0 265885 370000

26-58-85-37
(124.4)

Выход 13:23
Возврат 13:30

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Толочек Александра Евгеньевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

26-58-85-37 (124.4)

Черновик

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

$1 - tg^2 x \geq 0$

$\sin x \geq 0$

$tg^2 x \leq 1$

$-1 \leq tg\,x \leq 1$

$6(1-tg^2x) = 16\cdot\sin^2 x$

$6 - 6\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 16\cdot\sin^2 x$

$16\cdot\sin^2 x + 6\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 6 = 0$

$16\cdot\sin^2 x + \frac{6\cdot\sin^2 x}{1-\sin^2 x} - 6 = 0$

$t = \sin^2 x$

$16t + \frac{6t}{1-t} - 6 = 0$

$\frac{16t - 16t^2 + 6t - 6 + 6t}{1-t} = 0$

$-16t^2 + 28t - 6 = 0$

$16t^2 - 28t + 6 = 0$

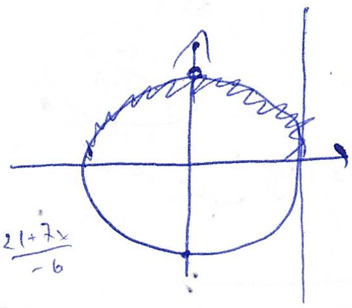
$8t^2 - 14t + 3 = 0$

$D = 14^2 - 4\cdot3\cdot8 = 10^2$

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{14+10}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}\ \varnothing \\ t = \frac{14-10}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\sin^2 x = \frac{1}{4}$

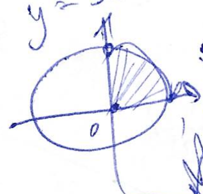
$\sin x = \pm\frac{1}{2}$

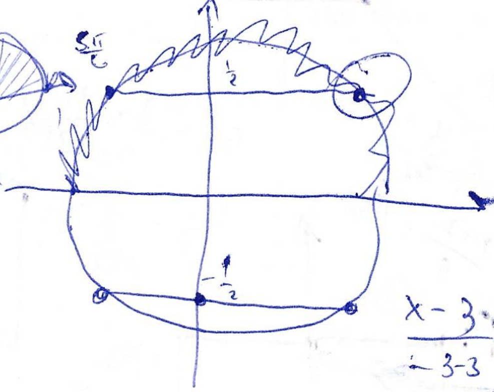


$-2{,}5 = \frac{-21+7x}{-6}$

$+\frac{3{,}5}{2{,}6}$ ; $1{,}58$

$y = \sin 15\pi x$






$tg\frac{5\pi}{6} < 0$

$\frac{7\pi}{2}$

$\times\frac{16}{12}$ ; 28

$\times\frac{12}{8}$ ; 96

$\times\frac{14}{14}$ ; 56 ; $+14$ ; 196

1025 | 5
205 | 5
41 | 41

$\frac{x-3}{-3-3} = \frac{y-0}{7-0}$

$7(x-3) = -6\cdot y$

Неравенства о средних
$a_1 \dots a_n > 0$ выполняются соотношения
среднее гармонич. $\leq$ сред. геометрич. $\leq$ сред. арифмет. $\leq$ сред. квадратич.

$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1\dots a_n} \leq \frac{a_1+\dots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+\dots+a_n^2}{n}}$

108 117 126 135 144 153 162 171 180 ~~189~~

$y = \sin 13\pi x$

~~200~~ 9

$(\overline{abc} : (a+b+c)) : 9$

$\overline{abc} : 9$

$a+b+c : 9$

$\times\frac{36}{32}$ ; 72 ; $+108$ ; 1152 ; ~~300~~

~~207~~ 216 225 234 243 ~~252~~

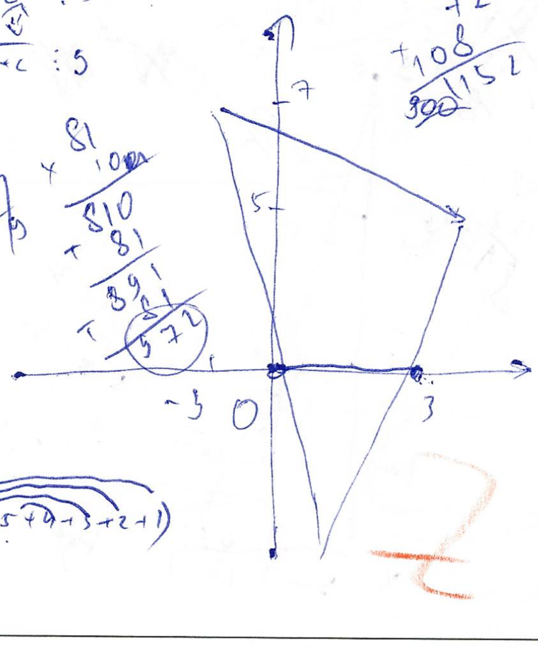
$9a + 9b + 9c$

$18a + 18b + 18c$

$27a + 27b + 27c$

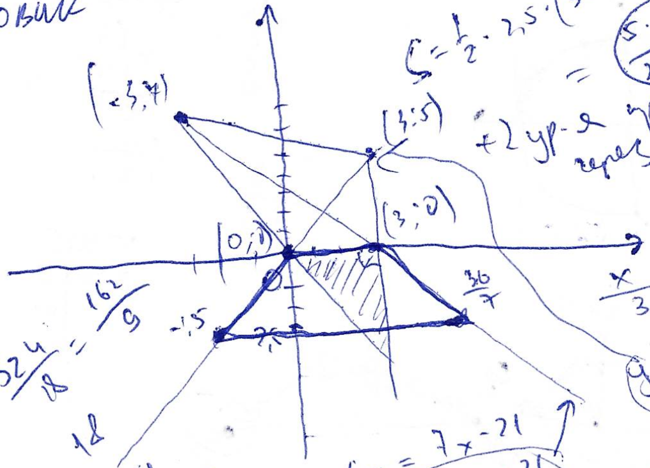
$\times\frac{81}{100}$ ; 810 ; $+81$ ; 891 ; $+81$ ; 972

~~~~ ~~Пб угол~~ ?




$4\cdot8\,(8+7+6+5+4+3+2+1)$
~~~~

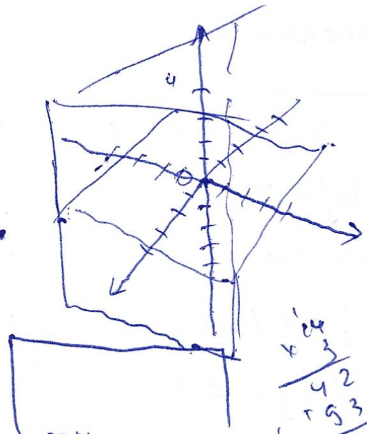
Черновик



$S = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot \left(3 + \frac{93}{14}\right) =$

$= \frac{5 \cdot 135}{2 \cdot 2 \cdot 14}$

+2 ур-я прямых через точки



$\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$

$y = \frac{5x}{3}$

$\frac{324}{18} = \frac{162}{9}$

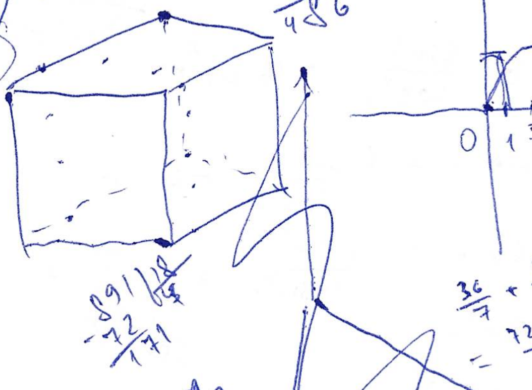
18

$\frac{x-3}{-6} = \frac{y}{7}$

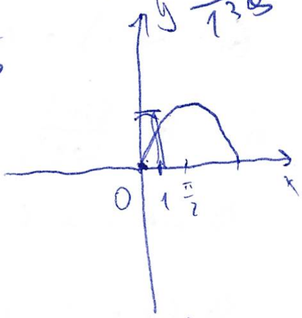
$6y = 7x - 21$

$y = \frac{7x-21}{-6}$

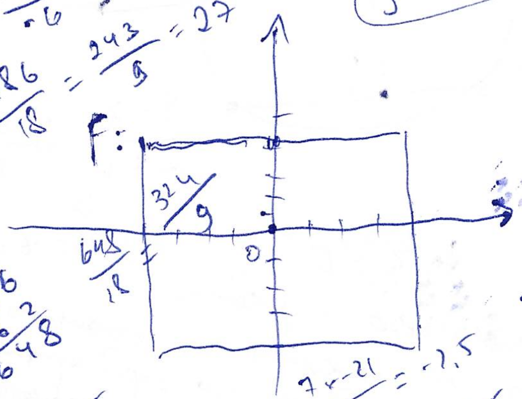
$\frac{486}{18} = \frac{243}{9} = 27$



$\begin{array}{r} 324 \\ +162 \\ \hline 486 \end{array}$



$\begin{array}{r} \times 64 \\ 3 \\ \hline 42 \\ +93 \\ \hline 138 \end{array}$



$\frac{324}{9}$

$\frac{648}{18}$

$\begin{array}{r} 486 \\ +162 \\ \hline 648 \end{array}$

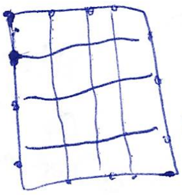
$\frac{891}{18}$ $\begin{array}{r} -72 \\ \hline 171 \end{array}$

$\frac{36}{7} + \frac{3}{2} =$

$= \frac{72+21}{14} =$

$= \frac{93}{14}$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times 5 \\ \hline 90 \end{array}$



$\frac{7x-21}{-6} = -2{,}5$

$7x - 21 = 6 \cdot 2{,}5$

$x = \frac{36}{7}$

$\frac{5x}{3} = -2{,}5$

$5x = -2{,}5 \cdot 3$

$x = -1{,}5$

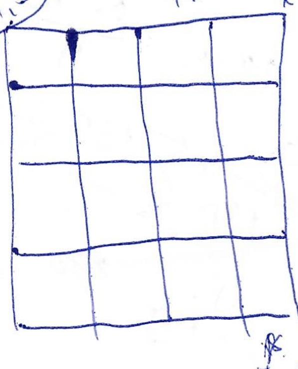
$16 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 64$ — в графах

10 граней

640

$\frac{972}{-90} \Big| \frac{18}{54}$

$\begin{array}{r} 162 \\ +81 \\ \hline 243 \end{array}$



$\begin{array}{r} 2{,}5 \\ \times 6 \\ \hline 15{,}0 \\ +21 \\ \hline 36 \end{array}$

sin $13\pi x$

sin $15\pi x$

sin $17\pi x$

$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ 150 \\ \hline 625 \\ +400 \\ \hline 1025 \end{array}$

$5\sqrt{41}$

25a

20a

972

963

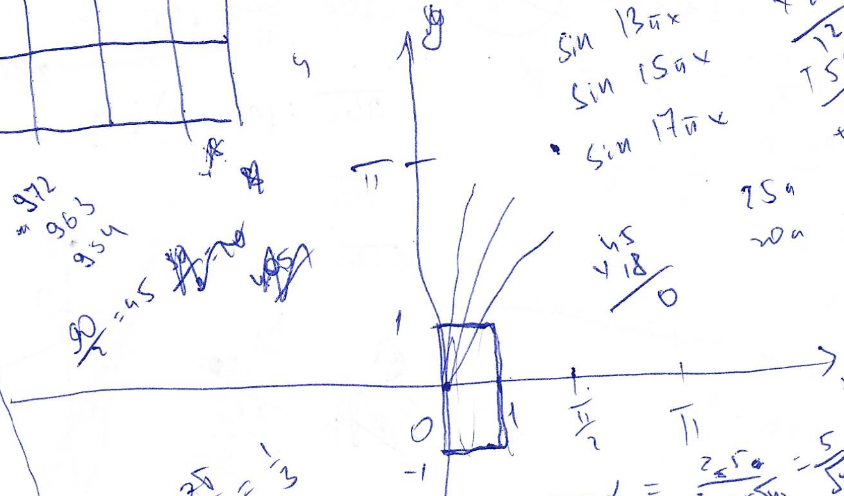
954

$\begin{array}{r} 972 \\ -891 \\ \hline 81 \end{array}$

$\frac{90}{2} = 45$

$\begin{array}{r} 45 \\ \times 18 \\ \hline 0 \end{array}$

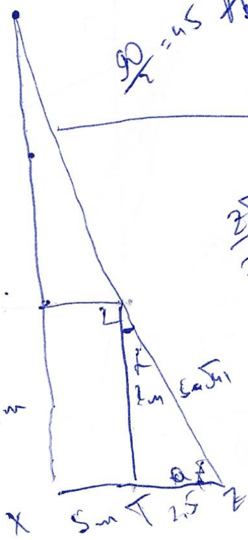
$\begin{array}{r} 648 \\ +162 \\ \hline 810 \end{array}$ км



$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + C$

$x^2 = C + 1$

$x = \sqrt{C+1}$



$\frac{25}{7x} = \frac{1}{3}$

$5 + a = 3a$

$a = 2{,}5$

$xz = 7{,}5$

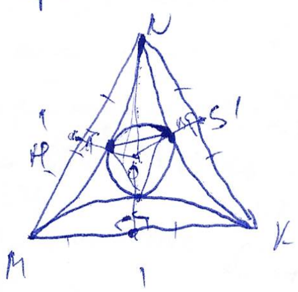
$h_{yt} = \frac{2{,}5}{2} = S_м$

$\sin\alpha = \frac{25a}{5a \cdot 5\sqrt{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}}$

$\cos\alpha = \frac{20}{5\sqrt{41}} = \frac{4}{\sqrt{41}}$

26-58-85-37 (124.4)

Черновик



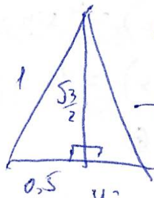
$x_{o_1} - A, B, C$

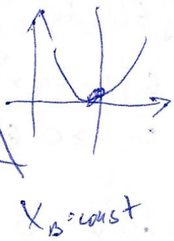
$ABC$ – р/ст.

$HNSO$ – вписс. => $\angle HOS = 120°$

~~ГИО~~

$a = b^2$

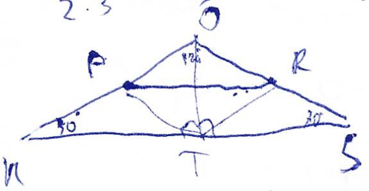




$y = Cx^2$ симметрич. относ. $x_в = const$

сер. перп из O на стороны △

$\frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



(!) $RP \parallel HS$

$HS = \frac{1}{2} MK = \frac{1}{2}$

△$POR \sim$ △$HOS$

$$\begin{array}{r} 5184 \\ \times\ 27 \\ \hline 36288 \\ +\ 10368 \\ \hline 139968 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_a x = \frac{1}{2x} \ (1) \\ \log_a x = -\frac{1}{4x} \ (2) \end{array}\right.$$

отсюда получится.

$8x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

$8x^2 \cdot \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} a > 0 \\ a \ne 1 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{array}}$$

$t = \log_a x$

$\frac{1}{2}x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + c$

$x^2 = c - 1$

$x_2 = \sqrt{c-1}$

$8x^2 \cdot t - \frac{1}{t} - 2x \le 0$

$8x^2 t^2 - 2xt - 1 \le 0$

$D = 4x^2 + 32x^2 = (6x)^2$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{2x + 6x}{16x^2} = \frac{1}{2x} \\ t = \frac{2x - 6x}{16x^2} = -\frac{1}{4x} \end{array}\right.$$

(1) $a = (2x)^a$

$x = \left(\frac{1}{2x}\right)^a$

$\times 18$

~~182~~

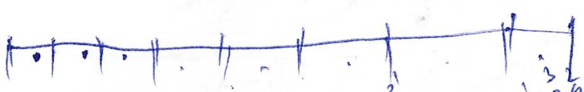
$f(x) = x$ ↗

$f(x) = \left(\frac{1}{2x}\right)^a$ ↘

=> если реш. есть, то одно.

отсюда точка

$x = \left(\frac{1}{2x}\right)^a$



$$\begin{array}{r} 1152 \\ \times\ 81 \\ \hline 1152 \\ +\ 9216 \\ \hline 93312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 810 \\ \times\ 324 \\ \hline 1134 \end{array}$$

$\frac{x - 3}{-6} = \frac{y - m}{7}$

$7x - 21 = -6y$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1296 \\ +\ 5184 \\ \hline 5183 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \times\ 6 \\ \hline 150 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 21 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 4 \\ \hline 56 \end{array}$$

$\frac{36}{7} + \frac{3}{2} = \frac{72 + 21}{14} = \frac{93}{14}$

$$\begin{array}{r} 135 \\ \times\ 5 \\ \hline 675 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +\ 3 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ +\ 42 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ \times\ 5 \\ \hline 675 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 4 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +\ 8 \\ \hline 112 \end{array}$$

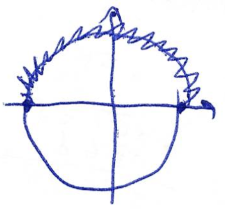
Чистовик

№1

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

$\begin{cases} 6(1-tg^2x) = 16\cdot\sin^2 x \; (*) \\ \sin x \geq 0 \; (2) \end{cases}$

(2) $\sin x \geq 0$



(*) $6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x$

$6 - 6tg^2x = 16\cdot\sin^2 x$

$6 - 6\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 16\cdot\sin^2 x$

$6 - 6\cdot\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = 16\cdot\sin^2 x$

Пусть $t = \sin^2 x$ (a) $0 \leq t \leq 1$, тогда

$6 - \frac{6t}{1-t} = 16t$

$\frac{6(1-t) - 6t - 16t(1-t)}{1-t} = 0$

2

$\frac{6 - 6t - 6t - 16t + 16t^2}{1-t} = 0$

$\begin{cases} 16t^2 - 28t + 6 = 0 \; (1) \\ t \neq 1 \end{cases}$

(1) $16t^2 - 28t + 6 = 0 \quad |:2$

$8t^2 - 14t + 3 = 0$

$D = 14^2 - 4\cdot3\cdot8 = 100 = 10^2$

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{14+10}{16} \\ t = \frac{14-10}{16} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \text{ - не подходит по (a)} \\ t = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

Вернемся к исходной переменной:

$\sin^2 x = \frac{1}{4}$

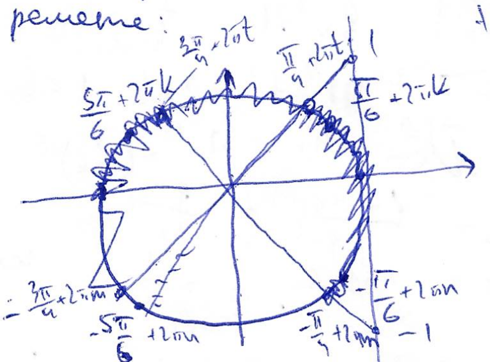
$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right.$

$k, n \in Z$

Отберем подходящие решения:

$t, m \in Z$




(**) $1 - tg^2 x \geq 0$

$tg^2 x \leq 1$

$-1 \leq tg\, x \leq 1$

2

промежуток между этими числами

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi t$

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi t$

Ответ: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + 2\pi k \; | k \in Z \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \; | n \in Z \end{array} \right\}$

№2

2

Дано:

~~xxxxx~~

$\overline{abc} \in A : (\overline{abc} : (a+b+c)) \,\vdots\, 9$

Найти:

$A_2 + A_5 + A_{-2} = ?$

Решение:

Чтобы ~~сумма~~ частное делилось на 9, сумма ~~xxx~~ цифр его числа должна быть кратна 9. Так как частное кратно 9, то само число $\overline{abc}$ также должно быть кратно 9 $\Rightarrow a+b+c \,\vdots\, 9$, тогда, чтобы получить ~~число~~ частное кратное 9, $\overline{abc}$ должно быть кратно 81.

Максимальное трехзначное число $\vdots\, 81$ это 972. Проверим, выполняется ли

26-58-85-37 (124.4)

Чистовик

№2 (продолжение)

...выполняется ли условие для этого числа: $972 : 18 = 54 \vdots 9$ выполняется. Тогда найдем

предпоследнее число, для которого условие выполняется: $972 - 81 = 891$

~~$884$~~ $891$. Проверка: $891 \not\vdots 18$ ~~$=$~~ ; $891 - 81 = 810$ $\quad 810 : 18 = 45 \vdots 9$

Предпоследнее число – $810$; первое число: $81 - 162 : 162 : 9 = 9 \vdots 9$

найдем второе: $162 + 81 = 243 \vdots 9 \Rightarrow$ подходит (II) ~~$18$~~; $243 + 81 = 324 : 18$ ~~$= 18 \vdots 9$~~

~~второе число – 324~~. Аналогично найдем пятое число:

(V): $486$ ; ~~IV: 648 ; V: 648 + 81 = 729 ⋮̸ 18 ; 729 + 81 = 810 : 18 = 45 ⋮ 9~~

~~Получается, что предпоследнее число и второе число совпадают~~ $\Rightarrow$

сумма $= 810 + 243 + 486 = 1539$ ~~$810 + 324 = 1134$~~

Ответ: $1539$ ~~$1134$~~ – сумма предпоследнего, второго и пятого чисел.

№3

Дано:

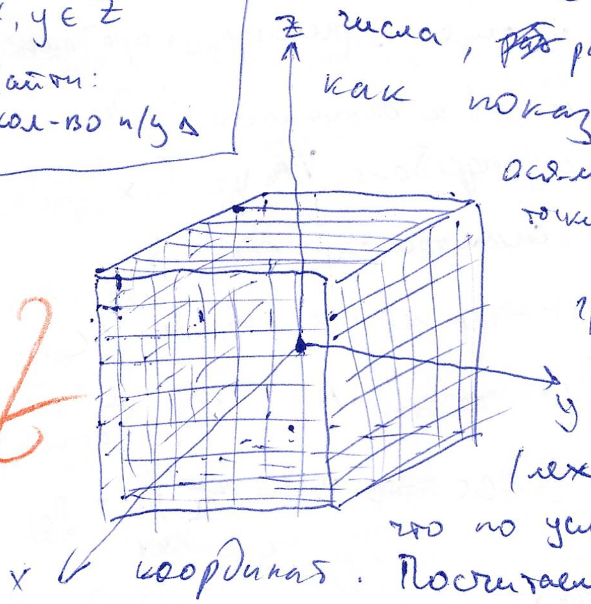
$|x| \leq 4$

$|y| \leq 4$

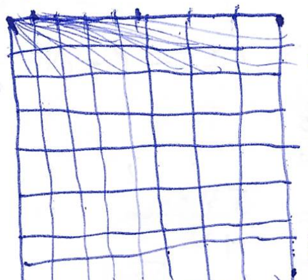
$x, y \in \mathbb{Z}$

Найти: кол-во п/у $\triangle$

Решение: Все подходящие нам точки ~~лежат внутри~~ принадлежат кубу со стороной 8. Так как по условию координаты – целые числа, разобьем куб на плоскости, как показано на рисунке (параллельно осям координат, через целые точки). Таким образом, получим 27 граней. Катеты прямоугольных $\triangle$ будут лежать в этих плоскостях (лежать на отрезках прямых), потому что по условию они параллельны осям координат. Посчитаем, сколько таких прямоугольных




треугольников вместится в одной плоскости: ~~в каждой строке: 8 штук; 2 строка: 8 шт. 3 строка: 8 шт ... 4 строка ... 8 строка: 8 штук вершина может лежать~~ В 81 вершине мы можем ~~провести ряд~~ отложить треугольники в 2-х направлениях $\Rightarrow$ всего треугольников в грани:



~~$4 \cdot (8 \cdot 8 + 8 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + \dots + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 1) = 4 \cdot 8 \cdot 36 = 1152$~~

$4 \cdot (C_9^2)^2 = 4 \cdot \left(\frac{9!}{2! \cdot 7!}\right)^2 = 4 \cdot 36^2 = 4 \cdot 1296 = 5184$

Чистовик

№3 (продолжение)

на одной плоскости – ~~[illegible]~~ 5184 треугольника => на ~~[illegible]~~ 27 плоскостях

$27 \cdot 5184 = 139968$

~~$1152 \cdot 81 = 93312$~~ треугольник. Других $\Delta$ быть не может, так как иначе их катеты не будут паралельны осям координат.

Ответ: ~~93312~~ 139968 прямоугольный треугольник

№5

Дано:
$y = Cx^2$
симметричный $\Delta$
впис. окружность
$\rho = 1$
Найти: $r_{впис.}$ – ?

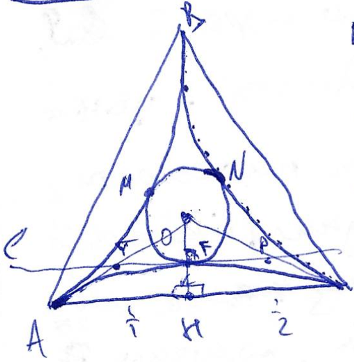
Решение: Пусть параболы касаются окружности в точках M, N, K.

$\Delta ABC$ – р/ст $\Delta$ по опр. ($AB = BC = AC = \rho = 1$)

$\Downarrow$

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$ по св-ву р/ст $\Delta$

O – центр вписанной окружности.



проведем OK; $OK \cap AC = H$.

K – т. касания, и еще вершина параболы

Значит касательная $\ell$ к окружности будет касательной к параболе $y = Cx^2$

(~~симметр~~ симметричен OH =>

H – сер. AC; $OH \perp AC$ => OH – сер. пер. к стороне AC.

$AH = HC = \frac{1}{2}$; Аналогично для точек M и N. Таким образом O – т. пер. медиан $\Delta ABC$ => $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ по т. Пифагора из $\Delta BHC$

$OH = \frac{1}{3} BH = \frac{\sqrt{3}}{6}$ по св-ву ~~[illegible]~~ т. пересечения медиан.

$BO = \frac{2}{3} BH = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Delta OTP \sim \Delta AOC$ ~~[illegible]~~ по 2 $\angle$ ($\ell \parallel AC$) => $OF \perp \ell$, $OF = r_{впис.}$

$\frac{OF}{OH} = \frac{TP}{AC} = \frac{OT}{AO} = \frac{1}{2}$ => $OF = \frac{1}{2} \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}$,

из сказанного выше $OF = r_{впис.} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

Ответ: радиус вписанной окружности равен $\frac{\sqrt{3}}{12}$

Чистовик

№6

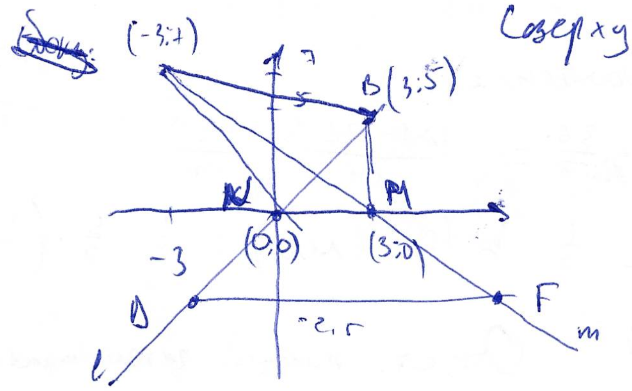
Дано:

забор высота - 2м

светлячок - 6м

Найти:

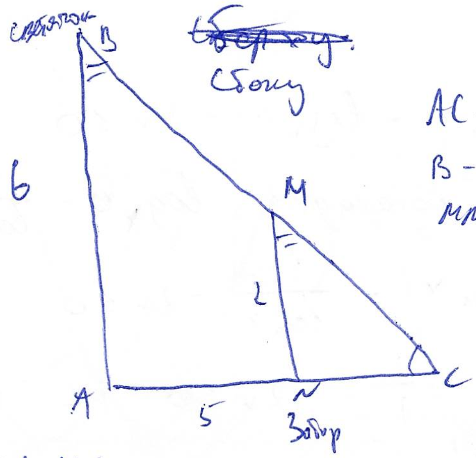
S пустыря тени.




Сверху:

Решение:

рассмотри полет светлячка с двух сторон: сверху и сбоку. сверху: проведем прямые через точки $(-3;7)$ и $(3;0)$ и $(3;5)$ и $(0;0)$. Эти прямые окажутся границами, внутри которых будет находится затенённая ~~темная~~ область (за этими прямыми все точки будут освещены хотя бы на множестве).




AC - земля

B - светлячок

MN - забор

~~Сверху~~ Сбоку: из графика вида сбоку получим, что в точке $(3;5)$ светлячок будет на расстоянии 5 м. от забора $\Rightarrow AN=5$; $\triangle MNC \sim \triangle ABC$ ($AB \perp AC$; $MN \perp AC \Rightarrow AB \parallel MN$; $\angle C$ - общ.; $\angle ABC = \angle NMC$ как соот. $\angle$)

$\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{CM}$, пусть $NC = x$, тогда $\frac{1}{3} = \frac{x}{x+5} \Rightarrow x = 2,5$

значит если смотреть сверху, то свет будет падать ниже прямой $y=-2,5$. Полученная фигура - трапеция ($y=-2,5 \parallel y=0$) Найдем длину DF: $l$: $y = \frac{5x}{3}$

$m$: $\frac{7x-21}{-6}$ (по формуле ур-я прямой через 2 точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$)

$-2,5 = \frac{5x}{3} \Rightarrow x = -\frac{7,5}{5} \Rightarrow x = -1,5$

$-2,5 = \frac{7x-21}{-6} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 2,5 + 21}{7} \Rightarrow x = \frac{36}{7}$

$MN = 3$

$h = 2,5$

Чистовик

№ 6 (продолжение)

$\times\begin{array}{r}14\\3\\\hline 42\end{array}$ $\quad +\begin{array}{r}93\\42\\\hline 135\end{array}$

$DF = \frac{3}{2} + \frac{36}{7} = \frac{21+72}{14} = \frac{93}{14}$

$S_{затемнен.} = \frac{1}{2}\cdot h\cdot(DF + MN) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{93}{14}+3\right) = \frac{135\cdot 5}{14\cdot 4} =$

$= \frac{675}{56}$ Ответ: площадь затемнетная равна $\frac{675}{56}$ $м^2$

№8

$8x^2\cdot\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$ $\quad x \in$ полуинтервал + точка

По св-ву логарифма $\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$, тогда

$8x^2\cdot\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0$ $\quad$ Пусть $t = \log_a x$

$$\begin{cases} 8x^2\cdot t - \frac{1}{t} - 2x \le 0 \quad |\cdot t \quad (1) \\ a>0;\ a\ne 1 \\ x>0;\ x\ne 1 \end{cases} - О.О.$$

(1) $8x^2\cdot t^2 - 2xt - 1 \le 0$ $\quad$ Решим относительно $t$:

$D = \cancel{4x^2 + 32x^2} = (6x)^2$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{2x+6x}{16x^2} \\ t = \frac{2x-6x}{16x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2x} \\ t = -\frac{1}{4x} \end{array}\right.$$

Вернемся к исход. переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \log_a x = \frac{1}{2x} \quad (*) \\ \log_a x = -\frac{1}{4x} \quad (**) \end{array}\right.$$

(*) $x = \left(\frac{1}{2x}\right)^a$

$f(x) = x$ непрерыв.; ↑ на О.О.

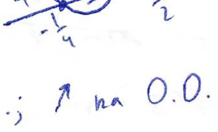
$g(x) = \left(\frac{1}{2x}\right)^a$ непрерыв.; ↓ на О.О.

$f(x) = g(x)$ если решение есть, то оно единственное. (по св-ву функции)

Если ввести $u = a^t\cdot t$:

$f(u) = (2u-1)(4u+1)$

исследуем $f(u)$



$a^t\cdot t$ ↑ $(0;+\infty)$

$(-\infty;0)$ min в $-\frac{1}{\ln a}$

⇓ $-\frac{1}{e\ln a}$

∃! корень $t>0$

(**) $x = \left(-\frac{1}{4x}\right)^a$

$f(x) = x$ непрерыв.; ↑ на О.О.

$g(x) = \left(-\frac{1}{4x}\right)^a$ непрерыв.; ↑ на О.О.

⇓

решением будет являться интервал.

Нужно, чтобы решением был полуинтервал.

Чистовик

№8 (продолжение)

$a^t \cdot t = -\frac{1}{4}$ $\quad e\ln a = 4$ $\quad \exists!$ корень

$x = 2$

Ответ: при $a = e^{4/e}$

№7 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = 1 - \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$ $\quad \frac{1}{2}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$ $\quad x^2 = 1$ $\quad x = \pm 1$ $\quad S_{\diamond} = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 2 = 1$ (диагонали $\perp$)

Дано:

~~клетка~~

линии сетки:

$y = \pm \frac{x^2}{2} + c$

$c \in \mathbb{Z}$

центр страницы - начало координат.

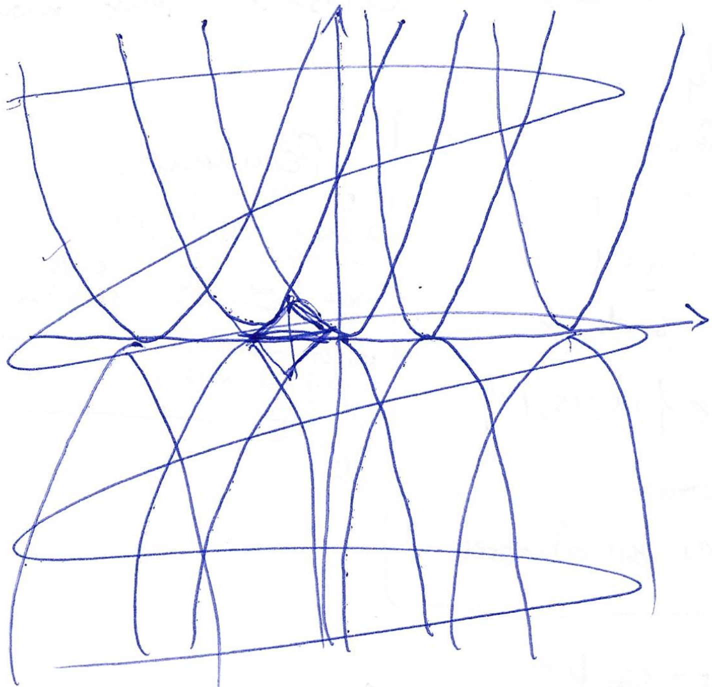
ед. отрезок = 1 см

лист: 210 × 297 мм

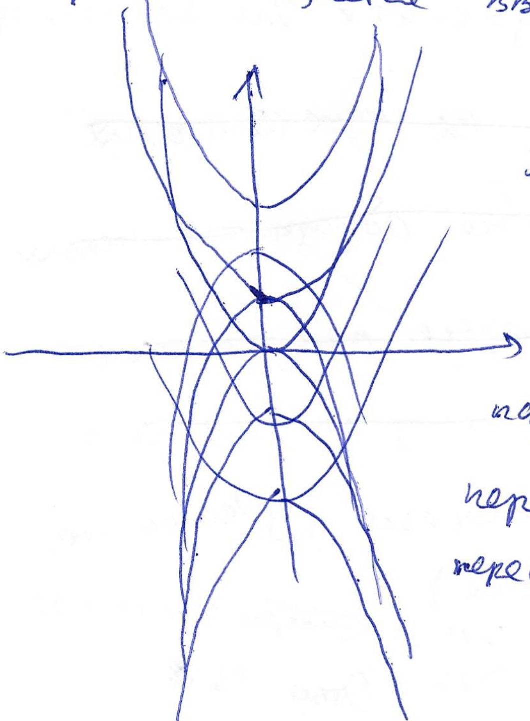
Найти:

$S_{max\ \text{"клетки"}}$ - ?

Решение:



В ур-е параболы меняется только $C$ => её график смещается вверх-вниз относительно $O_y$.

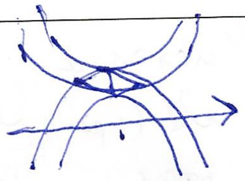


Всего таких парабол на листе: $(210 : 2)\cdot 2 = 210$ штук

кол-во пересечений (клеток): $210!$ ; чем выше поднимаем параболу, тем меньше площадь пересечений => нужно рассматривать пересечение для $\min C$.

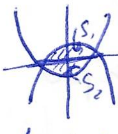
$C = 0$: $\quad y = \pm \frac{x^2}{2}$

Чистовик



№7 (продолжение)

$n = 1$ : $y = \pm \frac{x^2}{2} \pm 1$ пересечение между первой и второй параболами



$\Downarrow$

max. $S_{клетки} = 1$

Ответ: max. площадь клетки $1\ см^2$

№4

Дано:

$0 \le x \le 1$

$-1 \le y \le 1$

$y = \sin k\pi x$

$k \in \{13; 15; 17\}$

Найти:

кол-во областей - ?

Решение:

$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

$2\cos(14\pi x)\cdot\sin(-\pi x) = 0$ $\quad x = 0{,}1$

$14x = \frac{1}{2} + n$

$x = \frac{\frac{1}{2}+n}{14}$ (14)

$\sin 13\pi x = \sin 17\pi x$

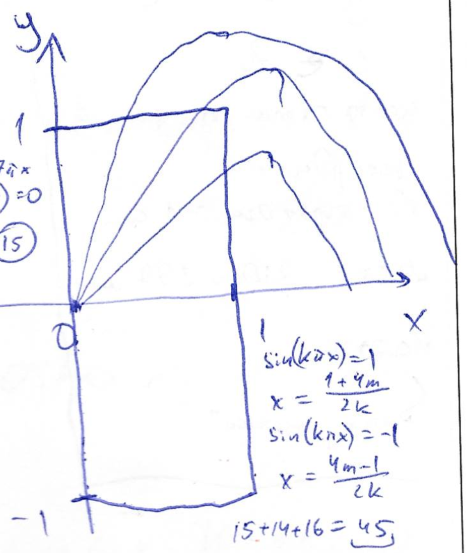
$\sin(2\pi x)\cdot\cos(15\pi x) = 0$

$x = \frac{\frac{1}{2}+n}{15}$ (15)

$\sin 15\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin(\pi x)\cdot\cos(16\pi x) = 0$

$x = \frac{\frac{1}{2}+n}{16}$ (16)




$\sin(k\pi x) = 1$

$x = \frac{1+4m}{2k}$

$\sin(k\pi x) = -1$

$x = \frac{4m-1}{2k}$

$15+14+16 = 45$

$y = \sin k\pi x$

$x \in [0; 1]$

y ↑ ~~Нарисуем схем гр~~ На чертеже увидим, как идут графики $y = \sin k\pi x$ для $k \in \{13; 15; 17\}$

~~Заметим, что эти графики не пересекаются на промежутке $x \in [0; 1]$ => не образуется новых областей кроме тех, которые получились при пересечении $y = \sin k\pi x$ и $y = \pm 1$; $x = 1$; $x = 0$~~

Таким образом, полоса окажется разделена на 93 области (непересекающиеся).

$y = -1 \Rightarrow 21$

$y = 1 \Rightarrow 23$ $\Rightarrow$ суммарно $21 + 23 + 45 = 93$

Ответ: 93

Чистовик №7

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + C \end{cases}$$

см. черновик

$x_1 = \sqrt{C+1}$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + C \end{cases}$$

см черновик.

$x_2 = \sqrt{C-1}$

Первая диагональ $= 1$, вторая $= x_1 - x_2$

$$x_1 - x_2 = \sqrt{C+1} - \sqrt{C-1} = \frac{(\sqrt{C+1} - \sqrt{C-1})(\sqrt{C+1} + \sqrt{C-1})}{\sqrt{C+1} + \sqrt{C-1}} = \frac{(C+1)-(C-1)}{\sqrt{C+1} + \sqrt{C-1}} = \frac{2}{\sqrt{C+1} + \sqrt{C-1}}$$

функция убывающая

Значит макс. $S = 1$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!