0 873301 490005

87-33-01-49
(124.1)

Выход 13:28 - 13:33

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ловтина Александра Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» 03 2026 года

Подпись участника

100 (сто) дни ~~Ильина~~

Чистовик

№1

1) $\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$

2) $\sqrt{3\left(1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)} = 2\sqrt{2}\cos x$

3) $\sqrt{3\left(\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)} = 2\sqrt{2}\cos x$

4) $\begin{cases} 3\left(1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8\cos^2 x \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3\left(1-\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right) = 8\cos^2 x \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3\left(\frac{1-2\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right) = 8\cos^2 x \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{3-6\cos^2 x-8\cos^2 x(1-\cos^2 x)}{1-\cos^2 x} = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \frac{8\cos^4 x-14\cos^2 x+3}{1-\cos^2 x} = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \frac{8\cos^4 x-2\cos^2 x-12\cos^2 x+3}{1-\cos^2 x} = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{2\cos^2 x(4\cos^2 x-1)-3(4\cos^2 x-1)}{1-\cos^2 x} = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{\left(\cos^2 x-\frac{3}{2}\right)\left(\cos^2 x-\frac{1}{4}\right)}{1-\cos^2 x} = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \frac{\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

т.к $|\cos x| \leq 1 \Rightarrow$ решения $\sqrt{\frac{3}{2}}$ и $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ не подходят

13) $\begin{cases} \frac{\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\cos x_1 = \frac{1}{2}$ $\quad \cos x_2 = -\frac{1}{2}$

не подходят, ведь $\cos x \geq 0$

при $\cos x = \frac{1}{2}$ $ctg x$ определен

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$ $k \in Z$

чистовик

№2

$\overline{abc} = 100a + 10b + c \Rightarrow \overline{abc} : (a+b+c) = 9k \Rightarrow$

$100a + 10b + c = 9k(a+b+c) \Rightarrow 99a + 9b = (9k-1)(a+b+c) \Rightarrow$

$9(11a+b) = (9k-1)(a+b+c) \Rightarrow$ левая часть $\vdots 9$ и $9k-1 \not\vdots 9 \Rightarrow a+b+c \vdots 9$

$\Rightarrow$ при делении $100a+10b+c$ на $a+b+c$ $\vdots 9$ частное $- 9k \Rightarrow$

$100a + 10b + c \vdots 81$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 19 \\ \hline 729 \\ 81 \\ \hline 1539 \end{array}$$

	1) $\overline{abc}$	$a+b+c$	$9k$	
$81 \cdot 2$	162	9	18	1
$81 \cdot 3$	243	9	27	2
$81 \cdot 4$	324	9	36	3
$81 \cdot 5$	405	9	45	4
$81 \cdot 6$	486	18	27	5
$81 \cdot 7$	567	18	X	
$81 \cdot 8$	648	18	36	6
$81 \cdot 9$	729	18	X	
$81 \cdot 10$	810	9	90	7
$81 \cdot 11$	891	18	X	
$81 \cdot 12$	972	18	~~36~~ 54	8
$81 \cdot 13$	1053 ← не трехзнач			

$243 + 486 + 810 =$
$81(3+6+10) = 81 \cdot 19 = 1539$

Ответ: 162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972
1539 ← сумма

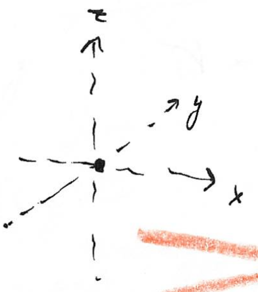
№3

Возьмем любую точку этого множества, это будет вершина треугольника, при которой $90^\circ \Rightarrow$ т.к катеты параллельны осям $\Rightarrow$ две оставшиеся вершины должны лежать на одной прямой,

~~параллельной~~ с ~~началом~~ осью $x/y/z$, с выбранной вершиной.

На любой прямой параллельной оси у нас 11 точек : $[-5;5]$ ⇒ **Чистовик**

так как мы уже заняли одну точку выбранной точкой, то осталось 10. И т.к нам нужен треугольник ⇒ три точки не лежат на 1 прямой.



Значит вариантов выбрать оставшиеся две вершины: $C_3^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 = 300$

выбрать две оси из трех

выбрать точку на осях

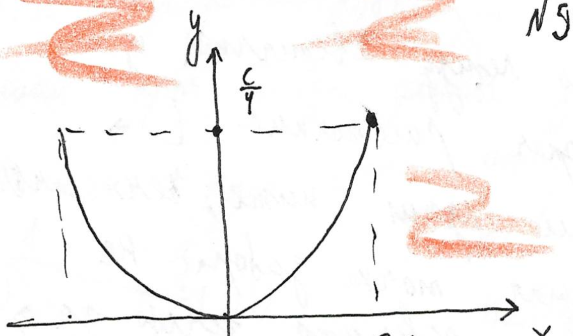
А выбрать изначально вершину: $C^1_{11 \cdot 11 \cdot 11} = 11^3 = 1331$

⇒ все вариантов: $1331 \cdot 300 = 399300$.

(Так как в треугольнике максимум 1 прямой угол ⇒ мы никакие два треугольника не посчитали два раза, ведь мы изначально разделили все прямоугольные треугольники по вершинам, у которых угол $90°$)

$\boxed{\text{Ответ: } 399300}$

№9



Расстояние между вершинами — 1

⇒ это точки параболы с

$x = 0.5 / -0,5$ ⇒

$y = \frac{c}{4}$

Производная $(cx^2)' = 2cx$

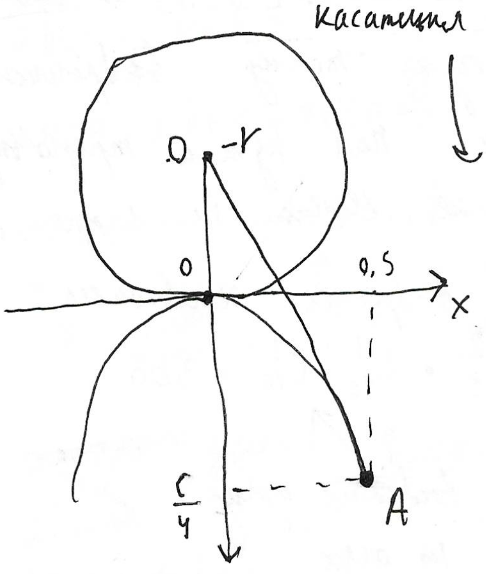
$x = \frac{1}{2}$ $y' = c$

$x = -\frac{1}{2}$ $y' = -c$

Чтобы были нужные углы, касательные к параболе в вершинах должны совпадать картинки

⇒ из-за симметрии касательные должны проходить через центр окружности.

Чисто вик

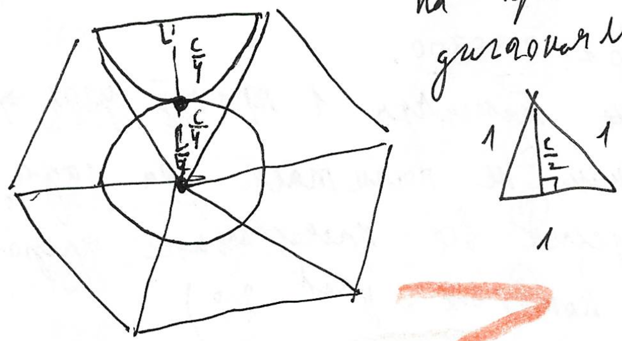


$A\left(0{,}5\ \frac{c}{4}\right)$ $O(0;\,-r) \Rightarrow$

$$c = \frac{\frac{c}{4}-(+r)}{\frac{1}{2}-0} = \frac{\frac{c}{4}+r}{\frac{1}{2}}$$

$$c = \frac{c}{2}+2r \qquad \frac{c}{4}=r$$

Правильный шестиугольник разбивается на правильные ~~углы~~ треугольники диагоналями $\Rightarrow$



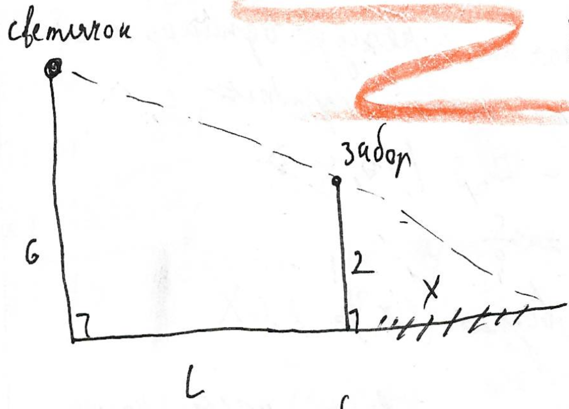
$\frac{c}{2}$ – высота в правильном $\Rightarrow$

$$\frac{c}{2} = \sin 60^\circ \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{c}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\boxed{\text{Ответ: } r = \frac{\sqrt{3}}{4}}$

№6



Пусть между светлячком и забором расстояние $L \Rightarrow$ Все лучи ниже, чем самая высокая точка забора не будут освещать землю за $\Rightarrow$

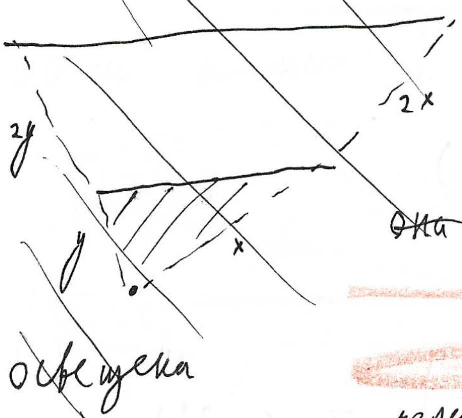
У нас подобные треугольники $\Rightarrow \frac{x}{x+L} = \frac{2}{6} \Rightarrow 3x = x+L$

$x = \frac{L}{2} \Rightarrow$ все точки, лежащие ближе, чем на $\frac{L}{2}$ будут в тени

87-33-01-49 (124.1)

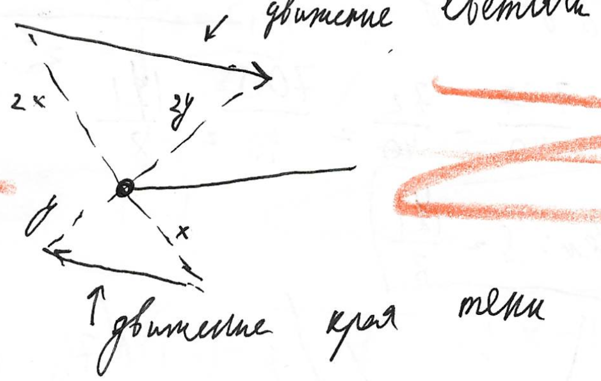
~~Воспользуемся обратимостью лучей: возьмем точку на земле и гомотетично увеличим треугольник (с вершинами в этой точке и двумя концами забора) в 3 раза. Если в получившейся области пролетал светлячок ⇒ она была о выбранная точка была~~

~~Чистовик~~



~~освещена~~

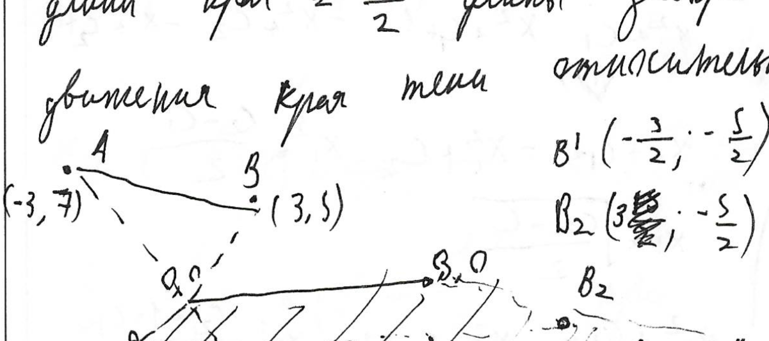
Возьмем точку, через которую пролетел светлячок и гомотетично увеличим треугольник (с вершинами в выбранной точке и двумя краями забора) в $\frac{3}{2}$ раза. ~~Обл~~ Область, лежащая за забором и в треугольнике будет теневой в этот момент.



т.к треуг. подобны ⇒ край тени ∥ забору и длина края = $\frac{3}{2}$ длины забора. Посмотрим на движения края тени относительно левого и правого конца забора

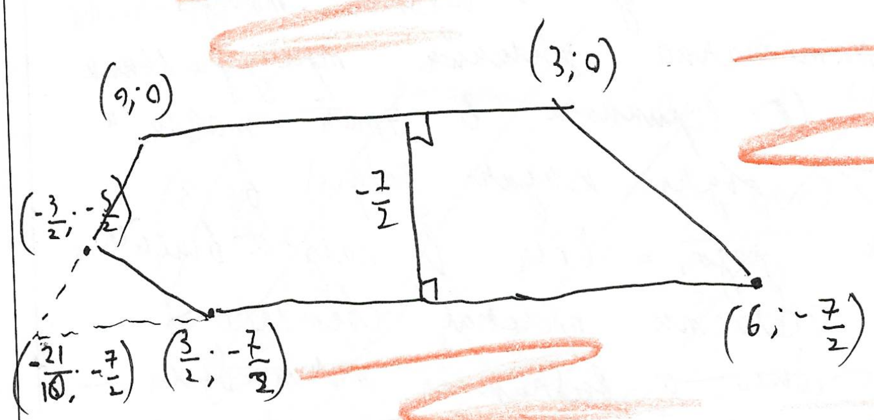
$B'\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ $A'\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

$B_2\left(3, -\frac{5}{2}\right)$ $A_2\left(\frac{21}{2}, -\frac{7}{2}\right)$



Так как нужны точки, которые хотя бы раз были в тени ⇒ это выпуклая оболочка 6 точек:

чистовик



Продлим до трапеции ⇒

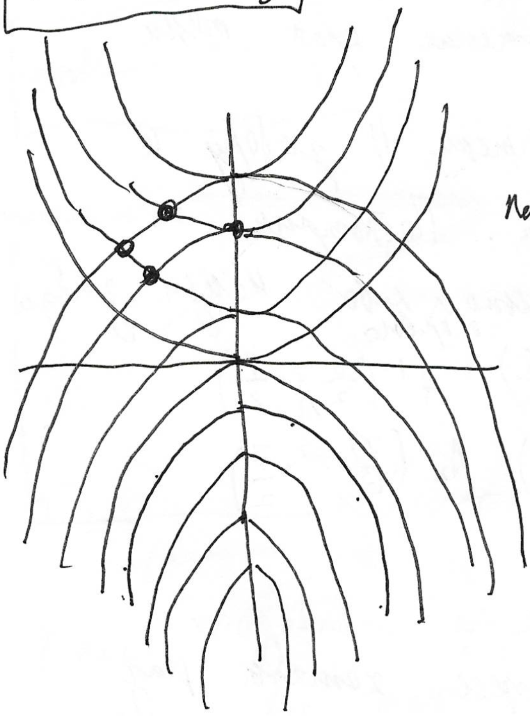
Площадь всей: $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{3+6+\frac{21}{10}}{2}\right)=\frac{7}{4}\cdot\left(9+\frac{21}{10}\right)=$

$\frac{7}{4}\cdot\frac{111}{10}=\frac{777}{40}$

Площадь кусочка: $\frac{\left(\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{21}{10}\right)}{2}=\frac{\frac{15+21}{10}}{2}=\frac{36}{20}=\frac{72}{40}$

$\Rightarrow S=\frac{777}{40}-\frac{72}{40}=\frac{705}{40}=\frac{141}{8}$

$\boxed{\text{Ответ: } S=\frac{141}{8}}$



№7 ↙ иначе будут параболы внутри

На клетки буду разбивать параболы типа:

$x^2+C_1\quad x^2+C_1+1\quad -x^2+C_2\quad -x^2+C_2+1$

$\Downarrow$

$x_1^2+C_1=-x_1^2+C_2\qquad x_1^2=\frac{C_2-C_1}{2}$

$x_1=\sqrt{\frac{C_2-C_1}{2}}$

$x_2^2+C_1=-x_2^2+C_2+1\qquad x_2^2=\frac{C_2+1-C_1}{2}$

$x_2=\sqrt{\frac{C_2+1-C_1}{2}}$

$x_3^2+C_1+1=-x_3^2+C_2\qquad x_3^2=\frac{C_2-C_1-1}{2}\qquad x_3=\sqrt{\frac{C_2-C_1-1}{2}}$

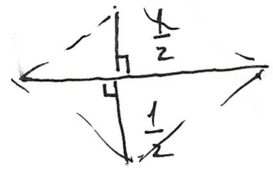
$x_4^2+c_1+1=-x_4^2+c_2+1$ $\quad x_4^2=\frac{c_2-c_1}{2}$ Чистовик

$x_4=\sqrt{\frac{c_2-c_1}{2}} \Rightarrow$

точки клеток: $\left(\sqrt{\frac{c_2-c_1}{2}};\ \frac{c_2+c_1}{2}\right)$

$\left(\sqrt{\frac{c_2-c_1+1}{2}};\ \frac{c_2+c_1+1}{2}\right)$ $\quad \left(\sqrt{\frac{c_2-c_1-1}{2}};\ \frac{c_2+c_1+1}{2}\right)$

$\left(\sqrt{\frac{c_2-c_1}{2}};\ \frac{c_2+c_1+2}{2}\right)$

$\sqrt{\frac{c_2-c_1+1}{2}}$  $\sqrt{\frac{c_2-c_1+1}{2}}$

$S=2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{2}\left(\sqrt{\frac{c_2-c_1+1}{2}}-\sqrt{\frac{c_2+c_1-1}{2}}\right)=$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{(c_2-c_1)+1}-\sqrt{(c_2-c_1)-1}\right)$

Надо найти максимум у $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=$

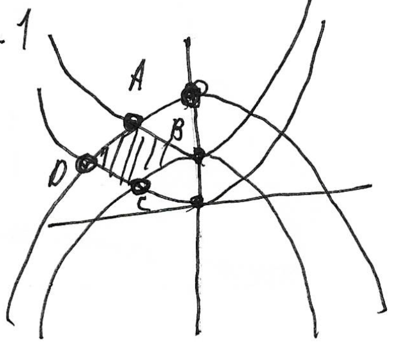
$\frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

монотон. возрас функ $\Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow$

$x=1$ $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2}+0}=\sqrt{2}\Rightarrow$

$S=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{2}$ при $c_2-c_1=1$

Пример $c_2=1$ $c_1=0$



$\boxed{\text{Ответ: } S=\frac{1}{2}}$

Черновик

$81 \cdot 2 = 162$

$81 \cdot 3 = 243$

$x^2 + c_1$ $\quad -x^2 + c_3$

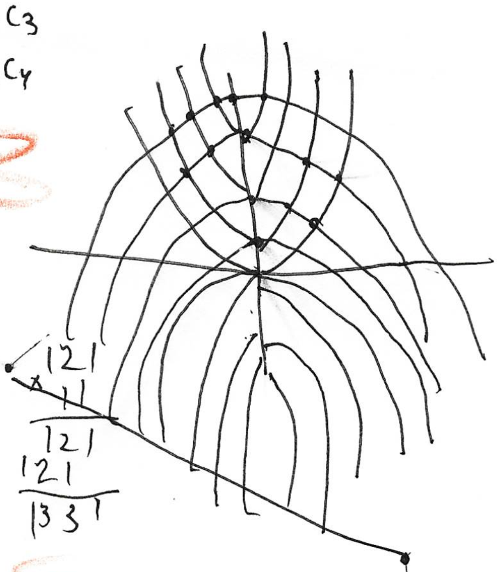
$x^2 + c_2$ $\quad -x^2 + c_4$

$\begin{array}{r} 81 \\ \times 11 \\ \hline 81 \\ 81 \\ \hline 891 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 81 \\ \times 12 \\ \hline 162 \\ 81 \\ \hline 972 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 81 \\ \times 12 \\ \hline 162 \\ 81 \\ \hline 972 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 81 \\ \times 13 \\ \hline 243 \\ 81 \\ \hline 1053 \end{array}$

97

243

54



$\begin{array}{r} 121 \\ \times 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array}$

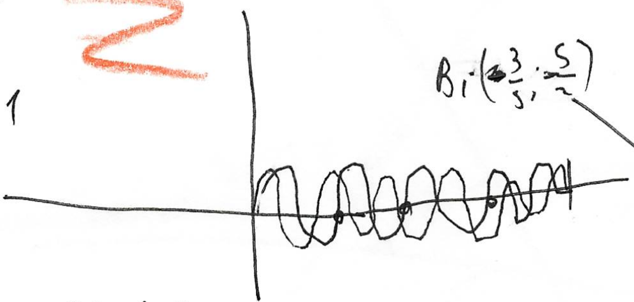
$\frac{\cancel{81} \cdot \cancel{12}}{\cancel{18}}$ 9 6 $\cancel{2}$

$x^2 + c$

$x^2 + c + 1$

$-x^2 + c$

$-x^2 + c + 1$



$B_1\left(-\frac{3}{3}; -\frac{5}{2}\right)$

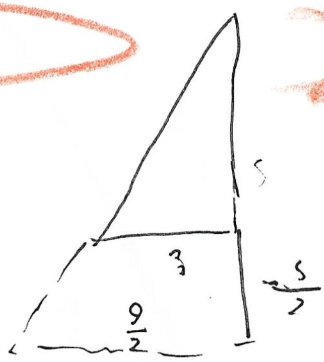
$A_1\left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$

$B_2\left(3; \frac{5}{2}\right)$

$A_2\left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$

$705 \,|\, 5$

$5 \quad 121$



B_1 $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

B_2 $\left(3; -\frac{5}{2}\right)$

A_1 $\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$

A_2 $\left(6; -\frac{7}{2}\right)$