0 557684 760008

55-76-84-76
(124.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Тихомирова Тимофея Олеговича

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

 100 (сто) Абдурасвасв среш

55-76-84-76 (124.6)

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

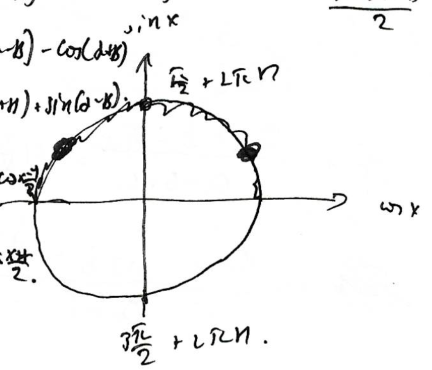
$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$

$\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}$



$\sqrt{6(1-tg^2 x)} = 4\sin x.$

$\sin x \geq 0.$

$6(1-tg^2 x) = 16\sin^2 x.$

$6\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = 16\sin^2 x.$

$6(\cos^2 x - \sin^2 x) = 16\sin^2 x\cos^2 x.$

$2\sin x\cos x = \sin 2x.$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$

$6\cos 2x = 4\sin^2 2x.$

$6\cos 2x = 4 - 4\cos^2 2x \quad |:2.$

$2\cos^2 2x + 3\cos 2x - \cancel{4}2 = 0.$

$\cos 2x = -1 \leq t \leq 1$

$D = 9 + 4\cdot2\cdot2 = 5^2.$

$t = \frac{-3 \pm \cancel{\sqrt{25}}5}{4}$

$t = \frac{-3-5}{4} = \cancel{2}\ \varnothing$

$t = \frac{-3+5}{2} = +\frac{1}{2}$

$\cos 2x = +\frac{1}{2}$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n.$

Отв: $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Чистовик

$\overline{abc} : (a+b+c) : 9.$

$102 | \frac{3}{34}$ $10\cancel{5}|\frac{3}{35}$ $106.$

$\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+c}.$

$\frac{99a+9b}{a+b+c} \vdots 8$

$\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 9t, t \in N$

$100a + 10b + c = 9at + 9bt + 9ct.$

$a(100-9t) + b(10-9t) + c(1-9t) = 0.$

$115|\frac{3}{1}$ $109|\frac{10}{}$ $112|\frac{10}{1}$ $118|\frac{10}{}$ $121|\frac{4}{}$

Черновик.

162. 243

$\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 9t.$

$\cancel{8} + \frac{91a+b-8c}{a+b+c} = 9(t-1)$

$\frac{100a+10b+c}{a+b+c} \equiv 0$

$\cancel{36} + \frac{45a-35b-44c}{a+b+c} = 9(t-5).$

сумма чисел $\vdots$ 81. ?

117 | 9 — 13. − 9, 27

999 | 9 — 111

~~сумма числа кратное~~

9 - делитель, сумма цифр - делитель.

$[100/9] = 12.$

$27 \cdot 4 = 108$ | 9 — 12; − 9, 18, − 18, 0.

3. ≤ сумма цифр ≤ 27.

~~27·9 = 218~~

999 | 27 — 37.

$27 \cdot 5 = 135$ | 9 — 15; − 9, 45

Число делится на сумму своих цифр и на 9.

162 | 9 — 18; − 9, 72

$81 \cdot 3 = 243.$

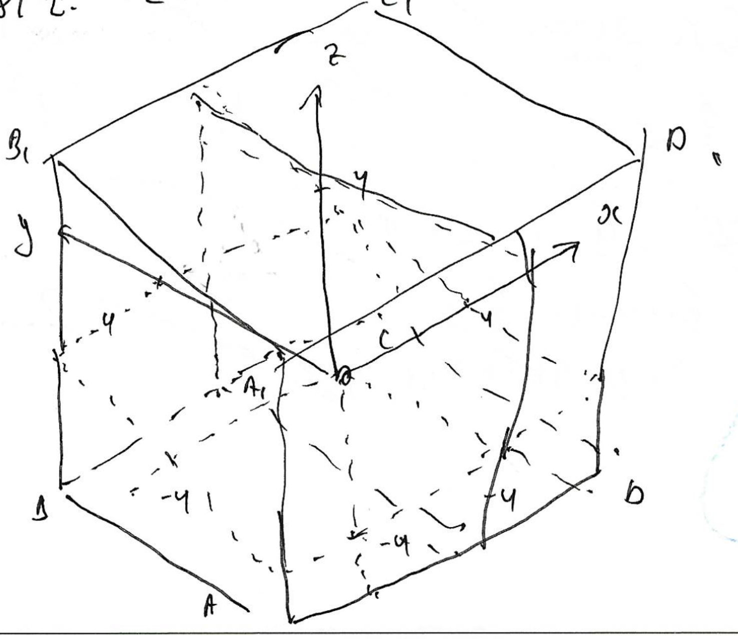
243 | 9 — 27; − 18, 63

$\times$ 81, 12, 162, + 81, 972

числа, сумма цифр которых кратна 9 ~~или~~ и кратные 81

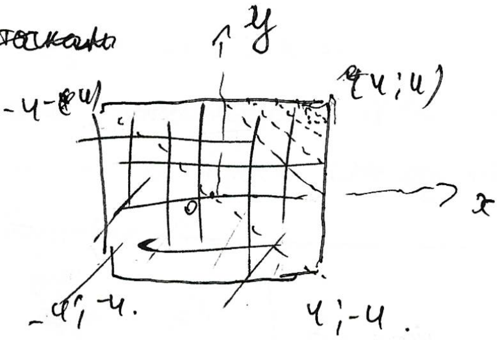
уд - ют.

A: $81t.$ $2 \le t \le 12.$ $S = 2 \cdot 81 + 5 \cdot 81 + 11 \cdot 81.$



№3. ~~закрашенные~~ точки располагаются внутри куба $a=4$.

~~от точками~~



пусть C - прямой угол, ~~A и~~ ~~точка OF~~.

~~Начнем с р/б тр-ков.~~

~~C (4;4) лежащих в (xy) таких 8. Умножим на 4 :л.~~

(-4;-4) -4;4 4;-4.

для тр-ка с т. C лежат. в (xy_0) ~~3.8 - все р/б~~.

для каждой из 64 точек сущ. 8 катетов парал-Ox и 8 катетов парал. OY. для каждого из катетов $(C;x_0)$ есть 8 возможных тр-в. и для каждого из катетов $(C;y_0)$ есть 8 тр-в

$C_9^2 \cdot C_9^2 \cdot 64 = \left(\frac{9\cdot 8\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 2}\cdot 64\right) \Rightarrow$ [illegible] $= 139968$

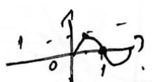
~~для (4;4):~~

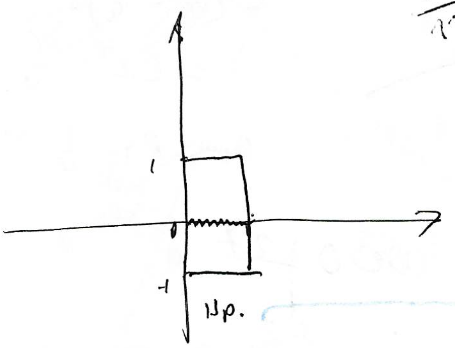
36
×36
216
108
1296

№4.

sin x:

sin πx:





период: 2π.

sin 13πx: период: $\frac{2}{13}$.

$\sin 13\pi x = \sin 17\pi x$.

$\sin 13\pi x - \sin 17\pi x =$

$-2\sin 15\pi x \cdot \cos 4\pi x$.

$15\pi x = \pi n$

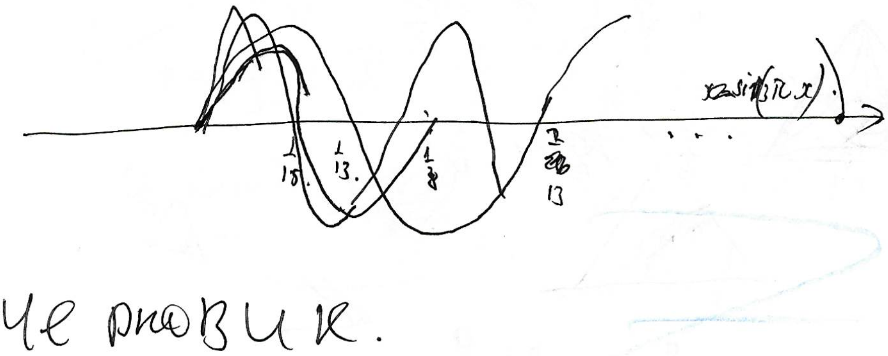
$x = \frac{n}{15}$. $\cos 4\pi x = \frac{\pi}{2} n$.

$x = \frac{n}{8}$.

$\sin(13\pi x) = 0$

$13\pi x = \pi n$.

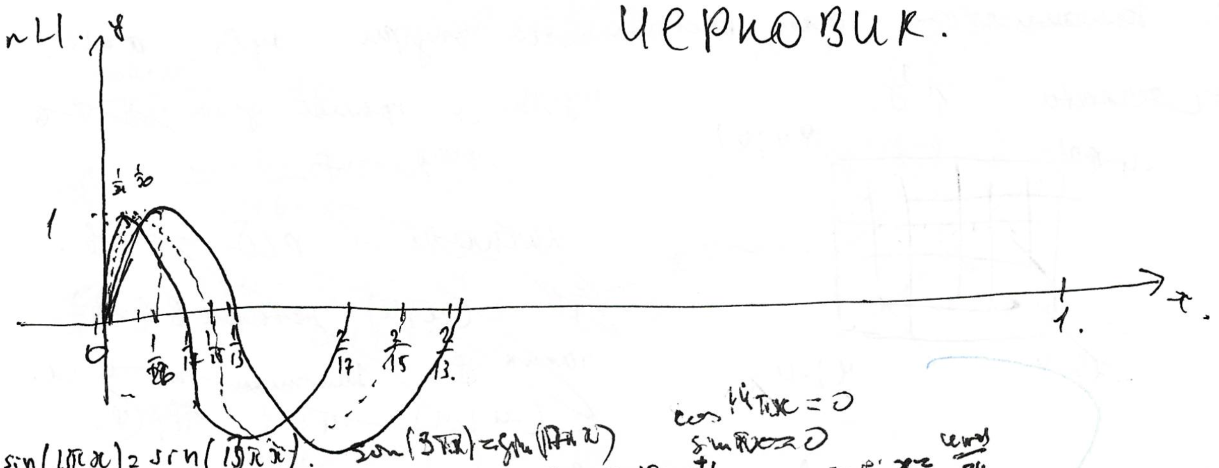
$x = \frac{n}{13}$.



Черновик.

Черновик.

№41.



$\sin(13\pi x) = \sin(15\pi x)$. $\sin(13\pi x) = \sin(17\pi x)$

$\cos 14\pi x = 0$

$\sin \pi x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 14\pi x = 0$. или $\cos \pi x = 0$. $\Leftrightarrow$ $\sin \pi x = \pm 1$.

$x = \frac{2n+1}{28}$. $n \in \mathbb{N}$. $x = \frac{2n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{4n+1}{30}$ (15) $x = \frac{4n+1}{26}$ (13) $x = \frac{4n+1}{34}$ (17)

график $y = \sin(13\pi x)$ и $y = \sin(15\pi x)$ пересекутся 14 раз

$y = \sin(13\pi x)$: $y(\frac{1}{13}) = 0$. $y(\frac{1}{26}) = 1$ и т.д.

~~15·7 = 105~~

Ответ: 93

$y = Cx^2 + d$.

$0 = C \cdot \frac{1}{2} + d$.

$C = -2d$.

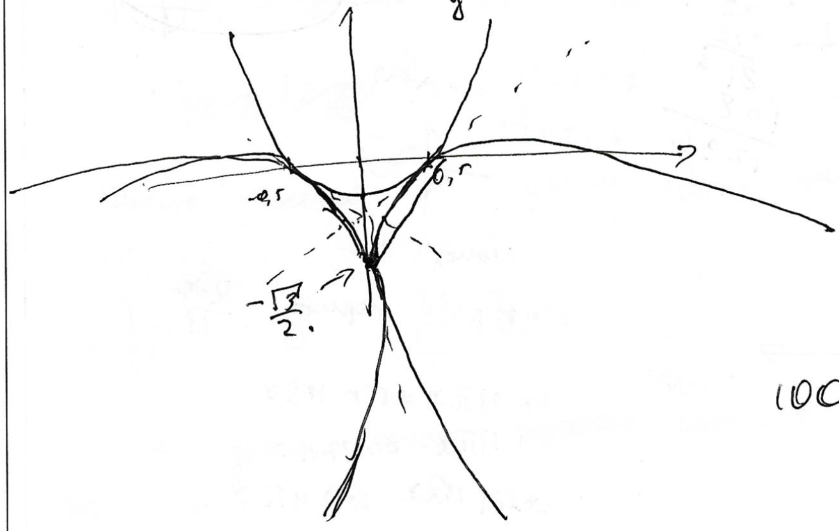
$Cx^2 + d =$

$= C(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) =$

$= C(x^2 - \frac{1}{4}) =$

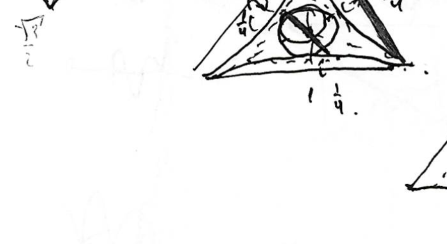
$= Cx^2 - \frac{C}{4}$.

верш. в т. $-\frac{1}{4}$.



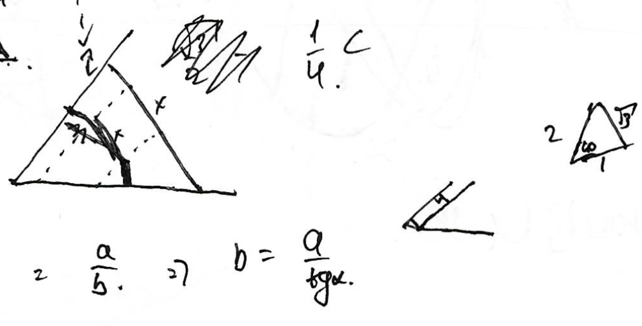
$1000 \mid 27$

Окр-ть касается парабол с одинак. уравн. $\Rightarrow$ кас. вершин. парабол.



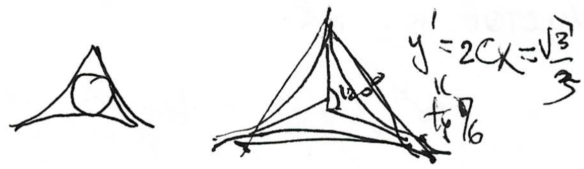
$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}$. $\frac{2\sqrt{3} - 1}{4}$.

$\frac{1}{4} C$



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\Rightarrow$ $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$.

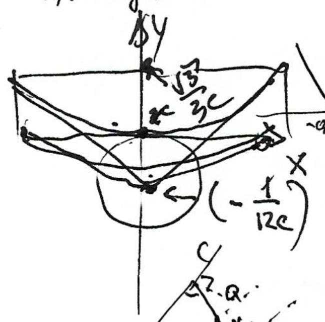
Чистовик. Задача 5:

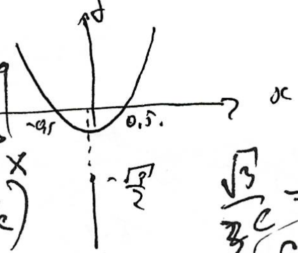


~~это~~ окружность описана около правильного треуг-ка, вершины которого совпадают с вершинами парабол.

1). пусть $C = 1$ тогда парабола задаётся ур-ем

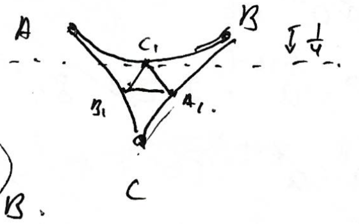
$y = x^2 - \frac{1}{4}$.



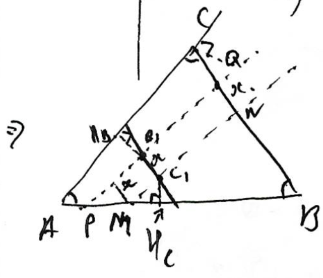


$\frac{\sqrt{3}}{3C} = 1$

$C = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$\Rightarrow$



$B_1C_1 = x$. $C_1B_1 \parallel CB$.

т.к. C_1 вершина параболы, прох ч/з. A и B. –

$C_1H_C = \frac{1}{4} = B_1H_B$.

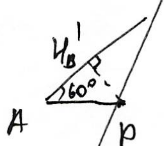
$PQ \parallel AC \parallel MN$. ~~$AP = x$~~. $PM = \frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

по т. фалеса $\frac{AP}{CQ} = \frac{PM}{QN} = \frac{1}{\sin 60^\circ}$. $C_1H_C = \frac{1}{4} \Rightarrow MH_c = \frac{\frac{1}{4}}{tg\,60^\circ} =$

~~$AP = \frac{\frac{1}{4}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow CP =$~~

$= \frac{1}{4\sqrt{3}}$. $H_cB = \frac{1}{2}$.

~~ABz~~



$H_B'P = \frac{1}{4} \Rightarrow AP = \frac{\frac{1}{4}}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$AB = 1 = AP + PM + MH_c + H_cB =$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2} = 1$. $)\cdot 4\sqrt{3}$

$2 + 4x + 1 + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

$4x = 2\sqrt{3} - 3$.

$x = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}$.

$r = \frac{2}{3}x\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{3}\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Ответ: ~~$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$~~ $\rightarrow$ $\boxed{\frac{2-\sqrt{3}}{4\cdot 3}}$

Чистовик. №8.

$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0.$

$\begin{cases} a > 0 \\ x \ne 1 \\ a > 0 \\ a \ne 1. \end{cases}$

$\log_a x = t. \quad x = a^t$

Чистовик

$8a^{2t} \cdot t - \frac{1}{t} - 2a^t \le 0.$

$f(t) = 8a^{2t} \cdot t - \frac{1}{t} - 2a^t$

$f'(t) = 8 \cdot a^{2t-1} \cdot 2t + 8a^{2t} + \frac{1}{t^2} - 2a^{t-1}$

$f'(t) = 8 \cdot a^t \cdot a^{t-1} \cdot 2t + 8a^t \cdot a^t + \frac{1}{t^2} - 2a^{t-1}$

$a^{t-1}(8a^t \cdot 2t + \cancel{8a^t} - 2) + \cancel{8a^{2t}} + \frac{1}{t^2}.$

$2a^{t-1}(4a^t \cdot 2t - 1)$

$\log_a x - 0 =$

$\cancel{2x(4x\log_a x - 1\log_x a)} - \cancel{\log_x a} \le 0.$ $\quad = (a-1)(x-1).$

$\cancel{8x^2(\log_a x}$ $\quad \log_x a = \frac{1}{\log_a x}$

$\begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ a > 0 \\ a \ne 1. \end{cases}$

$\cancel{8x^2}$

$\frac{1}{\log_a x}\left(8x^2 \cdot \log_a^2 x - 2x \cdot \log_a x - 1\right) \le 0.$

$\frac{1}{\log_a x}\left(2 \cdot (2x\log_a x)^2 - (2x\log_a x) - 1\right) \le 0.$

$2x\log_a x = t. \quad 2t^2 - t - 1 = 0.$

$D = 1 + 8 = 9.$

$t = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}.$

$t = 1.$

$\frac{1}{\log_a x}\left(2(2x\log_a x - 1)(2x\log_a x + \frac{1}{2})\right) \le 0.$

$\frac{(2x\log_a x - \frac{1}{2})(2x\log_a x + \frac{1}{2})}{(a-1)(x-1)} \le 0.$

$x\log_a x = 1 \; : \; x^x = a.$

$(x^x - x)(\log a - 1)$

$2x\log_a x = -1 \; : \; a = x^{-2x}.$

~~$x\log_a x = 1$: $x = a^{\frac{1}{x}}$ $a = x^x$~~

$0{,}9^{-0{,}1} = \dfrac{1}{0{,}9^{0{,}1}} = \dfrac{1}{\sqrt[10]{\frac{9}{10}}}$ $\qquad \frac{1}{2}^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$

~~$+ \quad - \quad +$~~

~~$x\log_a x = -\frac{1}{2}$ $(a-1)$ $(x-1)$ $x\log_a x = 1$~~

~~$x\log_a x - \frac{1}{2}$ совп. по знаку с $(x^x - 1)(a-1)$.~~

~~$0 \quad 1 \quad x$~~

~~$\dfrac{(x^x - x)(a-1)(2x\log_a x + 1)}{(a-1)(x-1)} \le 0.$~~

~~$\dfrac{x(x^{x-1} - 1)}{x-1}\left(x\log_a x + \frac{1}{2}\right) \le 0.$~~

~~$x^{x-1} = 1$. $x = 1$~~

~~при $x \in (0;1)$ знак $\dfrac{x(x^{x-1} - 1)}{x-1}$ будет~~ —

~~Заметим, что при $x = a = \frac{1}{2}$. $-1-1 \le 0$.~~

чистовик.

рационализируем

$$\frac{1}{(a-1)(x-1)}\left(2(x\log_a x - 1)(2x\log_a x + \tfrac{1}{2})\right) \le 0.$$

$$\frac{(a-1)(x^{2x} - a)(2x\log_a x + \frac{1}{2})}{(a-1)(x-1)} \le 0.$$

$$\frac{x^{2x} - a}{x-1}\left(\log_a x^{2x} + \log_a \sqrt{a}\right) \le 0.$$

$$\frac{(x^{2x} - a)(a-1)(x^{2x}\sqrt{a} - 1)}{(x-1)} \le 0.$$

при $a > 1$ — два получит.

$$\frac{(x^{2x} - a)(x^{2x} - \frac{1}{\sqrt{a}})}{x-1} \le 0.$$

$- \quad + \quad - \quad +$

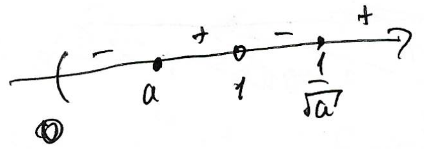
$0 \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \quad 1 \quad a$

~~$x^{2x} = a$. $x =$~~

листовик. №8.

$0<a<1$:

$$\frac{(x^{2x}-a)(x^{2x}-\frac{1}{\sqrt{a}})}{(x-1)} \geq 0.$$



2 полуинтервала.

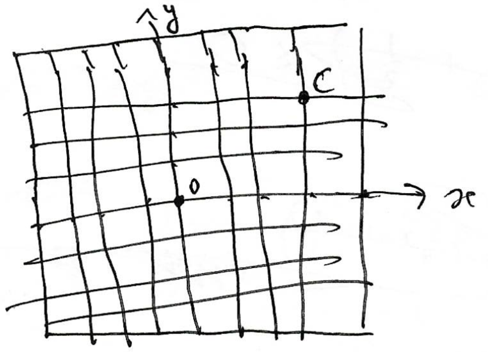
$x^{2x}-a = x^{2x}-\frac{1}{\sqrt{a}}$

$a=\frac{1}{\sqrt{a}}$ $a=\pm 1$. $\notin \begin{cases} a\neq 1 \\ a>0. \end{cases}$

Ответ: $\varnothing$

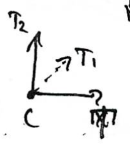
Листовик Задача 3. пусть C - ~~прям~~ прямой угол.

для ~~Z=Z4~~: каждой y координат z $\underbrace{[-4;4]}_{8}$:



для каждой точки C в плоскости xOy сущ. ~~8·8~~ ~~треугольников~~. 8 катетов, $x\in[-4;4]$ ~~$y\in[-4;4]$~~ парал. Ox и 8 катетов, парал. Oy.

для каждого катета сущ. 8+8 других катетов.



Тогда всего $\underset{z\in[-4;4]}{8} \cdot \underset{(64 \text{ точки в } (xOy)}{64} \cdot \big(8\cdot(8+8)+8\cdot(8+8)\big)=$

$16\cdot16\cdot16\cdot4\cdot8 = 2^{17}$. Отв: 2^{17}

~~Задо~~ Чистовик. Задача 2. Заметим что любое трёхзначн. число кратное 81 принадлежит мн-ву.

Число делится на сумму его цифр, если оно кратно 3 ~~81~~. $S(n)$ - сумма цифр. $3 \le S(n) \le 27$

~~Пусть Если число кратно 3, то сумма его цифр кратна 3, но если это число не кратно 9, то~~

$\frac{n}{S(n)} \vdots 9$. ~~Давайте попробуем получить числа, принадл. мн-ву, умножая числа 9, 18, ... $\frac{1000}{9}$~~ $\frac{1000}{9}$

~~для чисел, кратных 3 частное~~

Если число делится на 9, то если $\frac{n}{S(n)} \vdots 9$, то $n \vdots 3 \cdot 9 \vdots 27$, значит числа $\vdots 27$. подходят но не все.

$27 \cdot 4 = 108$ $\quad 108 : 9 = 12$ $\quad 12 \not\vdots 9$. $\quad 27 \cdot 5 = 135$ $\quad 135 : 9 = 15$

~~$27 \times 15 =$~~ ~~$27 \times 16 =$~~ ~~$27 \times 16 = 162 + 270 = 432$~~

Т.к. макс. сумма цифр кратная 9 есть 27 (999) и это число не подходит, то сумма цифр числа должна быть 9 или 18.

S_2 $\quad 3 \cdot 81 + 6 \cdot 81 + 10 \cdot 81 = 19 \cdot 81 = 810 \cdot 2 - 81 = 1539$