



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

ПО математике
профиль олимпиады

Уячева Глеба Федоровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

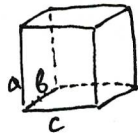
Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

Листовик

13-48-46-31
 (123.22)

1



это 11-пед
 (прямоугольный)

$V = abc$ - объем

$\Sigma = 4(a+b+c)$ - сумма длин всех ребер

$S = 2(ab+bc+ac)$ - обш. площадь поверх-ти

$V + \Sigma + S = 2026, abc + 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) = 2026$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2026 + 8 = 2034 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$

Т.к. $a > b > c$ - попарно различны, то, не нарушая общ-ти,
 $a > b > c$. Заметим, что из чисел $a+2; b+2; c+2$ все ≥ 3 ,

т.к. $a; b; c \in \mathbb{N} \Rightarrow$ есть всего 1 вариант распределения простых дел-лей 2034
 по 3-м множителям $a+2; b+2; c+2$:

$$\begin{cases} c+2=3, c=1 \\ b+2=6, b=4 \\ a+2=113, a=111 \end{cases} \Rightarrow V = abc = 1 \cdot 4 \cdot 111 = 444$$

Ответ: 444

2) Нам не подходят (n/y)-ки, которые:

- 1) касаются всех 4-х сторон, т.к. в этом случае это весь исход. кв-т, а нам нужна (n/y)-ки меньшего размера
- 2) касаются только 2-х противополож. сторон, т.к. тогда оставш. часть распадется на 2 меньших (n/y)-ки
- 3) не касаются ни одной стороны кв-та, т.к. тогда будет дырка

Все остальные (n/y)-ки бывают 3-х видов:

1) $(100 \cdot 100 \cdot 4)$ - столько их всего, т.к. все такие (n/y)-ки строятся по 1 разу для своего угла

касаются только 2-х соседних сторон

2) $(100 \cdot 4)$ - столько их всего, т.к. построим по 1 разу для своей центр. из прилегающих сторон

касаются только 3-х соседних сторон

3) $(100 \cdot 100 \cdot 99) \cdot 4$ - всего их столько, т.к. построим по 1 разу для своей прилегающ. стороны

касаются только 1-ой стороны

т.к. складать 2 стороны нашего (n/y)-ки не могут

Итого:

$100 \cdot 100 \cdot 4 + 100 \cdot 4 + 100 \cdot 100 \cdot 99 \cdot 4 = 400040$

Ответ: 400040

4) $\log_2 a \cdot \log_a 2 = 1$, т.к. если $\log_2 a = p \Rightarrow 2^p = a$; $\log_a 2 = q \Rightarrow a^q = 2 \Rightarrow (2^p)^q = 2$, $pq = 1$

2) $a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 = a^{2x} - 2a^{x+1} - (a^{x+1} - 2a^2) = a^{x+1}(a^{x-1} - 2) - a^2(a^{x-1} - 2) = a^2(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)$

3) $u_3 \cap u_1 \cap u_2: \dots = a^2(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2) \cdot \log_a 2 \geq 0$

*: не знаем пока, в каком порядке

точки перелома левой части:

$$\begin{cases} a^{x-1} = 1, & x-1 = \log_a 1, & x = \log_a 1 + 1 \\ a^{x-1} = 2, & x-1 = \log_a 2, & x = \log_a 2 + 1 \\ \log_a 2 = 0, & a^0 = 2 - \text{невозм, т.к. } a^0 = 1 \\ a^2 = 0, & a = 0 \Rightarrow \text{при } a = 0 \text{ всегда верно исход. нер-во,} \\ & \text{а у нас реш-ем должны быть конст. отр-к} \\ & \Rightarrow \text{считаем } a \neq 0 \end{cases}$$

4) Наме реш-е - конст. отр-к. При этом $\log_a 1 + 1 \neq \log_a 2 + 1$, т.к. иначе $1 = 2 \Rightarrow$ знаки наших 3-х промежутков переменяются \Rightarrow хотим $\log_a < 0$, тогда при $x > \max(\log_a 1 + 1; \log_a 2 + 1)$ у нас был знак \ominus , а для $x \in [\log_a 1 + 1; \log_a 2 + 1]$ знак был \oplus .

Т.е. $\log_a 2 < 0$ - зап. множ-ль лев. части, определяющий перемену знаков, т.к. $a^2 \geq 0$ - на знак не влияет

$$\begin{cases} \log_a 2 - \log_a 1 = 2026 \Rightarrow \log_a \left(\frac{2}{1}\right) = \log_a 2 = 2026, & a^{2026} = 2, & a = \sqrt[2026]{2} \\ \log_a 1 - \log_a 2 = 2026 \Rightarrow \log_a \left(\frac{1}{2}\right) = 2026 & \text{но: } \log_a 2 < 0, \text{ т.е. } \log_a 2 \neq 2026 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \text{тогда } a \text{ не подходит} \end{cases}$$

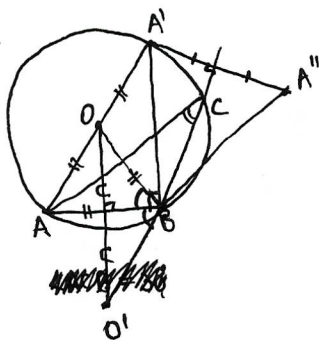
$a^{2026} = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$ или $a = 2^{-\frac{1}{2026}}$

Ответ: $a = 2^{-\frac{1}{2026}}$

Т.е. $\log_a 2 = -\frac{1}{2026} < 0$

\Rightarrow т.к. $a \neq 0$, тогда a подходит

3



1) Пусть A' - diam. противоположна A

$\Rightarrow A; O; A'$ на одной прямой

$AA' - \text{diam} \Rightarrow \angle ABA' = 90^\circ$

$AA'CB$ - впис 4-л-к $\Rightarrow \angle ACB = \angle AA'B = 30^\circ$
 $\angle ABA' = 90^\circ$

2) $\triangle AOB$ - р/с, $\angle OBA = 60^\circ$

O' - симм-на O относ-но $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABO' = \angle ABO = 60^\circ$

3) $A''; B; O'$ на одной прямой, $\angle A''BO' = 180^\circ$

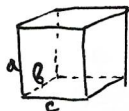
$\Rightarrow \angle A''BA' = 180^\circ - \angle ABA' - \angle ABO' =$

$= 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow \angle A''BC = \frac{1}{2} \angle A''BA' \text{ (т.к. } A'' \text{ - симм-на } A' \text{ относ-но } BC)$

4) $AA'CB$ - впис $\Rightarrow \angle A'AC = \angle A'BC \Rightarrow \angle CAB = \angle OAB - \angle A'AC = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ \Rightarrow \angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

Ответ: 105°

Герников



это 11-угольник

a, b, c - попарно различные
 $a, b, c \in \mathbb{N}$

$abc = V$ - объем

$4(a+b+c) = \Sigma$ - сумма длин всех ребер

$2(ab+bc+ca) = S$ - сумма площадей поверхностей

$V + \Sigma + S = 2026$, $abc + 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) = 2026$

$\min(V) = ?$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2026 + 8 = 2034$

ни один из множителей $a+2, b+2, c+2$ не равен 2 \Rightarrow наименьший равен 3, т.к. если 6, то остается только 2 множителя 3×113 на 2 ост. места, боковых 6, 4

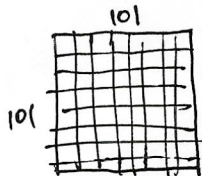


$\begin{cases} c+2=9 \Rightarrow b+2=2, 4 \\ c+2=6 \Rightarrow b+2 \end{cases}$

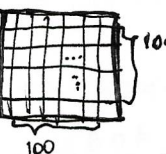
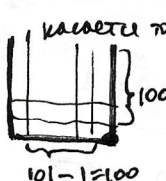
Пусть, т.к. a, b, c попарно различные, не могут быть, $a > b > c \Rightarrow$ ~~составим~~ $c+2$ не 2 (иначе $c=0 \notin \mathbb{N}$) $\Rightarrow c+2=6; 3$

$\begin{array}{r} 113 \overline{) 2034} \\ \underline{226} \\ 774 \\ \underline{774} \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 113 \overline{) 2034} \\ \underline{226} \\ 774 \\ \underline{774} \\ 0 \end{array}$

$2034 = 2 \cdot 1017$



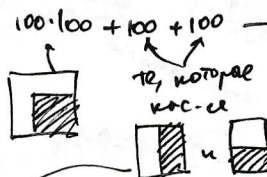
- нет формул \Rightarrow одна сторона вырезаемого п/у-ка всегда прилежит к стороне кв-та 101×101
- если прилежит к 3-м сторонам, то можно (формулы не будет, на 2 части не разойдется)
- если прилежит к 2-м против. сторонам, и не прилежит к 3 сторонам, то разойдется на 2 части
- если прилежит к углу (2 соседние стороны) \Rightarrow 1 и 4 случая подходят. ИМ:



касается только 1 стороны
касается 2-х сторон
касается 3-х сторон
касается 4-х сторон
касается краев формулы, формулы нет (иначе вырежем весь кв-т 101×101)



считаем отделимо, но: те, которые не кас-ся друг друга 2-х сторон, посчитаем 2-х раз (!)



при одном угле.

1 $100 \cdot 100 \cdot 4$ - во формуле считаем по 1 разу угол
2 $100 + 100 + 100 + 100$ - посчитаем по 1 разу угол



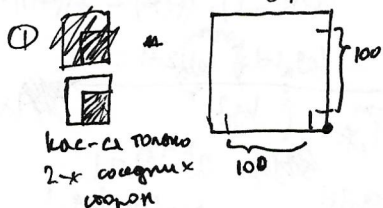
100 \cdot 100 \cdot 99
т.к. совпадают 2 стороны (п/у)-ка не могут

3 $4 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 99$ - посчитаем по 1 разу угол
 $\begin{array}{r} 3996 \\ \times 4 \\ \hline 15984 \end{array}$
т.к. совпадают 2 стороны (п/у)-ка не могут

нам не подходит (п/у)-ки, которые или касаются всех 4-х сторон (тогда это весь исход. кв-т, а мы должны вырезать меньший по размеру), которые кас-ся только 2-х противополож. сторон (иначе ~~разойдется~~ разойдется на 2 ост. части).

остаточных (п/у)-ка, и которые не касаются ни одной стороны (тогда это будет "формула").

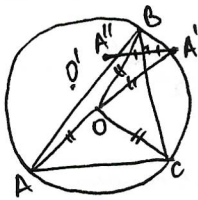
Все ост. части (п/у)-ки являются 3-х видов:



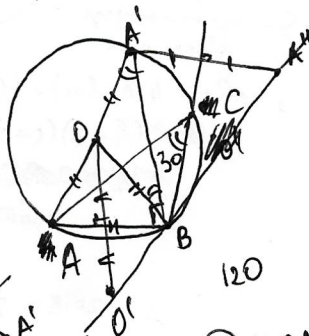
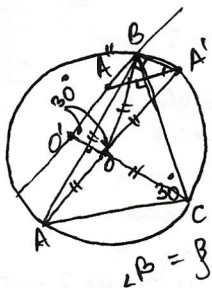
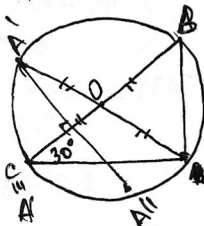
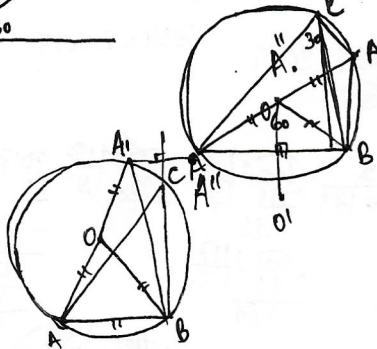
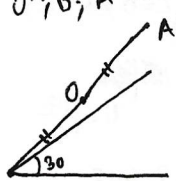
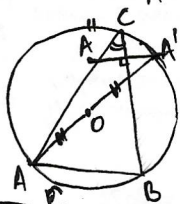
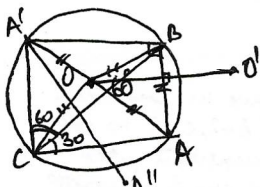
их всего $100 \cdot 100 \cdot 4$, т.к. вытиски считаем по 1 разу

$a^p = 1$
 $a^q = 2$
 $a^{q-p} = 2$
 $\begin{array}{r} 40000 \\ 400 \\ \hline 3960000 \\ 4000400 \end{array}$

Герончик



$\angle C = 30^\circ$
 $O'; B; A''$ на одной прямой



① $\angle ABA' = 90^\circ$

② $\angle ABO' = \angle ABO = 60^\circ$
 - \rightarrow p/c δ -ка

③ $O'; B; A''$ на одной прямой \Rightarrow

$\log_2 a \cdot \log_a 2 = 1 \Rightarrow \log_2 a = \frac{1}{\log_a 2} \Rightarrow \angle O'BA'' = 180^\circ$

$(a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2) \log_a 2 \geq 0$
 $-2a^{x+1} - a^{x+1}$

$a^{x+1} (a^{x-1} - 2) - a^{x+1} (a^{x-1} - 2)$
 $= a^2 (a^{x-1} - 1) (a^{x-1} - 2)$

$a^2 (a^{x-1} - 1) (a^{x-1} - 2) \cdot \log_a 2 \geq 0$

$(a^{x-1} - 1) (a^{x-1} - 2) \cdot \log_a 2 \geq 0$

$f(x) = a^{x-1} - \text{вырастет, вынужд. вниз}$
 $(f(x) - 1) (f(x) - 2) \cdot p \geq 0$ при $a > 1$

$a^p = 2$

$4^{\frac{1}{2}} = 2$

$f(p+1) = a^p = 2$

$(f(x) - 1) \cdot (f(x) - f(p+1)) \cdot p \geq 0$

$\log_a 1 + 1 = \log_a 2 + 1$

$a^{x-1} = 2$

$x - 1 = \log_a 2$

$x = \log_a 2 + 1$

$a^{x-1} = 2$
 $x = \log_a 2 + 1$

$\log_a 2 - 1 = 2026$
 $\log_a 2 = 2027$
 $a^{2027} = 2$

$\log_2 2 + 1$
 тогда верно
 $\Rightarrow a = 2, p = 0 \Rightarrow q = 1$

$p+1 = q \Rightarrow a^{p+1} = 2$
 $a^1 = 2; a^2 = 2$

$\log_a 1 + 1 = \log_a 2$

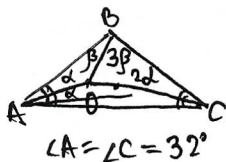
Заметим, что реш-е может быть $\log_a x \Rightarrow$
 \Rightarrow т.к. \oplus или \ominus чертятся, нам нужно
 провер $\log_a 1 + 1 = \log_a 2$

(т.к. минимум 2 точки из наших 3-х точек совпадают не могут: \dots)

В эту монотонность $\log_a x$
 x от меньше той, когда компит 2.

$\log_a 1 < \log_a 2$,
 т.к. степень, в которую мы возведем a , чтобы получить 1, \neq

$\log_a 1 + 1 - \log_a 2 + 1$
 $\log_a 2$
 конец этой разнице пока не узнаем

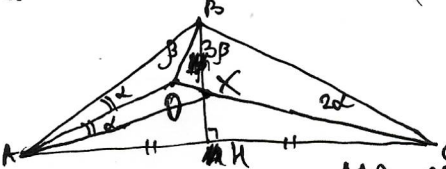


$\angle A = \angle C = 32^\circ$

$4\beta = 180 - 2 \cdot 32 = 116 \Rightarrow \beta = \frac{116}{4} = 29^\circ$

$\Rightarrow \angle BOA = 180 - \alpha - \beta$

$\angle BAO = \alpha$



знаем $\angle ABO$, $\angle OBA = x$

2) $\angle OXA = \dots$

$\angle BAC + \angle BCA - 4\alpha = 64 - 4\alpha$ (как внеш. в $\triangle AXC$)

3) $\angle AXH = 90 - (32 - 2\alpha) = 58 + 2\alpha$

4) $4\beta = 180 - 2 \cdot 32 = 116, \beta = \frac{116}{4} = 29^\circ$

5) $\angle AOX = 180 - \alpha - \angle OXA = 180 - \alpha - (58 + 2\alpha) = 122 - 3\alpha$

$\angle BOA = 180 - 2\alpha - 3 \cdot 29 = 93 - 2\alpha$

$\angle AOB = 360 - \angle AOX - \angle BOC = 360 - 122 + 3\alpha - 93 + 2\alpha = 45 + 5\alpha$

$\angle BAO = \alpha$

$\angle AOB = 180 - \alpha - 29 \Rightarrow$

$\Rightarrow 45 + 5\alpha = 180 - \alpha - 29$

$6\alpha = 180 - 29 - 45$

$6\alpha = 106$

$\alpha = \frac{106}{6} = \frac{53}{3}$

$\frac{45}{29} \quad \frac{180}{74} \quad \frac{360}{45}$

$58 + 2\alpha = 2\alpha + \frac{180 - 64}{2}$

$180 - 29 - \alpha = \dots$

$\angle AOX = 180 - \alpha - \angle OXA = 180 - \alpha - (58 + 2\alpha) = 122 - 3\alpha$

$\angle BOA = 180 - 2\alpha - 3 \cdot 29 = 93 - 2\alpha$

$\angle AOB = 360 - \angle AOX - \angle BOC = 360 - 122 + 3\alpha - 93 + 2\alpha$

ii) Отложим $\angle OAX$ ($X \in BH$, где H - сев AC):

$\alpha = \angle BAO = \angle OAX \Rightarrow \angle BAX = \angle BCO$

\Rightarrow т.к. $\angle BAC = \angle BCA \Rightarrow \angle XAC = \angle OCA$

$\triangle XAC$ - p/6 , AX и OC пересекаются на высоте-медиане BH , т.е. C, X, O на одной прямой