0 405356 220001

40-53-56-22
(124.32)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Тушканова Игната Денисовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

90 (Девяносто) [illegible]

40-53-56-22
(124.32)

Задача 1.

ЧИСТОВИК

$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$

Огр.: т.к. ~~...~~ $ctg x$ должен ~~существовать~~ быть определён, то $\sin x \neq 0$.

$$\begin{cases} 3(1-ctg^2x) = 8\cos^2 x & (1) \\ \cos x \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что $1 - ctg^2 x = 1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 2 - \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 2 - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} =$

$= 2 - \frac{1}{\sin^2 x}$.

(1): $3\left(2 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 8(1 - \sin^2 x)$

Замена $t = \sin^2 x \Rightarrow \begin{matrix} t \leq 1 \\ t \geq 0 \end{matrix}$

$3\left(2 - \frac{1}{t}\right) = 8(1-t)$

$6 - \frac{3}{t} = 8 - 8t \quad \Big| \cdot t \qquad (t \neq 0$, т.к. $\sin x \neq 0$ (из огр.))

$6t - 3 = 8t - 8t^2$

$8t^2 - 2t - 3 = 0$

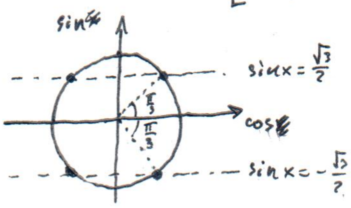
$D/4 = 1 + 3 \cdot 8 = 1 + 24 = 25 = 5^2$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1+5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ — подх.} \\ t = \frac{1-5}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \text{не подх.} \end{array}\right.$$

$t = \frac{3}{4}$

Обр. зам.: $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$



Т.к. $\cos x \geq 0$ (2), то подходят

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k_1 \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k_2 \end{array}\right. \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k_1 \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k_2 \end{array}\right. \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Задача 2.

ЧИСТОВИК

Обозначим $S(n)$ – сумму цифр натурального числа n.

Пусть $n_0 \in A$, тогда $n_0 \vdots S(n_0)$ (т.к. $\frac{n_0}{S(n_0)}$ - целое) и

и $\frac{n_0}{S(n_0)} \vdots 9$.

$$\frac{n_0}{S(n_0)} \vdots 9 \Rightarrow n_0 \vdots 9 \Rightarrow S(n_0) \vdots 9$$

(т.к. нат. число $\vdots 9$ тогда и только тогда, когда сумма его цифр $\vdots 9$)

Тогда, т.к. число n_0 после деления на $S(n_0)$, кратное 9, делится на 9, то n_0 делится на 81.

Док-во: $\left.\begin{matrix} S(n_0) \vdots 9 \\ S(n_0) \in N \end{matrix}\right| \Leftrightarrow S(n_0) = 9k_1$ для некоторого $k_1 \in N$

$$\left.\begin{matrix} \frac{n_0}{S(n_0)} \in N \\ \frac{n_0}{S(n_0)} \vdots 9 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \frac{n_0}{S(n_0)} = 9k_2 \text{ для некот. } k_2 \in N$$

$$\frac{n_0}{S(n_0)} = 9k_2 \Leftrightarrow \frac{n_0}{9k_1} = 9k_2 \Leftrightarrow n_0 = 81k_1k_2 \Leftrightarrow n_0 \vdots 81$$

Т.о. все числа вх. в мнж. A должны дел. на 81.

Первое трёхзначное число, делящ. на 81, это 162 (т.к. $162 = 81 + 81$).

Тогда, прибавл. по 81, получим все трёхзначн. числа дел. на 81.

$\underset{2\cdot81}{162}$, $\underset{3\cdot81}{243}$, $\underset{4\cdot81}{324}$, $\underset{5\cdot81}{405}$, $\underset{6\cdot81}{486}$, $\underset{7\cdot81}{567}$, $\underset{8\cdot81}{648}$, $\underset{9\cdot81}{729}$, $\underset{10\cdot81}{810}$, $\underset{11\cdot81}{891}$, $\underset{12\cdot81}{972}$

(след. число $13\cdot81 = 1053$ уже четырёхзначн.)

~~Т.к. интересн. трёхзначн. числа, то $S(n_0) \le 27$~~

~~162:~~ Проверим для кажд. числа принадлеж. ли оно A:

~~162: $\frac{162}{1+6+2} = \frac{162}{9} = \frac{2\cdot9\cdot9}{9} = 18 \vdots 9 \Rightarrow 162 \in A$~~

~~243:~~

40-53-56-22

Задача 2 (продолж.) ЧИСТОВИК

Для ~~...~~ $n \in \{162, 243, 324, 405, 810\}$:

$S(n) = 9 \Rightarrow$ все подх. $\left(\begin{matrix} n \vdots S(n) \ (\text{т.к. } n \vdots 81 \Rightarrow n \vdots 9) \\ \frac{n}{S(n)} \vdots 9 \ (\text{т.к. } n \vdots 81 \Rightarrow \frac{n}{9} \vdots 9) \end{matrix} \right)$

для $n \in \{486, 567, 648, 729, 891, 972\}$:

$S(n) = 18 = 2 \cdot 9$

$\Downarrow$

подх. только чётные $\left(\text{т.к. } \underset{S(n) \vdots 2}{n \vdots S(n)} \Rightarrow n \vdots 2\right)$

486, 648, 972 $\left(\text{подх. т.к. } \overset{n \vdots S(n)}{\frac{n}{2} \vdots 81} \Rightarrow \frac{n}{\underbrace{18}_{S(n)}} \vdots 9\right)$

Итак, трёхзначн. числа, принадлеж. множ. A (в порядке возр.):

162, 243, 324, 405, 486, ~~567~~ 648, 810, 972.

Сумма второго, пятого и предпосл.:

$243 + 486 + 810 =$

$= 3 \cdot 81 + 6 \cdot 81 + 10 \cdot 81 =$

$= 9 \cdot 81 + 10 \cdot 81 = 20 \cdot 81 - 81 =$

$= 1620 - 81 = 1539.$

Ответ: 1539.

ЧИСТОВИК

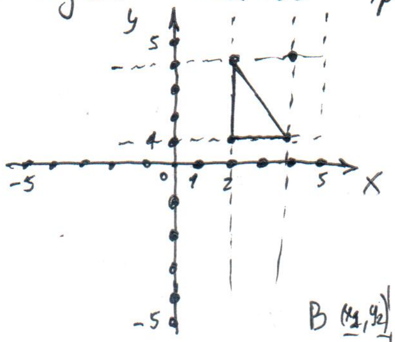
Задача 3.

~~Если~~ Т.к. каждый из катетов паралл. ~~коорд.~~ одной из трёх коорд. осей (различн., т.к. катеты ⊥ друг другу), то плоскость треугольника параллельна одной из коорд. плоскостей (O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}).

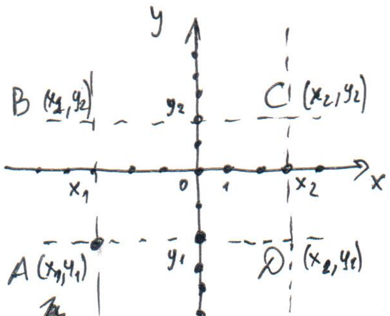
Треуг. параллельных каждой из плоскостей поровну.
(т.к. чтобы получ. одни из др. достаточно перест. коорд. у кажд. из трёх вершин; напр. чтобы получ. из треуг. $\parallel O_{xy}$ треуг. $\parallel O_{xz}$, дост. переставить y и z коорд. каждой верш.)

$$\left(\begin{array}{l} A=(x_0,y_0,z) \\ B=(x_1,y_1,z) \\ C=(x_2,y_2,z) \\ ABC \parallel O_{xy} \\ \triangle ABC - \text{прямоуг.} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \tilde{A}=(x_0,z,y_0) \\ \tilde{B}=(x_1,z,y_1) \\ \tilde{C}=(x_2,z,y_2) \\ \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C} \parallel O_{xz} \\ \triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C} - \text{прямоуг.} \end{array} \right)$$

Найдём кол-во прямоуг. треуг. с верш. из F и лежащие в Oxy:



~~Треуг. с попол. коорд. x, y: $4 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2}$~~



Т.к. ~~…~~ кат. треуг. паралл. осям, то у двух вершин обязаны совпасть x-коорд., а у дв. др. y-коорд.
Тогда выбрав $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [-5,5] \cap \mathbb{Z}$ ($x_1<x_2$) ($y_1<y_2$)
получ. четыре возм. треуг.:

$\triangle ABD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABC$, $\triangle BCD$
(где $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_1,y_2)$, $C=(x_2,y_2)$, $D=(x_2,y_1)$)

$$\text{След. всего } \underbrace{\binom{11}{2}}_{\text{выбр. } x_1,x_2} \cdot \underbrace{\binom{11}{2}}_{\text{выбр. } y_1,y_2} \cdot 4 = \frac{11\cdot 10}{1\cdot 2} \cdot \frac{11\cdot 10}{1\cdot 2} \cdot 4 = (11\cdot 10)^2 = 11^2\cdot 10^2$$

$$\left(\binom{11}{2} = \frac{11!}{2!\cdot 9!} = \frac{11\cdot 10}{1\cdot 2}\right)$$

Тогда ~~треуг~~ прямоуг. треуг. с верш. из F и $\parallel O_{xy}$: $11\cdot 11^2\cdot 10^2 = 11^3\cdot 10^2$ (т.к. можно произв. выбр. одинак. (т.к. $\parallel O_{xy}$) коорд. z для кажд. верш.).

40-53-56-22 (124.52)

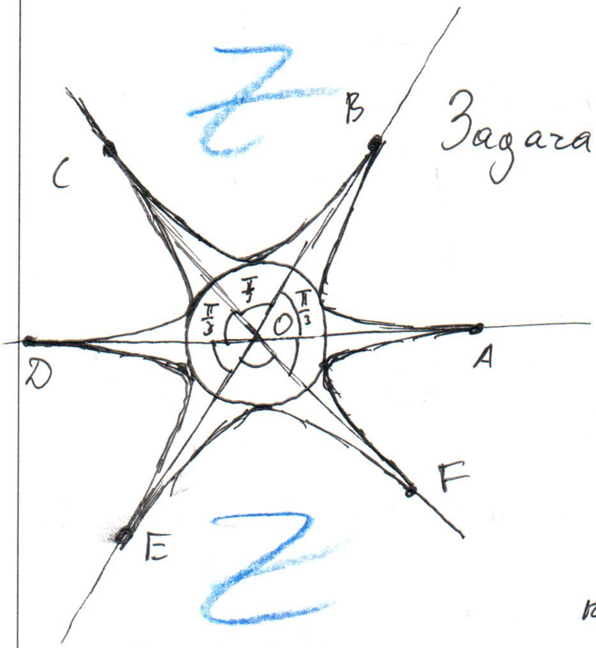
Задача 3 (продолж.).

ЧИСТОВИК

Всего прямоуг. треуг. ~~с кат. ∥ осям~~, у которых каждый из кат. паралл. одн. из осей:

$$3\cdot 11^3\cdot 10^2 = 3\cdot 1331\cdot 10^2 = 399300$$

Ответ: 399300



Задача 5.

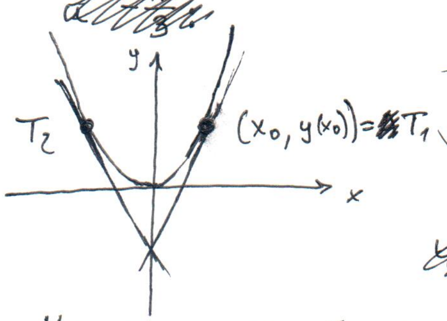
Соед. противоположные вершины шестиуг. прямыми, они пересек. в ~~ц~~ центре ~~впис.~~ впис. окруж. в силу центр. симм. шестиуг.

Т.к. углы ~~шес~~ шестиуг. O, то провед. прямые явл. насат. к параболам (в силу осевой симм.)

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOA = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Без огр. общн. будем считать $C>0$ (т.к. параб. с отриц. C можно перев.)

Рассм. параболу $y=Cx^2$ и найдём насат. ~~в~~ с угл. накл. $\frac{\pi}{3}$



~~прямая касат. с углом накл. $\frac{\pi}{3}$ должна быть вида $y = tg\left(\frac{\pi}{3}\right)x + t$, $t\in\mathbb{R}$.~~

~~$y = \sqrt{3}x + t$.~~

~~Чтобы такая была прямая имела ровно одну~~

Угл. коэф. прямой (являющ. касат.) должен. быть $tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Угл. коэф. насат. к параб. $y = Cx^2$ в т. с абсц. x_0:

$$y'(x_0) = 2Cx_0$$

$2Cx_0 = \sqrt{3} \Rightarrow x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2C} \Rightarrow$ у-е касательной $y = \sqrt{3}(x-x_0) + y(x_0) = = \sqrt{3}x - \frac{3}{2C} + \frac{3}{4C} = = \sqrt{3}x - \frac{3}{4C}$.

$y(x_0) = Cx_0^2 = \frac{3}{4C}$ $\Rightarrow$ точка кас. $T_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2C}, \frac{3}{4C}\right)$

Касат. у угл. накл. $-\frac{\pi}{3}$, т.е. с угл. к. $tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ будет в точке с абсц. $-x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2C}$ (т.к. $y'(-x_0) = -2Cx_0 = -y'(x_0) = -\sqrt{3}$).

$y(-x_0) = C(-x_0)^2 = Cx_0^2 = \frac{3}{4C}$ $\Rightarrow$ точка кас. $T_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2C}, \frac{3}{4C}\right)$

Задача 5 (продолж.) ЧИСТОВИК

Следов. её у-е $y = -\sqrt{3}\,(x-(-x_0)) + y(-x_0) =$

$$= -\sqrt{3}x - \frac{3}{2c} + \frac{3}{4c} = -\sqrt{3}x - \frac{3}{2c}.$$

Точки касания – будущие верш. шестиуг., поэтому $T_1T_2 = 1$

$T_1T_2 = \overset{\text{расст.}}{d}(T_1, T_2) = \sqrt{(x_0+x_0)^2 + (y_0-y_0)^2} =$

$= |x_0+x_0| = 2x_0 = \frac{\sqrt{3}}{c}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{c} = 1 \Rightarrow c = \sqrt{3}.$

Заметим, что касательные ($y = \sqrt{3}x - \frac{3}{2c}$ и $y = -\sqrt{3}x - \frac{3}{2c}$) пересек. в точке $(0, -\frac{3}{2c}) \overset{def}{=} I$.

~~Рад впис.~~ Точка I при постр. шестиуг. так как опис. в усл. совп. с (·) O (если зафикс. тек. параболу и все ост. расп. отн. неё)

Тогда рад. впис. окружн. r равен раст. о I до верш. параболы $(0,0)$:

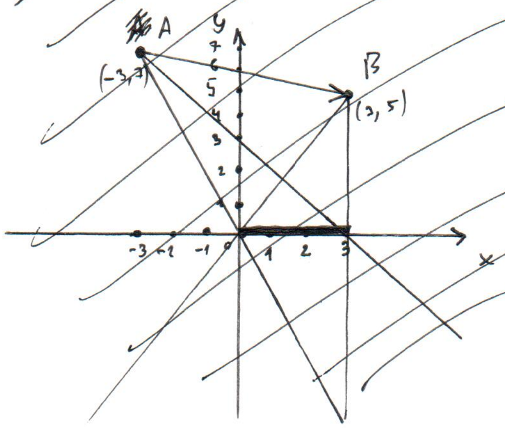
$$r = d\left(\left(0, -\frac{3}{2c}\right), (0,0)\right) = \frac{3}{2c} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

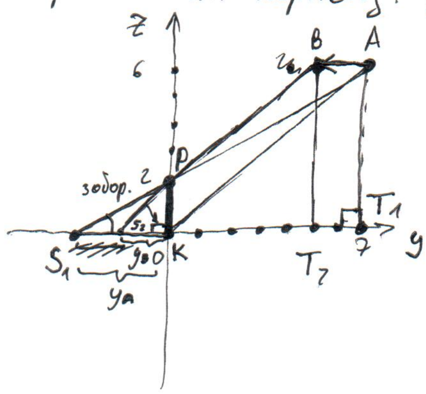
Задача 6.

чистовик

В проекции на гориз.:



В пр. на пл. перпенд. забору:



Пусть, когда кузнечик в (.)A тень от забора по Oy имеет длину y_A:

$$\frac{y_A}{y_A+7}=\frac{2}{6} \quad (\text{т.к. } \triangle S_1PK \sim \triangle S_1T_1A)$$

$$3y_A = y_A + 7$$

$$2y_A = 7$$

$$y_A = \frac{7}{2}.$$

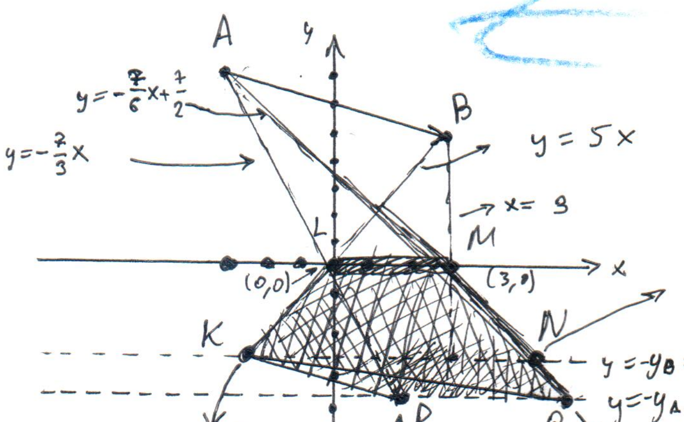
А когда в (.)B — длину y_B:

т.к. $\triangle S_2PK \sim \triangle S_2T_2B$: $\frac{y_B}{y_B+5}=\frac{2}{6}$

$$3y_B = y_B + 5$$

$$2y_B = 5 \Rightarrow y_B = \frac{5}{2}.$$

В пр. на гориз.:



$$-\frac{7}{6}x = -\frac{7}{2}-\frac{5}{2}$$

$$\frac{7}{6}x = \frac{12}{2}$$

$$x = \frac{36}{7} \Rightarrow N = \left(\frac{36}{7}, -\frac{5}{2}\right).$$

$$5x = -\frac{5}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$K = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$-\frac{7}{3}x = -\frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$P = \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$$

$$-\frac{7}{6}x + \frac{7}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$-\frac{7}{6}x = -7$$

$$x = 6$$

$$Q = \left(6, -\frac{7}{2}\right)$$

Задача 6. ЧИСТОВИК

$$S_{\text{тени}} = S_{ALMN} + S_{KNQP} = \frac{LM+KN}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{PQ+KN}{\cancel{KN}\,2} \cdot \underset{\left(\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\right)}{1} =$$

$$= \frac{3 + \frac{36}{4} + \frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{5}{2} + \quad 6 - 3.2$$

ЧЕРНОВИК

$$\begin{array}{r} 162 \\ +\ 81 \\ \hline 243 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 243 \\ +\ 81 \\ \hline 324 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 324 \\ +\ 81 \\ \hline 405 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 486 \\ +\ 81 \\ \hline 567 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 567 \\ +\ 81 \\ \hline 648 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 648 \\ +\ 81 \\ \hline 729 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 891 \\ +\ 81 \\ \hline 972 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 972 \\ +\ 81 \\ \hline 1053 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1620 \\ -\ 81 \\ \hline 1539 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 810 \\ +\ 729 \\ \hline 1539 \end{array}$$

$\boxed{\begin{array}{l} a>0 \\ a\neq 1 \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} x>0 \\ x\neq 1 \end{array}}$

$$8x^2\log_a x-\log_x a-2x\le 0$$

$8x^2$

$\cancel{\dfrac{8x^2}{\log_a x}}$

$$8x^2\log_a x-\frac{1}{\log_a x}-2x\le 0.$$

$(-3,7) \to (3,5)$.

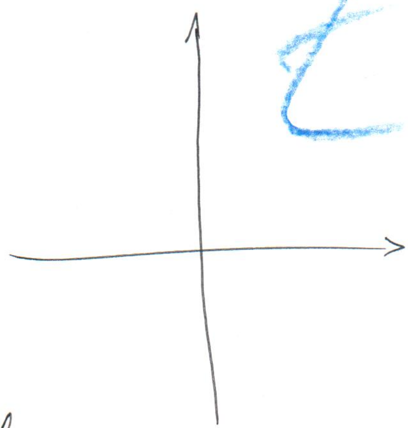
$$x^2+a=-x^2+b.$$

$$2x^2=b-a$$

$$x^2=\frac{b-a}{2}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{b-a}{2}}.$$

$$y=\frac{b-a}{2}+a=\frac{a+b}{2}.$$

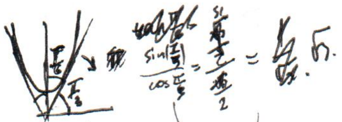


ЧЕРНОВИК

$$\sqrt{3\underbrace{(1-ctg^2x)}} = 2\sqrt{2}\cos x.$$

$$1-ctg^2x = 1-\frac{\cos^2x}{\sin^2x} = 2-\left(1+\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right) = 2-\left(\frac{1}{\sin^2x}\right) = 2-\frac{1}{\sin^2x}.$$

$$\sqrt{3\left(2-\frac{1}{\sin^2x}\right)} = 2\sqrt{2}\cos x.$$



$$\begin{cases} 3(1-ctg^2x) = 8\cos^2x. \quad (1) \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$f(x) = Cx^2$

$f'(x) = 2Cx$

$\sqrt{3}x + t = Cx^2$

(1): $3\left(2-\frac{1}{\sin^2x}\right) = 8 - 8\sin^2x$

$6 - \frac{3}{\sin^2x} = 8 - 8\sin^2x.$

$6 - \frac{3}{t} = 8 - 8t$

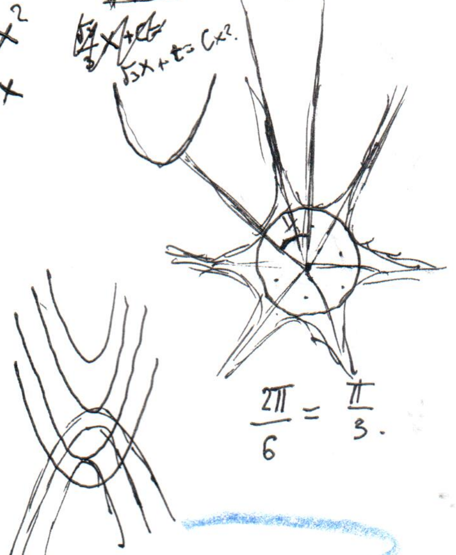
$6t - 3 = 8t - 8t^2.$

$8t^2 - 2t - 3 = 0$

$D/4 = 1 + 3\cdot 8 = 25.$

$t = \frac{1\pm5}{8}$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \\ t = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

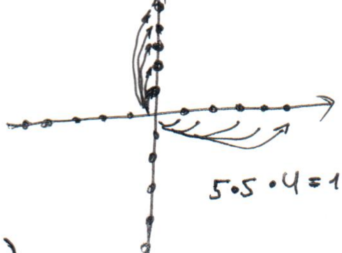


$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$

n $\quad S(n)$ - сумма цифр.

$n \vdots S(n)$

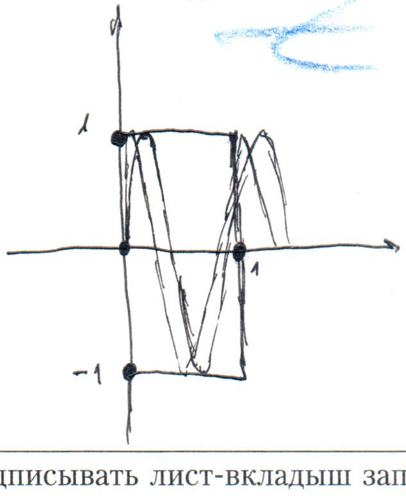
$\frac{n}{S(n)} \vdots 9 \Rightarrow n \vdots 9 \Rightarrow S(n) \vdots 9 \Rightarrow n \vdots 9^2.$



$5\cdot5\cdot4 = 100$

$C(O_{xyz}) = 3(C(O_{xy})\cdot 10) = 3000$

$\frac{100}{1000}$



$\sin k\pi x = 0$

$k\pi x = \pi n$

$x = \frac{n}{k}, n \in \mathbb{Z}$

$\sin t = 0$

$t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$