" тени фигуры~~

Найдем координаты „углов" тени:

$\triangle APA' \sim \triangle LMA'$

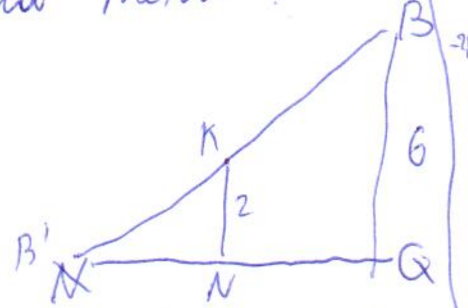
$\Downarrow$

$k=3$

$\Downarrow$

$PM = 2MA'$

$\Downarrow$



$\triangle BQB' \sim \triangle KNB'$

$\Downarrow$

$k=3$

$\Downarrow$

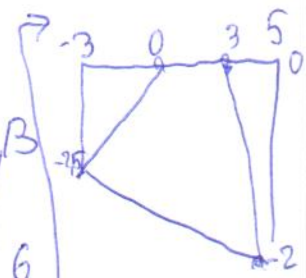
$QN = 2NB'$

$\Downarrow$

проекции на оси отн. соответственно

$\Downarrow$

$A'(5;-2;0)$ $\quad$ $B'(-3;-2,5;0)$



$S = \frac{8\cdot4,5}{2} - \frac{3\cdot2,5}{2} - \frac{7\cdot2}{2} = \frac{72}{4} - \frac{15}{4} - \frac{8}{4} = \frac{49}{4} = 12,25$

Ответ: 12,25

ЧЕРНОВИК

$3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

ОДЗ: $a>0;\ a\neq 1$
$x>0;\ x\neq 1$

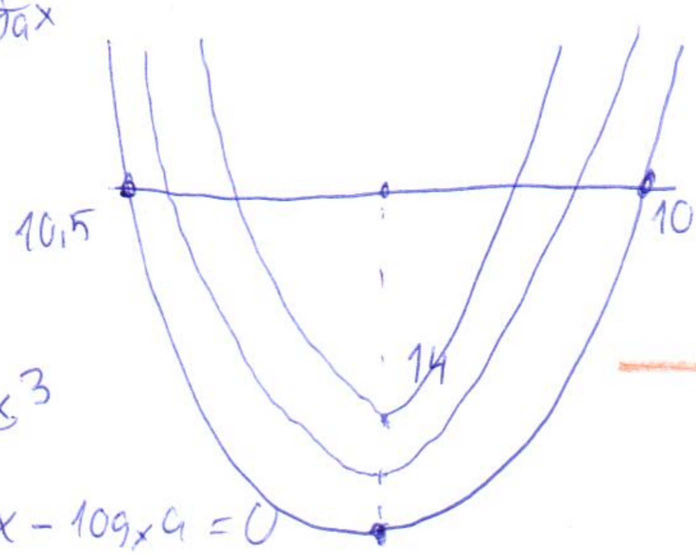
$\cancel{3x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x}}$

$\rceil a > x$

$\cancel{x>}$

$3\cancel{x^2}.$

$\cancel{D = 1+24x^3}$



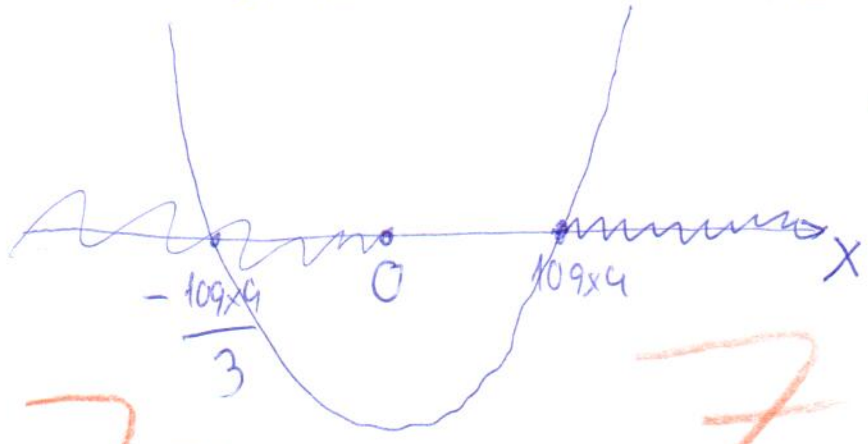
$3x^2\log_a x - 2x - \log_x a = 0$

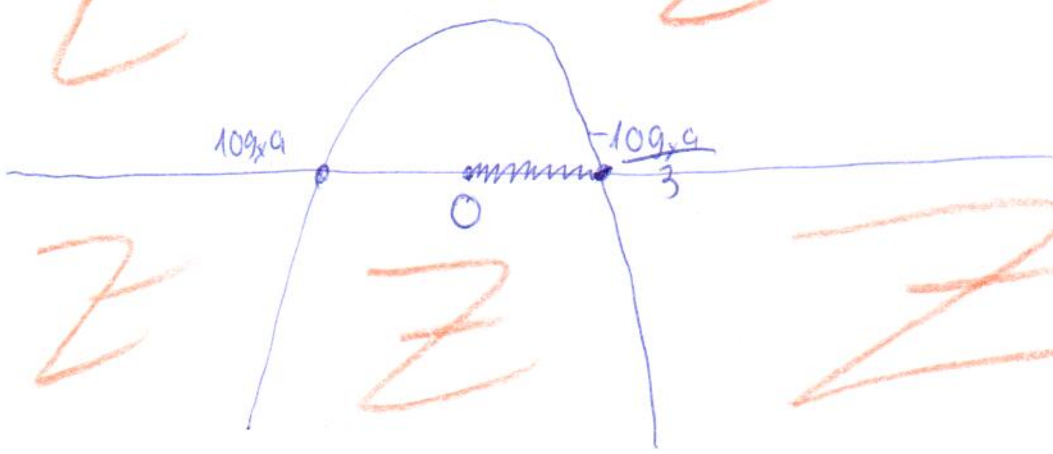
$D = 4+12 = 16$

$2x^2$

$2\cdot 10{,}5^2 > 200$

$x = \dfrac{2\pm 4}{6\log_a x} = \log_x a;\ -\dfrac{\log_x a}{3}$



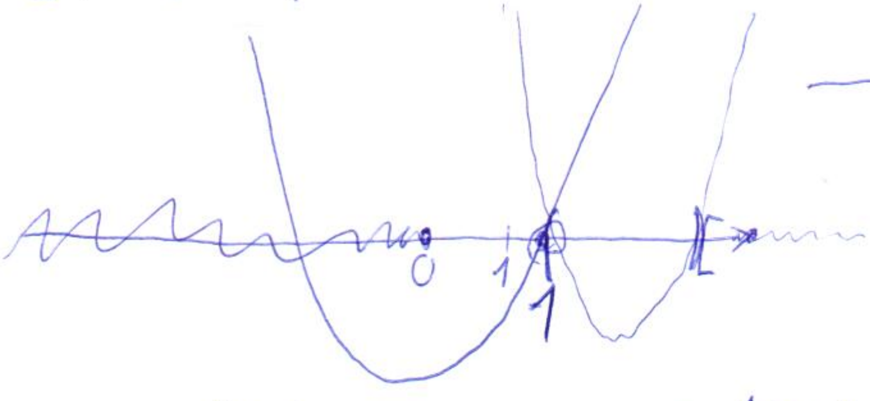


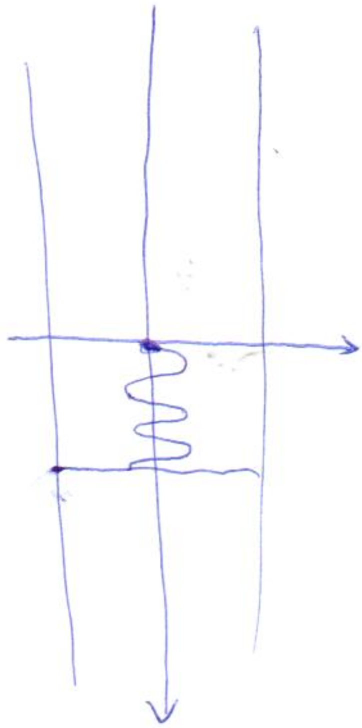
Черновик:

$\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$

$x = \log_x a$; $-\dfrac{\log_x a}{3}$

$\exists\ (a-1)|x-1| > 0$





$x = -\dfrac{\log_x a}{3}$

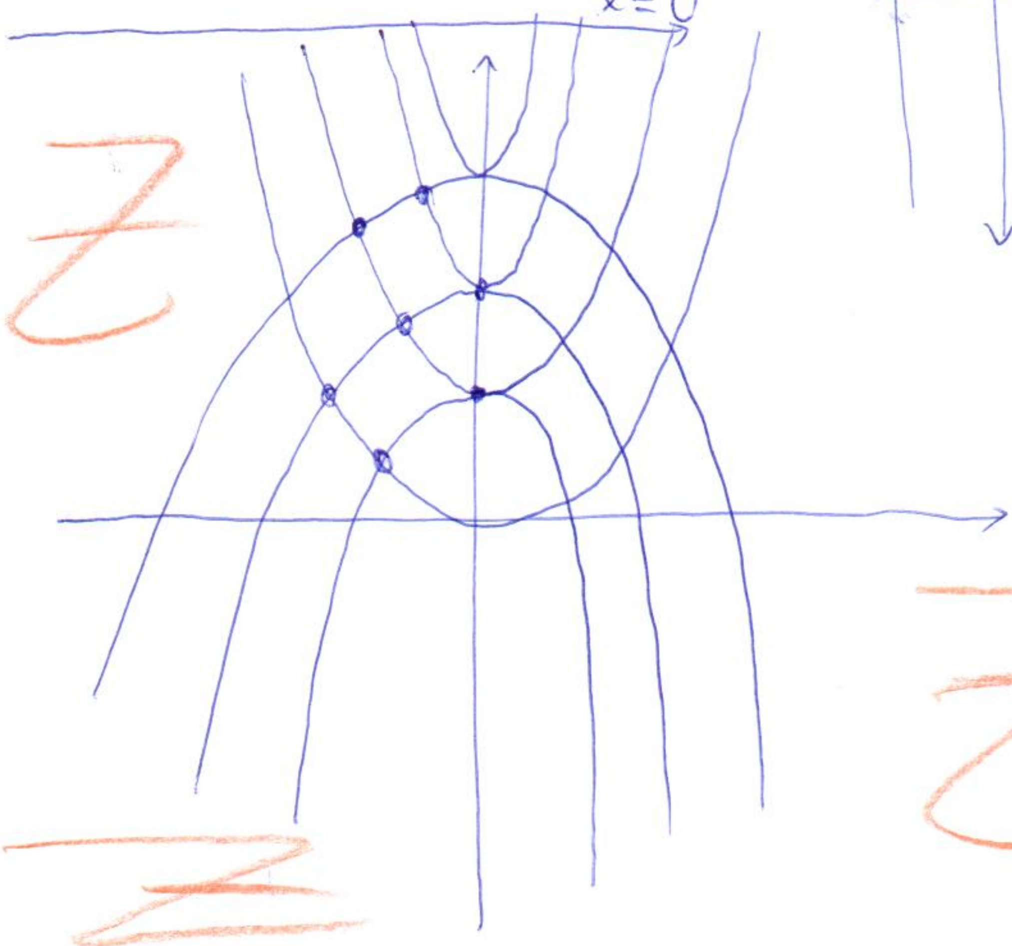
$3x = -\log x^a$

$x = \log_x a$

$x^x = x^{\log_x a}$

$a = x^x$

$x = 0$



$y = 11\pi x$

$y = 13\pi x$

$y = 17\pi x$

Чистовик

№8

Огр: $a; x > 0; \neq 1$

$3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

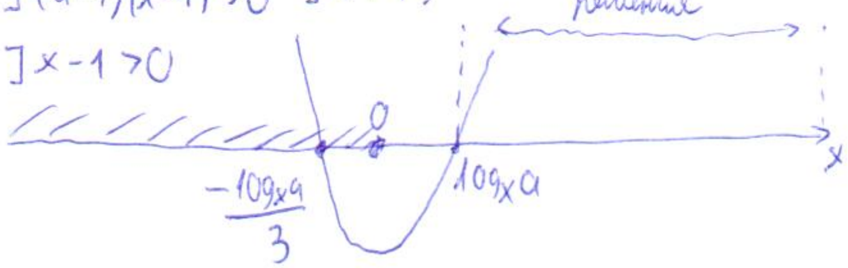
$3x^2\cdot\log_a x - 2x - \log_x a \geq 0$ - кв. ур. отн x

$D = 4 + \log_a x \cdot \log_x a \cdot 12 = 16$

$x = \frac{2\pm 4}{2\cdot 3\log_a x} = \log_x a; -\frac{\log_x a}{3}$

~~Пусть $(a-1)(x-1)>0$~~ Пусть $a>1$;

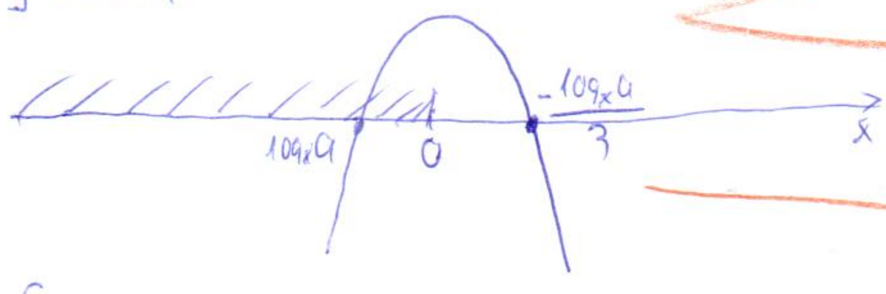
Пусть $x-1>0$



Если $a>x$, то $\log_x a > 1 \Rightarrow x \in [\log_x a; \infty)$ - не подходит

Если $a<x$, то $\log_x a < 1 \Rightarrow x \in$ ~~$[\log_x a; 1) \cup$~~ $(1;\infty)$ - не подходит

Пусть $x<1$

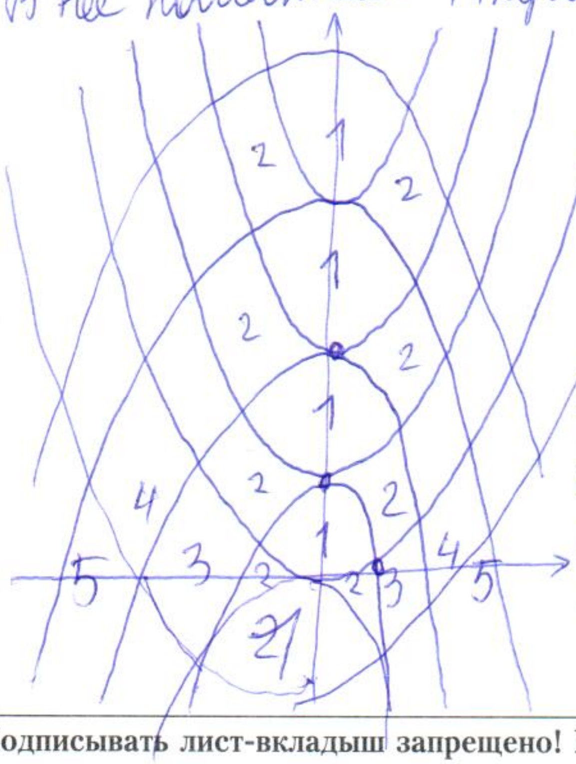


Если $a>x$

Чистовик

№7

В силу симметрии будем рассматривать только верхнюю половину тетради. В нее помещается 14 парабол ветвями вверх

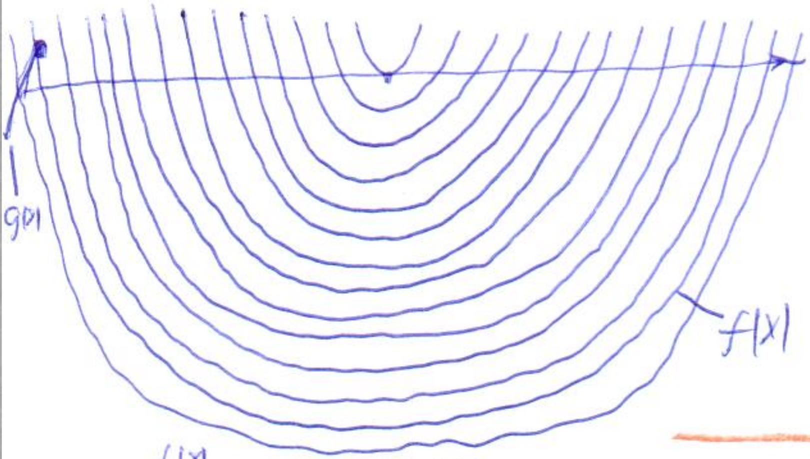


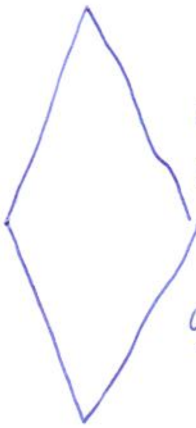
Заметим, что из симметрии у нас получаются одинаковые фигуры, но на разной высоте. Кол-во таких фигур ограничивается числом парабол ветвями вниз, пересекающими ось абсцисс

Чистовик

№7 (продолжение)

Рассмотрим фигуры, заключенные между параболами. посмотрим на их вершины





У каждой такой фигуры д-ли ⊥

$\Downarrow$

$S=\frac{d_1 d_2}{2}$

$$\underset{f(x)}{2x^2-(n-1)}=\underset{g(x)}{-2x^2+n}$$

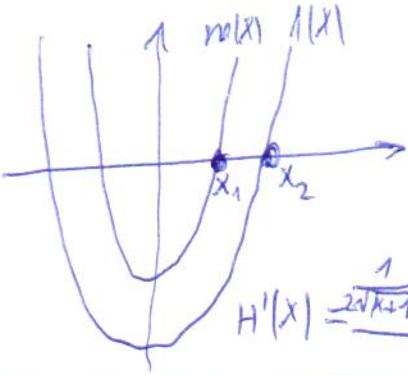
$$4x^2=2n+1$$

$$\Rightarrow 2x^2=n+\frac{1}{2}$$

$2x^2-n-1=n+\frac{1}{2}-n-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow$ все точки пересечения ~~прямых~~ пересекаются на $S=\frac{1}{2}$ от $Ox \Rightarrow$ ~~высота так~~ одна из диагоналей $=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ площадь фигуры зависит от расстояния между соседними параболами

$\exists$ есть параболы $y=2x^2-k=m(x)$ $\quad m(x_1)=0$

$y=2x^2-k-1=l(x)$ $\quad l(x_2)=0$



$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1^2-k=0 \\ 2x_2^2-k-1=0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_2-x_1}_{H(x)}=\sqrt{\frac{k+1}{2}}-\sqrt{\frac{k}{2}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{2}$$

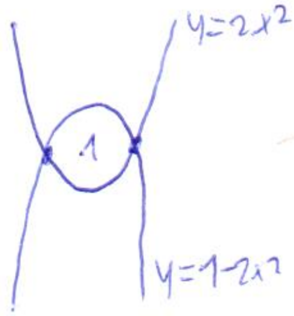
$$H'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{k+1}}-\frac{1}{2\sqrt{k}}}{2}<0 \Rightarrow H\downarrow \Rightarrow$$ самая большая или 1 с пар. 1 или 3 с пар 1

88-03-67-59
(129.2)

Чистовик

№ 7 (продолжение)

S_1:



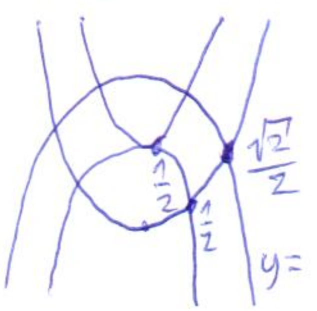
$2x^2 = 1 - 2x^2$

$4x^2 = 1$

$x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{1\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}$

~~S3~~

S_2:



$2x^2 = 2 - 2x^2$

$x^2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

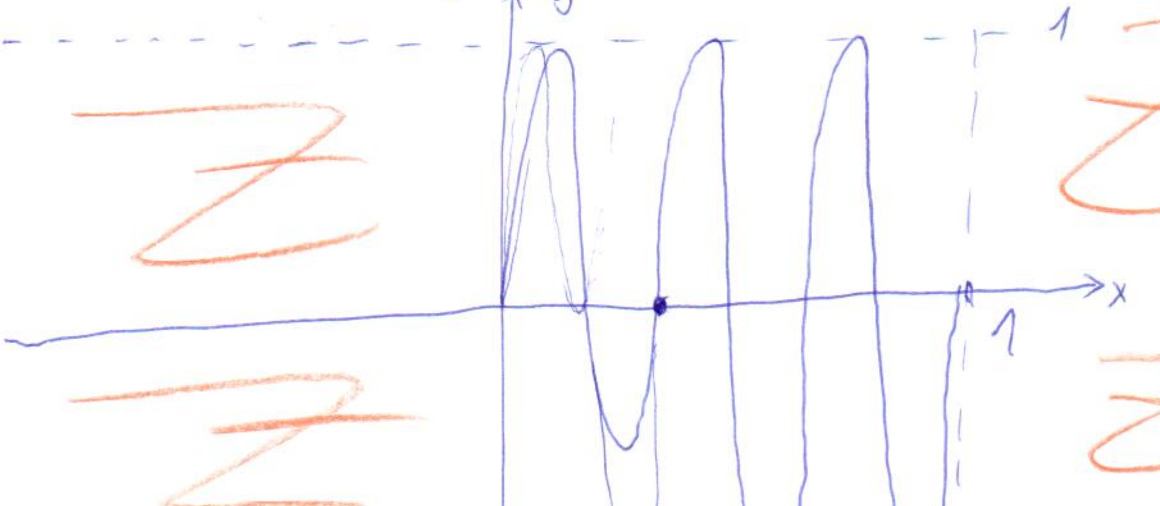
$S = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot 1}{2} < \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

Наибольшая площадь $= \frac{1}{2}$

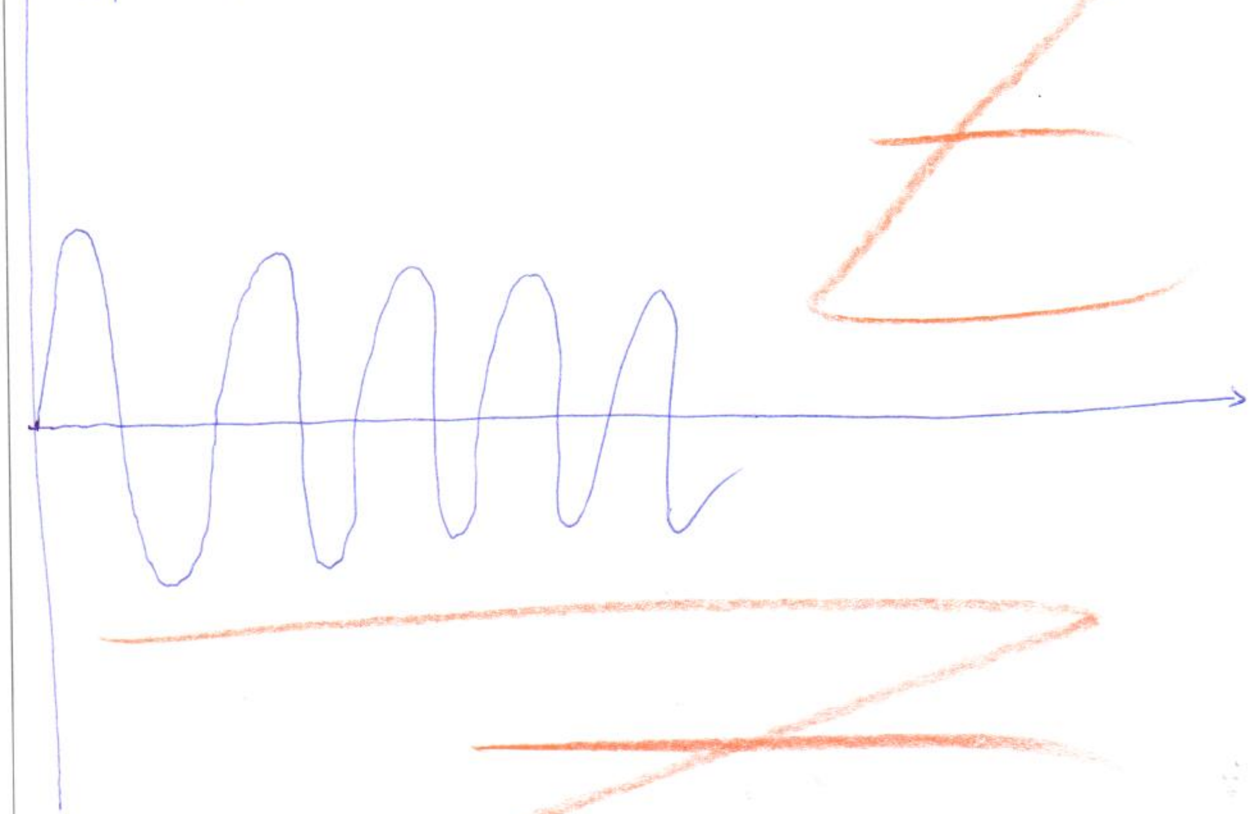
Ответ: $S = \frac{1}{2}$

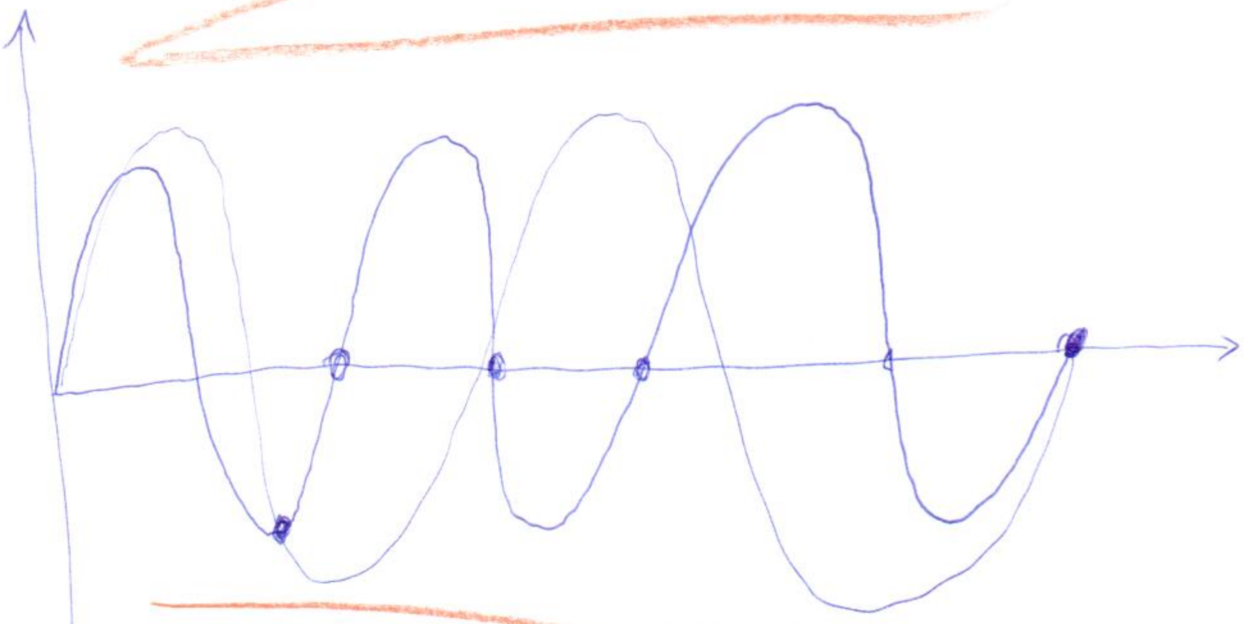
№ 4



ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

черновик



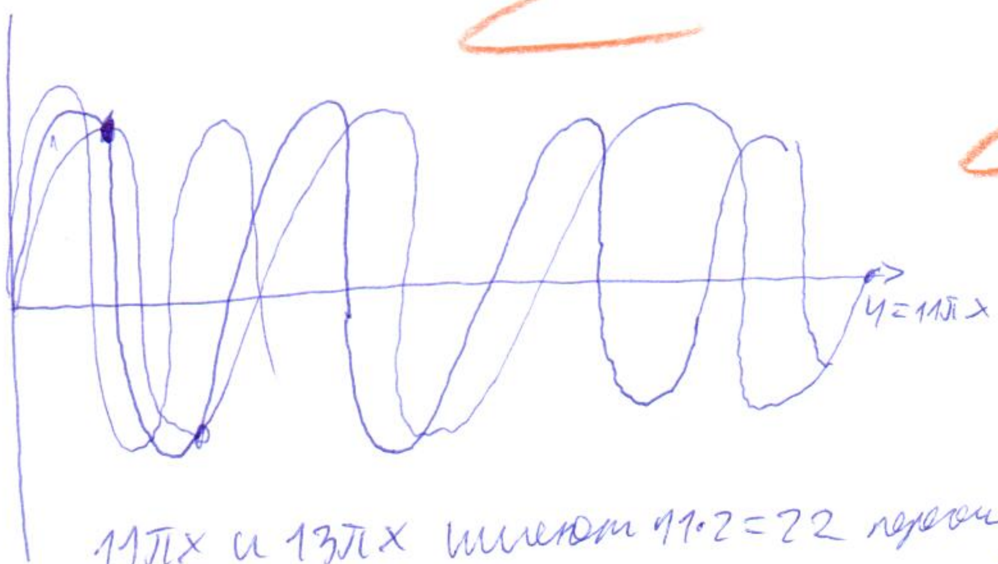


Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик

№4

Заметим, что на каждом периоде $y = 11\pi x$; $13\pi x$; $17\pi x$ попарнопересекаются единожды, т.к $11; 13; 17$ – взаимнопростые числа



$11\pi x$ и $13\pi x$ имеют $11\cdot 2 = 22$ пересеч

$11\pi x$ и $17\pi x$ – $11\cdot 2 = 22$ пересеч

$13\pi x$ и $17\pi x$ – $13\cdot 2 = 26$ пересек

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Итого 70 пересечений + начальная точка