0 361646 170008

36-16-46-17
(129.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс 3

Место проведения Уфа
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Фаирушина Артёма Айратовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

70 (семьдесят)

Черновик

1) $\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$

ОГР: $\cos x \geq 0$, $ctg^2 x \leq 1$ => $x \in [-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k]$, $x \in [\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k]$

$ctg x$ => $x \neq \pi k$

$3 - 3ctg^2x = 8\cos^2 x$

$3 = \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} + 8\cos^2 x$

$3 = \frac{3\sin^2 x + 8\cos^4 x}{\cos^2 x}$ => $\frac{3\sin^2 x - 3\cos^2 x + 8\cos^4 x}{\cos^2 x} = 0$

$\frac{3 - 6\cos^2 x + 8\cos^4 x}{\cos^2 x} = 0$

$\frac{D}{2} = 9 - 24$

$1 - ctg^2 x =$

$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$

$3 - \frac{3\cos^2 x}{\sin^2 x} = 8\cos^2 x$

$\frac{3\sin^2 x - 3\cos^2 x - 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x} = 0$

$3 - 6\cos^2 x - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x = 0$

$8\cos^4 x - 14\cos^2 x + 3 = 0$

$\frac{D}{4} = 49 - 24 = 25$ => $\cos^2 x = \frac{7 \pm 5}{8} = \left[\begin{array}{l} \frac{12}{8} \ ? \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\cos x = \frac{1}{2}$, $\cos x = -\frac{1}{2}$ => $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$ — X из-за огр

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

2) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$

$S(n)$ – сумма цифр

$\frac{a_i}{S(a_i)} = k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \vdots 9$

a_i – трёхзнач. => $a_i = k \cdot 100 + n \cdot 10 + m$ (k, n, m – цифры)

$\frac{100k + 10n + m}{k+n+m} = \frac{99k + 9n}{k+n+m} + 1$ => $k+n+m \vdots 9$ для выпол. условия

$k+n+m = 9$ (1)
$k+n+m = 18$ (2)
$k+n+m = 27$ (3)

$9\left(\frac{11k+n}{k+n+m}\right) + 1$

(1): $11k + n + 1 \vdots 9$, $k+n \leq 9$

$2k + n + 1$, $k=1$, $n=6$, $m=2$

k	n	m
=2	=4	3
3	2	4
4	0	5
5	7	X
6	5	X
7	3	x
8	1	0

(2): $k=4$, $n=8$, $m=6$
$k=5$, $n=$ X
$k=6$, $n=4$, $m=8$
$k=7$, $n=11$ X
$k=8$, $n=0$ X
$k=9$, $n=7$, $m=2$

$46 + 8 = \frac{9+9}{2} + 46$

(3) $k = n = m = 9$:

$\frac{11 \cdot 9 + 9}{3} + 1 = 33 + 3 + 1 = 37$ X

Подходят: 162, 243, 324, 405, 810, 486, 648, 972

$243 + 648 = 891$, $891 + 972 = 1863$

(2): $\frac{11k+n}{2} + 1 \vdots 9$ => k и n одной чётности => $k+n \vdots 2$

$k+n \geq 9$; $k+n \leq 18$

$\frac{11k+n}{2} = 5k + \frac{(k+n)}{2} + 1$

$k=1$, $n=5$ X
$k=2$, $n=12$ X
$k=3$, $n=1$ X

Ответ: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972; $243 + 648 + 972 = 1863$

Чистовик

№1

$$\sqrt{3(1-ctg^2x)}=2\sqrt{2}\cos x$$

ОГР: $\begin{cases}\cos x\geq 0\\ ctg^2x\leq 1\\ \sin x\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\in[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k]\\ x\in[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k]\\ x\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Учитывая ОГР, возводим оба выражения в квадрат:

$3(1-ctg^2x)=8\cos^2x$

$3-\frac{3\cos^2x}{\sin^2x}=8\cos^2x$

$\frac{3\sin^2x-3\cos^2x-8\cos^2x\cdot\sin^2x}{\sin^2x}=0\ \Big|\cdot\sin^2x$, т.к. $\sin x\neq 0$

$3\sin^2x-3\cos^2x-8\cos^2x\cdot\sin^2x=0$

$3-6\cos^2x-8\cos^2x(1-\cos^2x)=0$

$8\cos^4x-14\cos^2x+3=0$

~~$\frac{D}{4}=49-24=25\Rightarrow\cos^2x=$~~ Замена: $\cos^2x=t$, тогда:

$8t^4-14t^2+3=0$ – биквадрат. ур-ние

$\frac{D}{4}=49-24=25\Rightarrow t^2=\frac{7\pm5}{8}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t^2=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}\\ t^2=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}\end{array}\right.\xrightarrow{\text{обр. замена}}\left[\begin{array}{l}\cos^2x=\frac{3}{2}-?\ \times\ (\cos^2x\leq1)\\ \cos^2x=\frac{1}{4}-\checkmark\end{array}\right.$

$\cos^2x=\frac{1}{4}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=-\frac{1}{2}\text{ – не подходит из-за ОГР}\end{array}\right.$

$\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+2\pi k\\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+2\pi k\\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

№2

$A=\{a_1,\dots a_n,\dots\}$

Пусть $S(n)$ – сумма цифр числа $n\in\mathbb{N}$, тогда по условию:

$\frac{a_i}{S(a_i)}=k\ ;\ k\in\mathbb{N},\ k\ \vdots\ 9$

a_i – трёхзначное число, тогда представим a_i как $100l+10n+m$,

$l\in\{1,2,\dots,9\};\ n,m\in\{0,1,\dots 9\}$. Значит: $\frac{100l+10n+m}{l+n+m}=k$

$\frac{100l+10n+m}{l+n+m}=\frac{99l+9n}{l+n+m}+1\ \vdots\ 9$

Если $l+n+m\not\vdots\ 3$, то $\frac{99l+9n}{l+n+m}\ \vdots\ 9$, а $\frac{99l+9n}{l+n+m}+1\not\vdots\ 9$,

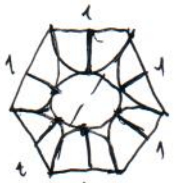
Если $l+n+m\not\vdots\ 9$, но $l+n+m\ \vdots\ 3$, то $\frac{99l+9n}{l+n+m}=3r,\ r\in\mathbb{N}$; тогда $3r+1\not\vdots\ 3\Rightarrow$
$\Rightarrow 3r+1\not\vdots\ 9$

36-16-46-17 (129.?)

Черновик

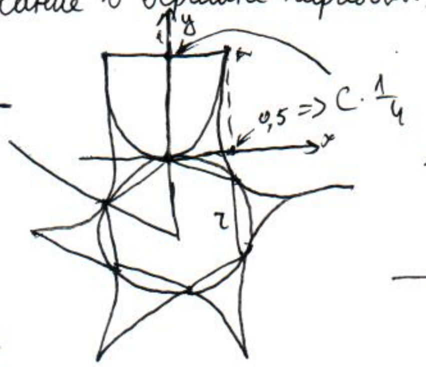
2) $l+n+m \vdots 3 \Rightarrow 3\cdot r+1 \vdots 9$

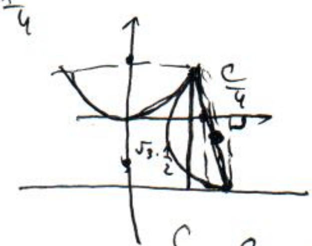
5)

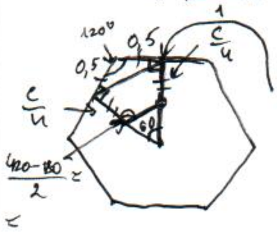


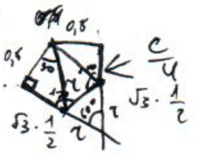
Cx^2

касание в вершине параболы, из-за по симметрии иначе пересеч. вторую противопол. параболу



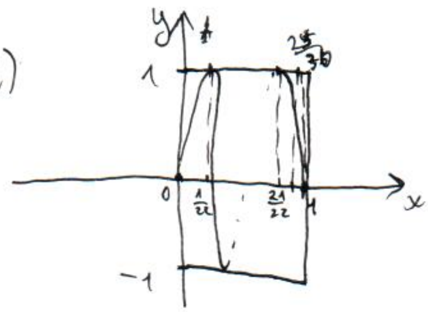






$\frac{C}{4} \to \frac{C}{4} - \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}$

4)



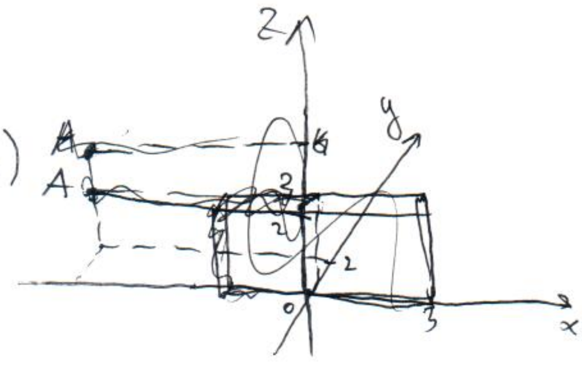
$y = \sin 11\pi x$; $\sin 11\pi x = 1 \Rightarrow 11\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

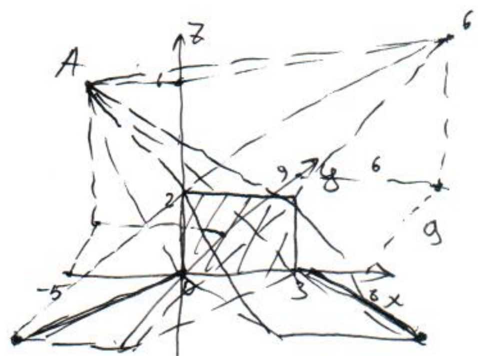
$x = \frac{1}{22} + \frac{2k}{11} \Rightarrow x = \frac{1}{22}, \frac{5}{22}, \ldots, \frac{21}{22}$

$y = \sin 15\pi x$; $x = \frac{1}{30} + \frac{2k}{15}$

$y = \sin 17x$; $x = \frac{1}{34} + \frac{2k}{17}$

6)





Чистовик №2 (продолжение)

Получается, для удовлетворения условия: $l+n+m \vdots 9$

Возможны 3 случая:

1) $l+n+m = 9$, тогда $l+n \le 9$

$11l+n+1 \stackrel{?}{\vdots} 9$

$2l+n+1$

Т.к. $l+n \le 9$, то $2l+n+1 \le l+10 \le 19$, значит $\left[\begin{array}{l} 2l+n+1=9 \\ 2l+n+1=18 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2l+n=8 \\ 2l+n=17 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} l=0, n=8 \; X \\ l=1, n=6 \Rightarrow m=2 \\ l=2, n=4 \Rightarrow m=3 \\ l=3, n=2 \Rightarrow m=4 \\ l=4, n=0 \Rightarrow m=5 \\ l=4, n=9 \; X, \text{т.к. } l+n \le 9 \\ l=5, n=7 \; X \\ l=6, n=5 \; X \\ l=7, n=3 \; X \\ l=8, n=1 \Rightarrow m=0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ подходящие числа: 162, 243, 324, 405, 810

2) $l+n+m=18$, тогда ~~$l+n \ge 9$~~ $9 \le l+n \le 18$; $l+n \vdots 2$

min знач. l — больше не подходит, т.к. тогда $n>9$!!

$\frac{11l+n}{2}+1 \stackrel{?}{\vdots} 9$

$5l+\frac{l+n}{2}+1 \stackrel{?}{\vdots} 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l=1, n=5 \; X \\ l=2, n=12 \; X \\ l=3, n=1 \; X \\ l=4, n=8 \; \checkmark \Rightarrow m=6 \\ l=5, n=17 \; X \\ l=6, n=4 \; \checkmark \Rightarrow m=8 \\ l=7, n=11 \; X \\ l=8, n=0 \; X \\ l=9, n=7 \; \checkmark \Rightarrow m=2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ подходящие числа: 486, 648, 972

3) $l+n+m=27 \Rightarrow l=n=m=9$

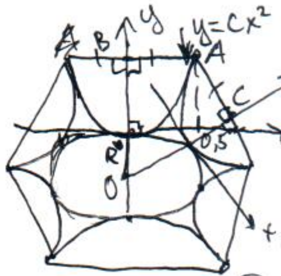
$\frac{11l+n}{3}+1 \stackrel{?}{\vdots} 9 \Rightarrow \frac{99+9}{3}+1 = 33+3+1 \not\vdots 3 \Rightarrow \not\vdots 9$

Итого: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972

$243+648+972=1863$

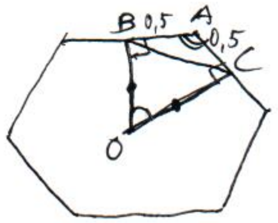
Ответ: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972; $a_2+a_6+a_8=1863$

№5



Найти: R

Р-е: Из-за симметрии окружность касается парабол в их вершинах (иначе окр-сть пересечет противоположную параболу в 2 точках). Тогда введём систему координат с центром в вершине одной из парабол. Так как шестиугольник симметрич. и равностор., ось ординат пересечёт сторону



№5 (продолжение) Чистовик

шестиугольника (в который вписана фигура) в середине и будет перпендикулярна ей, значит вершина (обозначим за т.A) шестиугольника будет иметь координаты: т. $A = (0{,}5;\ C \cdot \frac{1}{4})$.

Также, отметим т. пересечения оси y и стороны за т.B

Введём аналогичную сис. коорд. для „соседней" параболы и отметим т. пересеч. оси ординат со стороной шестиугольника как т. C.

Пусть т. O – центр окр-сти, впис. в фигуру из парабол, тогда т. O ∈ обеим системам координат

Рассмотрим получившийся четырехугольник ABOC: $\angle ABO = \angle ACO = 90°$ (сис. коорд. ⊥ стор.); $\angle BAC = 120°$ (шестиуг. равностор. и симметр. => прав.) => $\angle BOC = 60°$

По теор. косинусов:

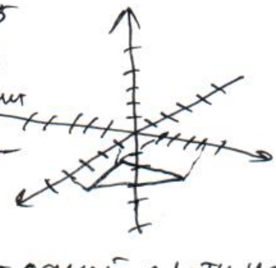
$BC = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$

ΔOBC – равнобедр., $\angle BOC = 60°$ => ΔBOC – равностор. => $BO = OC = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$ => радиус окр-сти $R = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{C}{4}$

Ответ: $R = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{C}{4}$

№3

~~Найдём все треугольники, чьи катеты не превосходят 5 и являются целыми (верш. в цел.т. => кат. тоже в цел. точках из-за парал-сти осям; из этого Δ принадлежит 1 из трёх плоскостей):~~ ~~3,4,5 единственный подхо-дящий~~ Δ. подходящих прямоуг. треуг.

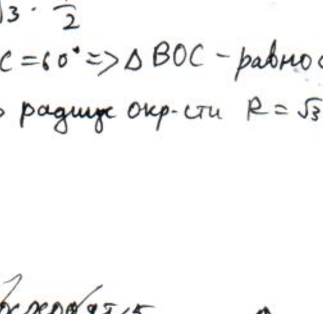


Т.к. катеты параллельны осям, они принадлежат одной пл-ти из 3 возможных для них

Тогда Рассмотрим кол-во прямоуг. Δ, которые можно построить в 1 такой пл-сти:

Кол-во треугольников вида ◺: $10 \cdot 10 + 2 \cdot 9 \cdot 10 + \ldots + 2 \cdot 9 \cdot 1 + 9 \cdot 9 + \ldots + 1 \cdot 1 = 10(10 + 2 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2}) + 9 \cdot (9 + 2 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2}) + \ldots + 1 = 10^3 + 9^3 + \ldots + 1^3 = (1 + 2 + \ldots + 10)^2 = \left(\frac{11 \cdot 10}{2}\right)^2 = 55^2$

т.B в (–5;–5); т.B в (–5;–4) или (–4;–5); т.B в (–5;4) или в (4;–5); т.B в (–4;–4); т.B в (4;4)



Кол-во треугольников ◸, ◹, ◿ столько же, поэтому всего треугольников: $4 \cdot 55^2$

Всего пл-тей, парал. или равных xoy: 11 => всего Δ: $11 \cdot 4 \cdot 55^2$

Столько же треуг. и в 2 др. пл-тях (и парал. им) => кол-во Δ: $3 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 55^2$ Ответ: $3 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 55^2$

Черновик

$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

ОГР: $a > 0, a \neq 1, x > 0, x \neq 1$

$\frac{8x^2 \cdot \log_a^2 x - 1}{\log_a x} - 2x \geq 0$

$\frac{8x^2 \cdot \log_a^2 x - 2x \cdot \log_a x - 1}{\log_a x} \geq 0$

$2x \cdot \log_a x = t \Rightarrow 2t^2 - t - 1 \Rightarrow D = 1+8 = 9 \Rightarrow t = \frac{1 \pm 3}{4} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\frac{(2x\log_a x - 1)(4x\log_a x + 1)}{\log_a x} \geq 0$

$x = a: \frac{(2a-1)(4a+1)}{\log 1} \geq 0 \Rightarrow$ При $a \geq \frac{1}{2}$ – $x = a$ – решение

$a \geq \frac{1}{2}; x > a:$ $(2x \cdot \log_a x - 1)(4x\log_a x + 1)$

$2x \cdot \log_a x - 1 \vee 0$

$2x \cdot \log_a x - \log_a a \vee 0$

$\log_a \frac{x^{2x}}{a} \vee 0 \Rightarrow$ $\frac{(a-1)(\frac{x^{2x}}{a} - 1)\cancel{(a-1)}(\frac{x^{4x}}{a} + 1)}{\cancel{(a-1)}(x-1)} \geq 0$

$\frac{(a-1)(x^{2x} - a)(x^{4x} + a)}{(x-1)} \geq 0$

$a(a^{a-1} - 1) \vee 0$

$a^a \vee a$ $a > 1: > 0$, $a < 1: < 0$

$a \log_a a = 1$

$x > 1: x^{2x} > 1$

$x < 1: x^{2x} < 1$

$a < 1:$

$x^x = t \Rightarrow x = \log_x t$ $x^x = a \Rightarrow x = \log_x a$

$a^{x \log_x a} = a$

$\log_x a - x = 0$

$x^{2x} \vee x$

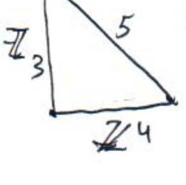
$x(x^{2x-1} - 1) \Rightarrow 2x \geq 1: x^{2x} > x$

иначе <

3) $1 + x$

$4 + x$ $\Rightarrow$ только $\triangle$ 3, 4, 5

$9 + 16 = 25$



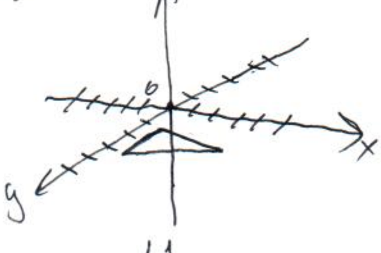
выбор I катета (длиной 3):

$9 \cdot 3$

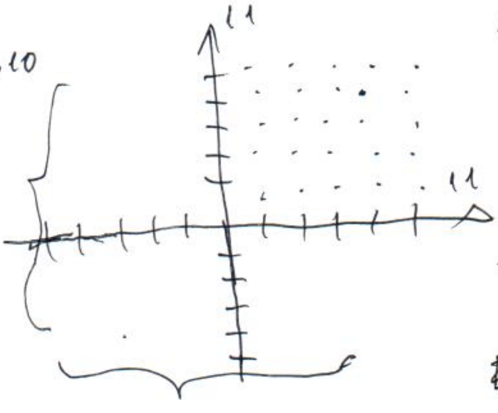
выбор II катета (длиной 4):

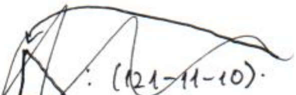
$8 \cdot 2 \cdot 2$

Итого: $9 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 27 \cdot 64 =$



×1
√4
√9
×16
×25
√ $36 + 64 = 100$ — 6, 8, 10
×49
×64
×81
×100





$(121 - 11 - 10)$

$10 \cdot 10 + 9 \cdot 10 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot 10 \cdot 1 +$

$+ 9 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot 8 + 2 \cdot 9 \cdot 7 + \ldots + \ldots + 2 \cdot 9 \cdot 1 +$

$\ldots =$

$= 10(10 + 2 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2}) + 9 \cdot (9 + 2 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2}) + \ldots +$

$+ 1 \cdot 1$

Чистовик

№ 8

$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$ ОГР: $x>0$, $x \neq 1$, $a>0$, $a \neq 1$

$8x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \geq 0$

$\frac{8x^2\log_a^2 x - 2x\log_a x - 1}{\log_a x} \geq 0$

Замена: $2x\log_a x = t$, тогда $2t^2 - t - 1 = (t-1)(2t+1)$

Обр. замена: $\frac{(2x \cdot \log_a x - 1)(4x \cdot \log_a x + 1)}{\log_a x} \geq 0$ (1)

$\Leftrightarrow$

$\frac{(a-1)(x^{2x}-a)(a-1)(x^{4x}+a)}{(a-1)(x-1)} \geq 0$

Заметим, что $x^{2x} = (x^x)^2 > 0 \Rightarrow x^{4x} > 0 \Rightarrow (x^{4x}+a) > 0$

Сократим на $(x^{4x}+a)$, $(a-1)$ в числ. и знам. (по ОГР $a \neq 1$), т.к. при любых знач. x и a знак не помен.

$\frac{(x^{2x}-a)(a-1)}{(x-1)} \geq 0$

При $x \to \infty$ $a>1$: верно $\Rightarrow a<1$, чтобы был полуинтервал (иначе беск. кол-во реш.)

При $x \to$ a $(x^{2x}-a)<0$, $(x-1)<0$, $a-1<0 \Rightarrow$ выр-ние 0

При $x^{2x} \in [a;1)$: $(x^{2x}-a) \geq 0$, $(a-1)<0$, $(x-1)<0 \Rightarrow$ выр-ние $\geq 0 \Rightarrow$ есть полуинтервал ($x \in [k;1)$, $k^{2k}=a$)

Теперь сравним $x^{2x} \vee x \Rightarrow x^{2x} - x \vee 0 \Rightarrow x(x^{2x-1}-1) \vee 0$ (2)

$x>0$; если $x \geq \frac{1}{2}$, то $x(x^{2x-1}-1) \geq 0$, иначе $x(x^{2x-1}-1)<0$. Значит

если $x \in [\frac{1}{2};1)$, то $x^{2x} \geq x$, иначе при $x \in (0;\frac{1}{2})$: $x^{2x}<x$

Получается, при $a \in [\frac{1}{2};1)$: $x \geq a$ (равенство в т. $x=\frac{1}{2}$ из нер-ва (2)), а (x — корень)

при $a \in (0;\frac{1}{2})$: $x < a$ (x — корень)

Подставим в нер-во (1) $x=a$: $\frac{(2a-1)(4a+1)}{1} \geq 0$ — верно при $a \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

При $a \geq \frac{1}{2}$ $x=a$ — всегда верно

Итого, при $a \in [\frac{1}{2};1)$ решением будет полуинтервал $x \in [k;1)$ ($k^{2k}=a$; $k \geq a$) и

т. $x=a$, но в т. $\frac{1}{2}$ $a^{2a}=a \Rightarrow a \in (\frac{1}{2};1)$.

При $a \in (0;\frac{1}{2})$ решением будет $x \in [k;1)$ ($k<a$), а т. a входит в $[k;1)$

Ответ: $a \in (\frac{1}{2};1)$