13-19-69-70
(129.11)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2 11

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Требунских Светланы Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Тре

13-10-69-70
('29.1)

Вход

Черновик

$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin^2 x$

$3(1-tg^2x) = 8\sin^2x$

$3 - 3tg^2x = 8\sin^2x$

$3 - \frac{3\sin^2x}{\cos^2x} = 8\sin^2x$

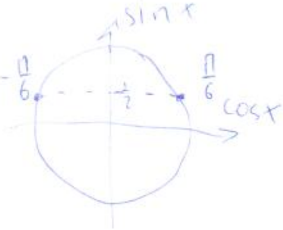
$3 - \frac{3\sin^2x}{1-\sin^2x} = 8\sin^2x$

ОДЗ: $3(1-tg^2x) \geq 0$

$1 - tg^2x \geq 0$

$-tg^2x \geq 1$

$tg^2x \leq -1$



$\times\ 27$, 8, 216

$\sin^2x = t^2$

$3 - \frac{3t^2}{1-t^2} = 8t^2$

$3 - \frac{3t^2}{(1-t)(1+t)} - 8t^2 = 0$

$\frac{3(1-t^2) - 3t^2 - 8t^2(1-t^2)}{(1-t)(1+t)} = 0$

$\frac{3-3t^2-3t^2-8t^2+8t^4}{(1-t)(1+t)} = 0$

$\frac{8t^4 - 14t^2 - \cancel{8t} + 3}{(1-t)(1+t)} = 0$

$8t^4 - 14t^2 + 3 = 0$

~~$8t^3 - 6t^2 - 8t + 3 = 0$~~

~~$216 - 54 - 72 \cdot 4 + 3$~~

$-216 - 54 + 24 + 3$

$-648 - 120 + 3$

$14 \cdot 14 = 196$

$81 \cdot 8 = 648$

$14 \cdot 9 = 126$

$12 \cdot 8 = 96$

$t^2 = A$

$8A^2 - 14A + 3 = 0$

$D = 196 - 4\cdot 8 \cdot 3 = 196 - 96 = 100 = 10^2$

$A_1 = \frac{14+10}{16} = \frac{24}{16}$

$A_2 = \frac{14-10}{16} = \frac{4}{16}$

$t^2 = \frac{24}{16}$ $t^2 = \frac{4}{16}$

$t = \pm\frac{2\sqrt{6}}{4}$ $t = \pm\frac{2}{4}$

$13^3 \quad 3\cdot 12^2 = \cancel{144\cdot 3}\ 432 \cdot 13 \cdot 169 =$

$= 432 \cdot 2197 = 949104$

$2197 \cdot 432$: 4394, 6591, 8788, 949104

$144 \cdot 3 = 432$

$13 \cdot 13 = 169$

$169 \cdot 13$: 507, 169, 2197

Чистовик

№2

Пусть n – исходное число из множества, S – его сумма цифр, тогда $\frac{n}{S}$ делится на 9, значит, n тоже делилось на 9. Тогда возможные значения суммы цифр это 9, 18 и 27

Если $S=9$, то имеем $\frac{S}{9} = 9k$, то есть

$n = 81k$

Все трехзначные числа кратные 81 это

162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972

Из них нужная сумма ~~нужных~~ цифр чисел

162, 243, 324, 405 и 810

Аналогично, если сумма цифр 18, то имеем

$n = 162k$

Надо из чисел 162, 324, 486, 648, 810, 972 выбрать числа с суммой цифр 18, это 486, 648 и 972

С суммой цифр 27 только одно число, оно не подходит, т.к $9 \cdot 27 \neq 999$

Тогда $A = \{162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972\}$

Сумма первого, шестого и последнего это

$162 + 648 + 972 = 1782$

13-10-69-71
(125.11)

Чистовик

№3

Всего точек на каждой оси 13, поэтому в множестве из условия 13^3 точек. Каждый прямоугольный треугольник нужно задать выбрав вершину, затем на двух из трех прямых, проходящих через выбранную точку, выбрать по одной из 12 точек.

Итого ответ $13^3 \cdot 3 \cdot 12^2 = 949104$

№7

Давайте рассмотрим произвольную клеточку, которая целиком лежит внутри листа, тогда она ограничена четырмя соседними параболами вида $y = 2x^2 + a$, $y = 2x^2 + a + 1$, $y = -2x^2 + b$, $y = -2x^2 + b + 1$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

Пусть $d = b - a$, очевидно, то, что $d \geq 1$, то было у клетки 4 вершины.

Рассмотрим правую такую клеточку (левая ей симметрична и имеет ту ~~же~~ же площадь). Ее вершины получаются как точки пересечения этих парабол, найдем их:

$A: 2x^2 + a = -2x^2 + b$

где $4x^2 = b - a = d$

$x = \frac{\sqrt{d}}{2}$, $y = 2x^2 + a = \frac{d}{2} + a = \frac{a+b}{2}$

$A = \left(\frac{\sqrt{d}}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$

$B: 2x^2 + a + 1 = -2x^2 + b$

где $4x^2 = b - a - 1 = d - 1$

$x = \frac{\sqrt{d-1}}{2}$, $y = 2x^2 + a + 1 = \frac{d-1}{2} + a + 1 = \frac{a+b+1}{2}$

$B = \left(\frac{\sqrt{d-1}}{2}, \frac{a+b+1}{2}\right)$ чистовик

$C: 2x^2+a+1 = -2x^2+b+1$

$4x^2 = b-a = d$

$x = \frac{\sqrt{d}}{2}$, $y = 2x^2+a+1 = \frac{d}{2}+a+1 = \frac{a+b+2}{2}$

$C = \left(\frac{\sqrt{d}}{2}, \frac{a+b+2}{2}\right)$

$D: 2x^2+a = -2x^2+b+1$

$4x^2 = b-a+1 = d+1$

$x = \frac{\sqrt{d+1}}{2}$, $y = 2x^2+a = \frac{d+1}{2}+a = \frac{a+b+1}{2}$

$D = \left(\frac{\sqrt{d+1}}{2}; \frac{a+b+1}{2}\right)$

Вовочка соединяет соседние вершины, значит получается 4-х угольник ABCD.

Заметим, что ~~конец~~ диагональ AC вертикальна а диагональ BD горизонтальна. При этом $AC = \frac{a+b+2}{2} - \frac{a+b}{2} = 1$

$BD = \frac{\sqrt{d+1}}{2} - \frac{\sqrt{d-1}}{2} = \frac{\sqrt{d+1}-\sqrt{d-1}}{2}$

Следовательно, ~~получить~~ площадь этого четырехугольника равна $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{\sqrt{d+1}-\sqrt{d-1}}{4}$

Следовательно, при увеличении d эта величина убывает, значит максимум достигается при $d=1$. Тогда $S_{max} = \frac{\sqrt{2}-0}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Теперь приведем пример такой клетки.

Рассмотрим $a=0$, $b=1$, очевидно, что ее вершины ~~[illegible]~~ лежат внутри страницы и площадь получается как надо.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$ см^2

13-10-69-70
(129.11)

Чистовик
№1

$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x$

$\sin x \geq 0, \cos x \neq 0$

$3 - 3tg^2x = 8\sin^2 x$

$3 - \frac{3\sin^2 x}{(1-\sin^2 x)} = 8\sin^2 x$

Пусть $t = \sin^2 x$

$3 - \frac{3t}{1-t} = 8t$

$3 - 3t - 3t = 8t - 8t^2$

$8t^2 - 14t + 3 = 0$

$(4t-1)(2t-3) = 0$

$2\sin^2 x = 3$ не имеет решений,

тогда
$\sin^2 x = \frac{1}{4}$

$\sin x = \frac{1}{2}$, т.к $\sin x \geq 0$ по ограничениям

Тогда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

№4 чистовик

Поймем, когда $\sin kx$ касается верхней или нижней сторон области, то есть $\sin kx = 1$ или $\sin kx = -1$, это бывает когда $\cos kx = 0$, то есть $kx = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$k = 11$ $k\pi x$ пробегает значение от 0 до 11π, а то есть 11 точек нужного нам вида.

Аналогично $\sin 13\pi x$, $\sin 15\pi x$ коснутся его 13 и 15 раз соответственно, причем в разных точках.

Поймем когда графики пересекутся

Пусть $\sin a\pi x = \sin b\pi x$

$\cos\left(\frac{(a+b)}{2}\cdot\pi x\right)\cdot\sin\left(\frac{(a-b)}{2}\pi x\right) = 0$

Если $\sin\left(\frac{(a-b)\cdot\pi x}{2}\right) = 0$, то $\frac{(a-b)\pi x}{2} = \pi\cdot n \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2n}{a-b}$

Если $\cos\left(\frac{(a+b)\cdot\pi x}{2}\right) = 0$, то $\frac{(a+b)\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2n+1}{a+b}$

Пересечение 11 и 13 на $(0\ 1)$

Из синуса $x = \frac{2n}{13-11} = n$, таких точек нет

Из косинуса $x = \frac{2n+1}{24}$ - подходят целые n от 0 до 11

Пересечение 11 и 15 на $(0\ 1)$

Из синуса $x = \frac{n}{2}$ - одна точка

Из косинуса $x = \frac{2n+1}{26}$ - подходят n от 0 до 12 чистовик

но точка $\frac{1}{2}$ в 2-х сериях, поэтому пересечений на 1 ~~...~~ меньше

Пересечения 13 и 15 на (0 1)

Из синуса $x = n$, нет решений

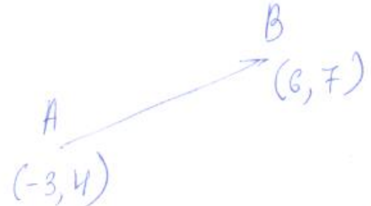
Из косинуса $x = \frac{2n+1}{28}$ - подходит от 0 до 13 т.е 14 решений

Заметим, что рисуя графики одновременно слева на право области будут появлятся при каждом пересечении или касании, тогда

Ответ: $4 + 14 + 13 + 12 + 11 + 13 + 15 = 82$

4 - если обе не пересекались и не касались.

№6



Пусть светлячок находится в точке $(S_x, S_y, 6)$, ~~...~~

$(z : 0 : 3)$, точка на заборе

Тогда проекция света на плоскость будет в точке $\left(1{,}5z - \frac{S_x}{2} ; -\frac{S_y}{2}\right)$ т.к будет подобие с $k = 2$.

Тогда необходимо вычислить только проекции крайних положений и найти площадь

Через A и T: $(1{,}5 \quad -2) = P$

A и C: $(6 \quad -2) = D$

B и D: $(-3 ; -3{,}5) = R$

B и C: $(1{,}5 ; -3{,}5) = Q$

$S(DCPQR) = \frac{1}{4} + \frac{21}{4} + 3 + 3 + \ldots \quad \frac{159}{8}$