+1 лист Бурова
+1 лист Бурова

0 637558 160001

63-75-58-16
(128.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Федоренко Арсения Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

100 (сто) [подпись]

63-75-58-16 (128.5)

Чистовик

№ 1

Тк призма прямая и прямоуг $\Rightarrow$ это прямоуг. ||-пипед. Пусть его стороны равны a, b, c.

Тогда

$V = abc$

$S_{полн\ пов} = 2(ab + bc + ca)$

$l_{сум\ реб} = 4(a+b+c)$

$\Rightarrow abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) = 2026$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2026 + 8$

$2026 + 8 = 2034 = 2 \cdot 9 \cdot 113$

(113 - простое число)

Тогда $(a+2)(b+2)(c+2) = 2 \cdot 9 \cdot 113$

$\Rightarrow$ Одна из скобок $\vdots$ 113. Б.О.О. $(a+2) \vdots 113$

Пусть $(a+2) \geq 2 \cdot 113 \Rightarrow (b+2)(c+2) \leq 9$. Но $b+2 \geq 3$, $c+2 \geq 3$, и $b \neq c \Rightarrow b$ и c не могут оба быть равны 1 $\Rightarrow (b+2)(c+2) > 9$. Пр-ие $\Rightarrow$

$a+2 = 113$, $a = 111$

$(b+2)(c+2) = 2 \cdot 9$

$b+2 > 2$, $c+2 > 2 \Rightarrow (b+2)$ и $(c+2)$ равны 6 и 3 в некотором порядке (иначе одна из скобок ≤ 2, пр-ие) $\Rightarrow$ без огр общ $b+2=6$, $c+2=3 \Rightarrow$ $b = 4$, $c = 1$, $V = abc = 111 \cdot 4 = 444$.

Ответ: 444

Страница 1 из 10

№2 черновик

Условие на вырезанный прямоуг. равносильно тому, что одна из его сторон обязательно прилегает к краю квадрата (иначе у оставшейся фигуры будет дырка), при этом не ~~прилегают две противоположные (иначе фигура разобьется на две)*~~

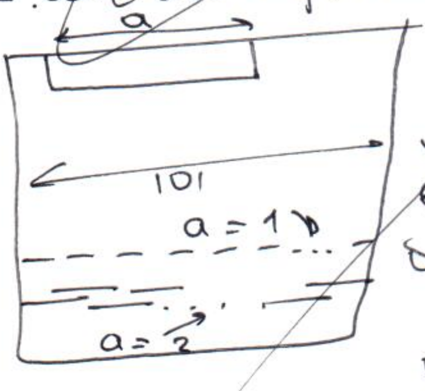
~~* Непонят Опустим пока случай, когда мы весь квадрат пол~~

не может быть так, что прилегают две противоположные, а другие две – нет (иначе получившаяся фигура будет нецельной).

Тогда ~~разберем 2 случая~~

~~I) Ф. Прямоугольник не ни имеет противоположных сторон, которые вырезаются по линиям границы полного квадрата,~~

[. Его верхняя сторона ∈ границе:



Посчитаем сколько таких бывает. Если его (сторона гор.) $a = 1$, то можно выбрать расположение его верхней стороны 101 способом. Если $a = 2$, то 100 способами. $a = 3$, 99 спос. и т.д.

Тогда всего способов выбрать a верхнюю ст. (и ее положение) $101+100+\ldots+1 =$
$= \frac{101 \cdot 102}{2}$.

А вертикальная сторона, точнее, ее длина выбирается 100 способами (1, 2, ... или 100) при $\forall a \Rightarrow$ всего таких □ ровно

$100 \cdot \frac{101 \cdot 102}{2}$.

Тогда для 4 сторон это кол-во равно $4 \cdot 100 \cdot \frac{101 \cdot 102}{2} =$

63-75-58-16 (128.5)

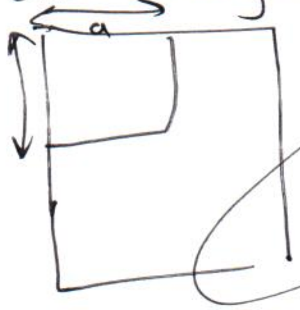
черновик

$= 2 \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102$

Но мы часть прямоуг посчитали дважды

а именно те, которые прилегают к

2м соседним ст. исходного квадрата:

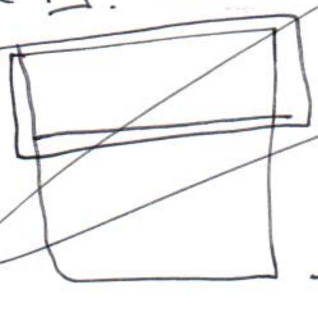


[прилегает к левому верх-нему углу $\Rightarrow$ а можно выбрать $1, 2, \ldots, 100$ — 100 способов, и в тоже $\Rightarrow$ таких прямоуг $100^2 \Rightarrow$ всего их $4 \cdot 100^2 \Rightarrow$

всего подходящих в I) случае

$2 \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102 - 4 \cdot 100^2$.

II) ~~Имеет~~ троих стороны $\Rightarrow$ чтобы исходный квадрат не распадался, он ~~5~~ прилежит ровно к 3м сторонам (Если прилежит к 4 $\Rightarrow$ он совпадает с I. Этот случай пока не рассм).



[он прилежит к левой, верхней и правой ст $\Rightarrow$ мы можем выбрать лишь его высоту b $(1, 2, \ldots, 100) \Rightarrow$ 100 способов $\Rightarrow$ всего 400 способов

Тогда, ~~если~~ т.к. квад прямоуг имеет меньшие размеры, чем исходный, то всего способов $2 \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102 - 4 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100$

$= 100(2 \cdot 101 \cdot 102 - 4 \cdot 100 + 4) = 200(101 \cdot 102 - 100 \cdot 2 + 2) = 200 \cdot 10104 = 2020800$

Ответ: 2020800

И при этом исходный кв. должен быть > вырезанного, а т.к. мы и раза посчитали полный квадрат, то

$2 \cdot 101^2 \cdot 102 - 4 \cdot 100^2 - 4$

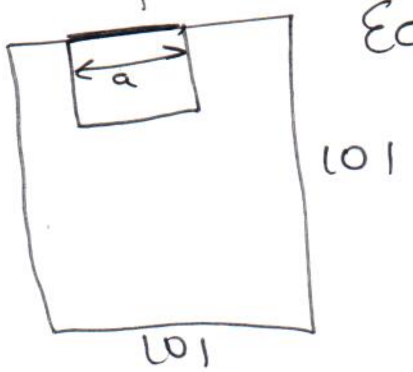
Задача 2 чистовик

Условие на вырезанный □ означает, что ≥1 его сторона прилегает к исходному □ (иначе будет дырка), не могут прилегать 2 прот, а 2 други — нет (иначе будет неуголь- ная фигура), не могут прилегать все (иначе размер = исходному).

Р-им 2 случая

1) Нет 2х прот сторон, которые прилега- ют к исходному квадрату.

[он прилегает к верхней стороне ив:



Если $a=1$, то положение его верхней левой точи можно выбрать 100 способом, если $a=2$, то 100, $a=3$, 99, и т.д. $a \neq 101$, т.к. тогда левая и правая стороны прилегают. для $a=100$ 2 полож $\Rightarrow$ всего положени

$101+100+\ldots+2=\frac{101\cdot102}{2}-1$

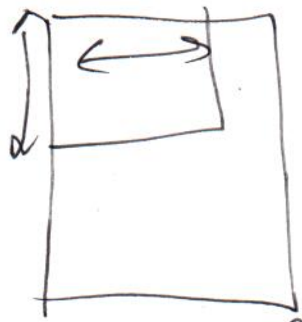
При этом вертик сторона может быть равно $1, 2, \ldots, 100$ ($\neq 101$, т.к иначе прил верх и низ) $\Rightarrow$ всего способов

$100\cdot\left(\frac{101\cdot102}{2}-1\right)$, а т.к сторон 4, то

$400.\left(\frac{101\cdot102}{2}-1\right)$. Но мы дважды посчитали прямоуг, прилегающие к углам исходного т.е к 2м сторонам

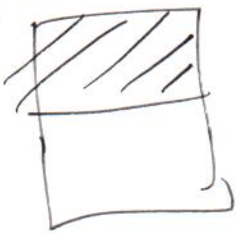
Посчитаем, сколько их:

63-75-58-16 (128.5)



Его ~~ст~~ (сторона) можно выбрать (листовых) 100 и 100 способами ⇒ ~~их~~ их 100^2, и т.к. углов четыре, то всего их $4 \cdot 100^2$ ⇒ в этом случае $400\left(\frac{101 \cdot 102}{2} - 1\right) - 4 \cdot 100^2$ способов.

2) Есть. $ ⇒ есть и 3ы. [прямоуг (иначе фигура нецельная) прилегает к левой, верхней и правой



Тогда можно выбрать лишь его высоту — 100 способов, (1, 2, ... 100)

101 не берем т.к. иначе размер будет совп с исходным. Тогда способов 100, а т.к. 4 стороны, то 400, причем тут уже пересечений нет

Тогда: всего способов

$$400\left(\frac{101 \cdot 102}{2} - 1\right) - 4 \cdot 100^2 + 400 =$$

$$= 400\left(\frac{101 \cdot 102}{2} - \cancel{1} - 100 + \cancel{1}\right) =$$

$$= 400\,(101 \cdot 51 - 100)$$

$$= 400 \cdot 5051 =$$

$$= 2\,020\,400$$

Ответ: 2020400

$$\begin{array}{r} \times\ 51 \\ 101 \\ \hline 51 \\ 51\ \ \\ \hline 5151 \\ -\ 100 \\ \hline 5051 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 5051 \\ 400 \\ \hline 2020400 \end{array}$$

Страница 3 из 10

Задача 3

$\angle C = 30^\circ \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ$ | чистовик

$\Rightarrow$ тк $\triangle OB$ - р/б

$\angle ABO = 60^\circ$

$\Rightarrow$ тк O и O' сим-ны от-но AB

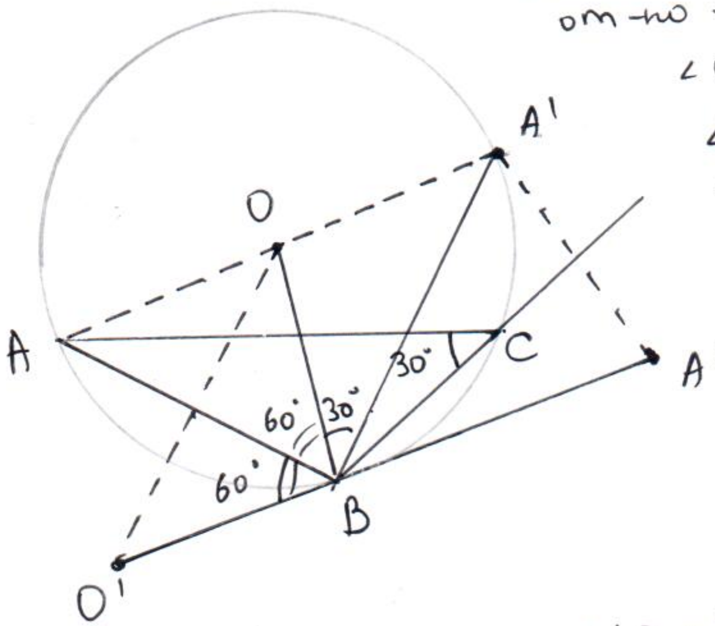
$\angle O'BA = 60^\circ$

$\angle ABA' = 90^\circ$, тк AA' - диам

$\Downarrow$

$\angle OBA' = 30^\circ$

Тогда



$\angle O'BA' = 150^\circ \Rightarrow$ тк $O'BA''$ - одна прямая, то $\angle ABA'' = 30^\circ$ (*) $\Rightarrow$ тк A' и A'' сим-ны от-но BC, то $\angle A'BC = \angle A''BC = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$. Тогда $\angle B = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$

Ответ: 105°

(*) т.к. точки O' и A'', очевидно, лежат по разные стороны от BO, ведь $\angle C < 90^\circ$.

Задача 4

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

| sign t = знак числа t

$\log_2 a \neq 0 \Rightarrow a > 0, a \neq 1.$

$\operatorname{sign} \log_2 a = \operatorname{sign}(a-1)$, тк $2 > 1 \Rightarrow$

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{a-1} \geq 0 \quad \Big| : a^2 > 0, \text{ тк } a \neq 0$$

$$\frac{a^{2(x-1)} - 3a^{x-1} + 2}{a-1} \geq 0 \qquad a^{x-1} = t:$$

Страница 4 из 10

чистовик

$$\frac{t^2-3t+2}{a-1} \geq 0$$

$$\frac{(t-1)(t-2)}{a-1} \geq 0$$

$$\frac{(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)}{a-1} \geq 0.$$

[$a>1$. Тогда при $x \to \infty$,

~~$a^{x-1}-1 \to 0$, $a^{x-1}-2 \to 0$~~

a^{x-1} ~~и a^{x-1}~~ будет сколь угодно большими и вследствие возрастания a^x при $a>1$ решением этого нер-ва будет как минимум луч, уходящий в $+\infty$ (а, возможно, и что-то еще) $\Rightarrow$ точно не отрезок $\Rightarrow$ $0 < a < 1$

$$\operatorname{sign}(a^{x-1}-1) = \operatorname{sign}(a^{x-1}-a^0) = (0-(x-1))$$, тк $a^x \searrow$ функция при $a<1$

$$\operatorname{sign}(a^{x-1}-2) = \operatorname{sign}(a^{x-1}-a^{\log_a 2}) = (\log_a 2-(x-1)) \Rightarrow$$

наше нер-во перейдет в

$$\frac{-(x-1)(\log_a 2-(x-1))}{a-1} \geq 0, \quad a<1 \Rightarrow$$

$$(x-1)(x-1-\log_a 2) \leq 0.$$

Решением этого нер-ва является отрезок с концами 1 и $1+\log_a 2 \Rightarrow |1+\log_a 2-1| = 2026.$

(Продолжение № 4)

Черновик
Чистовик

$$|\log_a 2| = 2026$$

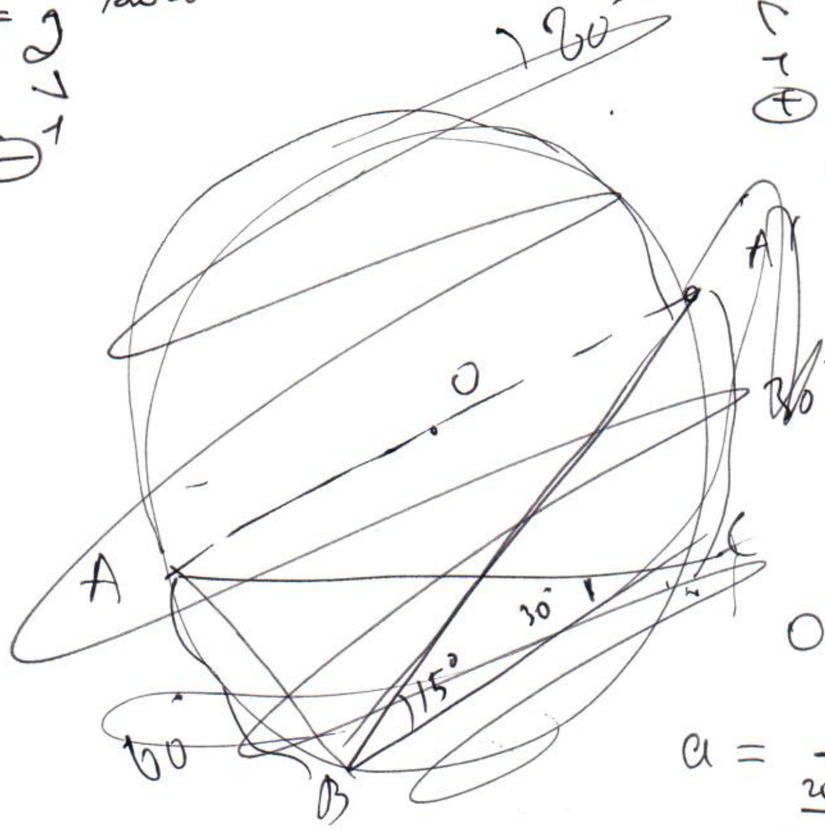
$\log_a 2 = 2026$ $\qquad$ $\log_a 2 = -2026$

$a^{2026} = 2$ $\qquad$ $a^{-2026} = 2$

$a = 2^{1/2026}$ $\qquad$ $a = 2^{-1/2026}$

> 1 $\qquad$ < 1

$\ominus$ $\qquad$ $\oplus$



подходит лишь $a = \dfrac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

Ответ: $a = \dfrac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

Страница 6 из 10

Черновик

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$

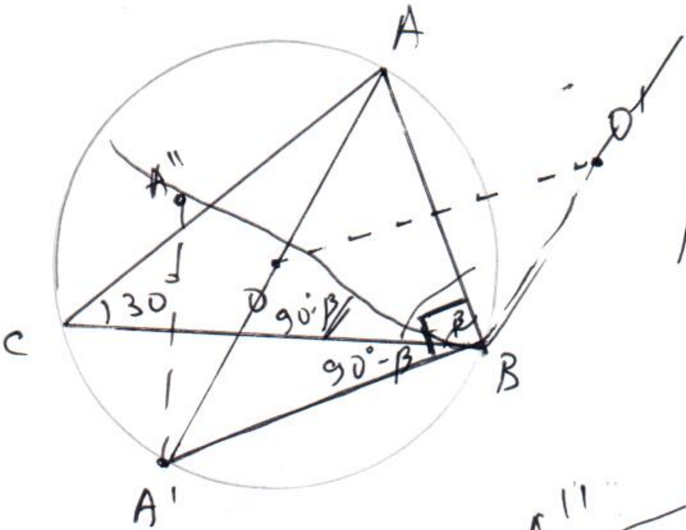
$0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$

$x + y + z = \frac{\pi}{2}$

$\angle ABA'' + \angle ABO' = 180^\circ$

$\angle ABO' = \angle ABO = 60^\circ$

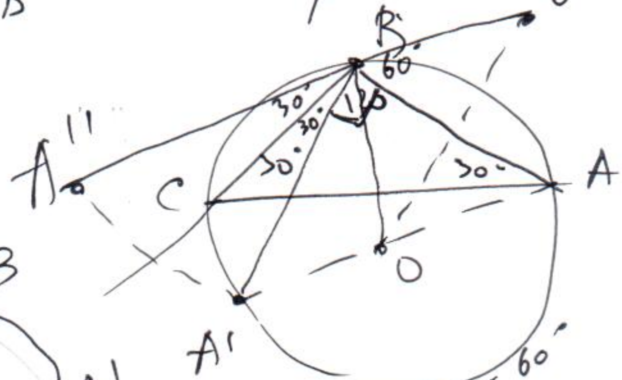
$\angle ABA'' = 120^\circ$



$\beta - 90^\circ + \beta = 120$

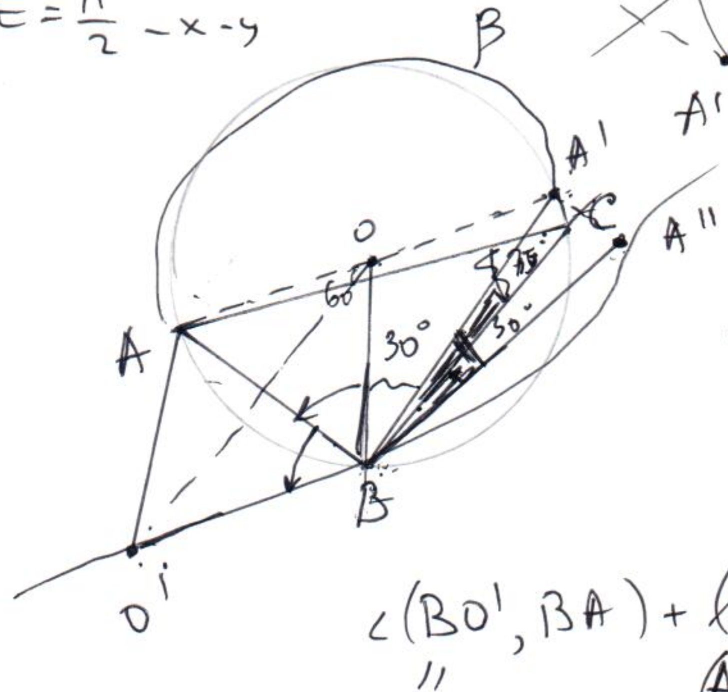
$2\beta = 210$

$\beta = 105^\circ$



$\angle ABO = 60^\circ$

$z = \frac{\pi}{2} - x - y$



$\angle O'BA + \angle ABC + \underbrace{\angle CBA''}_{= \angle A'BC} = 180^\circ$

$\angle(BO', BA) + \cancel{(A''B}$

$\angle(BO', BA) = (BA, BO) = 60^\circ$

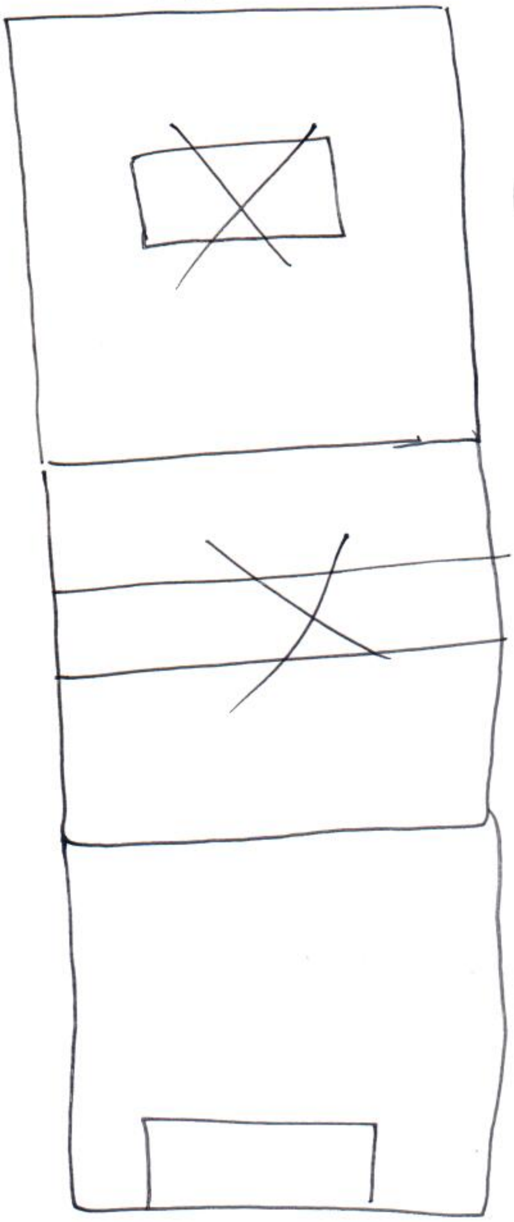
$(AB, BA'') = 0$

$(AB, BA'') = (AB, BA')^{=90^\circ} +$

$+ (A'B, BC) = 0.$

$(A'B, BC) = 30^\circ$

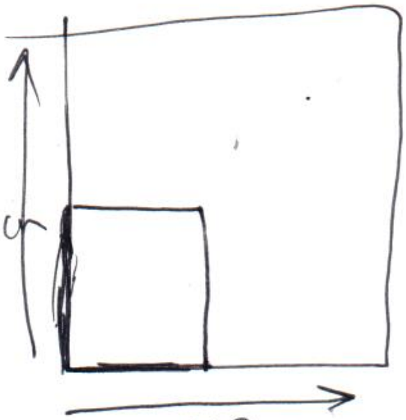
Черновик



$$\begin{array}{r} 102 \\ \times\ 101 \\ \hline 102 \\ 102 \\ \hline 10302 \end{array}$$

101

$$\begin{array}{r} 10302 \\ -\ 200 \\ \hline 10102 \end{array}$$



$2\cdot100^2\cdot101-4\cdot100^2$

$=(202-4)100^2$

(+)

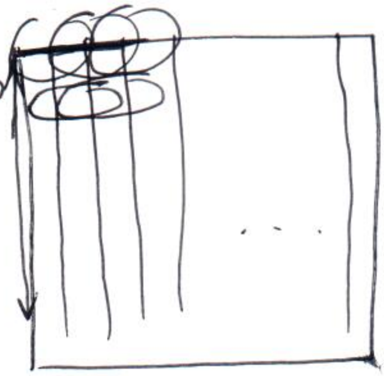
101

$100+99+98$
$+\ldots+1$

1,2,...,100

100 способов

101



$\frac{100\cdot101}{2}$

выбрать верхнюю сторону

$\frac{100\cdot101}{2}\cdot100$

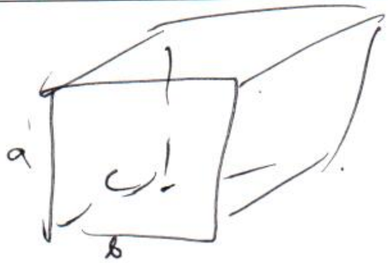
прямоуг с фикс верхней стороной

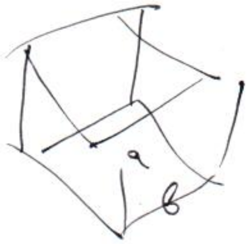
$4\cdot\frac{100\cdot101}{2}\cdot100-4\cdot100^2$

Всего прямоуг

теперь нужно посчитать [illegible]

Черновик





$a \neq b \neq c \in \mathbb{N}$

$abc + 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c = 2026$

$\min abc - ?$

~~$(a+1)(b+1)(c+1) + ab + bc + ac = 2027.$~~

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2026 + 8 =$

$= 2(1013+4) = 2 \cdot 1017.$

$1017 : 3 = 339$; $339 : 3 = 113$

113 – простое? Да

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2 \cdot 9 \cdot 113.$

$\vdots\, 113$; $\vdots\, 9$

$>2 \neq >2 \neq >2$

$a+2 = 113$ $\quad$ $a+2 = 113 \cdot 2$ $-$

$a = 111.$

$(b+2)(c+2) = 2 \cdot 9.$

$2 \cdot 3 \quad 3$

$c = 1 \quad b = 4$

$2034 : 18 = 113$

113 ~~3~~ ~~5~~ ~~7~~ $-$

Черновик

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\underbrace{\log_2 a}} \geq 0$$

$a \neq 1$. $\operatorname{sign} \log_2 a = \operatorname{sign}(a-1)$

($a>0$ по усл)

$$\begin{cases} (a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2)(a-1) \geq 0 \quad |: a^2 > 0 \\ a>0, a \neq 1 \end{cases}$$

$$(a^{2(x-1)}-3a^{x-1}+2)(a-1) \geq 0$$

$$a^{x-1} = t$$

$$(t^2-3t+2)(a-1) \geq 0$$

$$(\underbrace{a^{x-1}}-1)(a^{x-1}-2)(a-1) \geq 0$$

$a>1$ $\ominus$ беса больше подходит

$0<a<1$

$$\operatorname{sign}(a^{x-1}-a^0) = \operatorname{sign} \cancel{(x-1)} (1-x) \quad (0<a<1)$$

$\log_a 2 = 2026$

$a^{2016} = 2$

$$(x-1)(a^{x-1}-2)(a-1) \leq 0$$

$\operatorname{sign}(a^{x-1}-2)$

$$\operatorname{sign}(a^{x-1} - a^{\log_a 2}) = (\log_a 2 - (x-1))$$

$$(x-1)\underbrace{(a-1)}(x-1-\log_a 2) \geq 0$$

$$(x-1)(x-1-\log_a 2) \leq 0$$

$[1; 1+\log_a 2]$

63-75-58-16
(128.5)

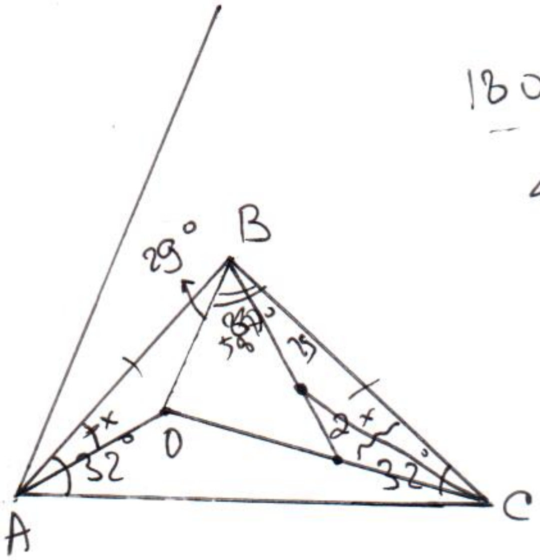
Черновик

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 3 \\ \hline 87 \end{array}$$

$180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$.

$\angle ABO = \frac{116^\circ}{4} = 29^\circ$

$\angle OBC = 87^\circ$

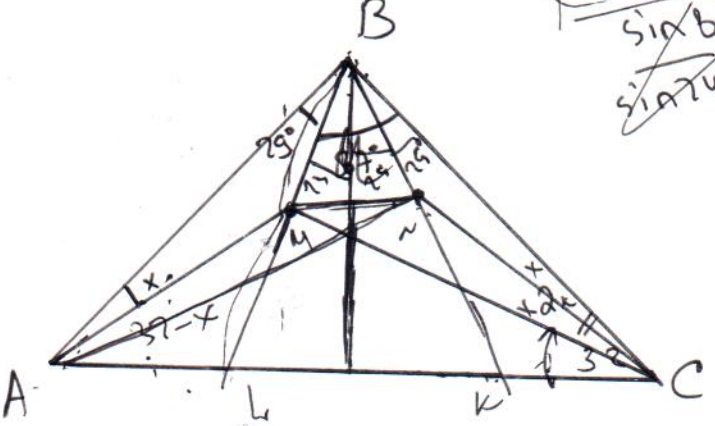


$x = 8^\circ$.

$$\boxed{\frac{\sin x}{\sin 32 - x} \cdot \frac{\sin(32-2x)}{\sin(2x)} \cdot \frac{\sin 87}{\sin 29} = 1}$$

$$\frac{\sin 8^\circ}{\sin 24^\circ} \cdot \cancel{\frac{\sin 16^\circ}{\sin 16^\circ}} \cdot \frac{\sin 87}{\sin 29}$$

$$\frac{\sin 8^\circ}{\sin 24^\circ} \cdot \frac{\sin 87^\circ}{\sin 29^\circ} = 1$$



$\sin 8^\circ \cdot \sin 87^\circ = \frac{1}{2} \sin \frac{95}{2} \cos \frac{79}{2}$

$32 + 29 = 61$

$\frac{\sin 2x}{\sin(32-2x)} =$

AL

$\sin 24 \sin 29 = \frac{1}{2} \sin \frac{53}{2} \cos \frac{5}{2}$.

61 Черновик

$x + \alpha = 61$

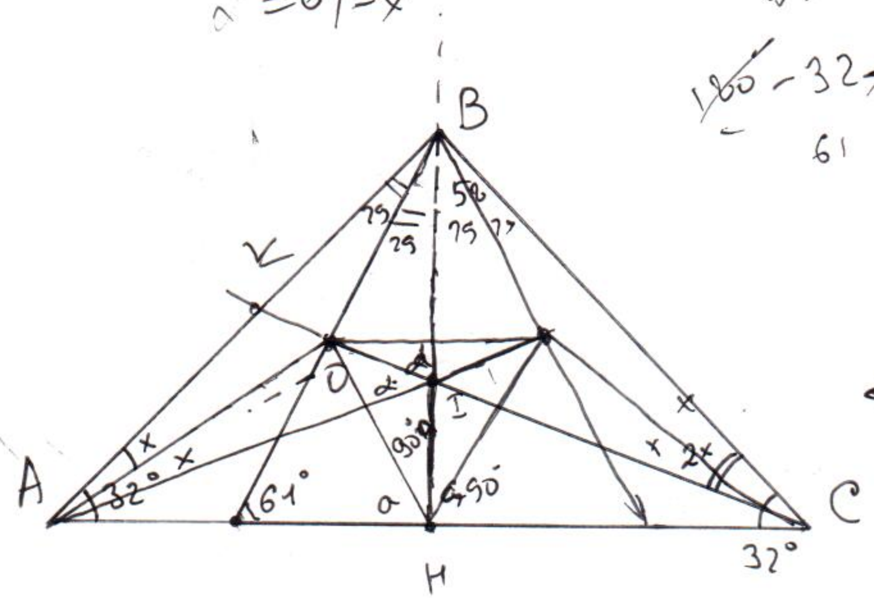
$\alpha' = 61 - x$

$32 + 68 = 100$

$68 - 32 + x$

$\cancel{180} - 32 \cancel{+87} - \cancel{180}$ $46 + x$

61



$a = 32$

$$\frac{\sin x}{\sin(32-x)} \cdot \frac{\sin 32}{\sin 68} = 1$$

$$\frac{\sin \frac{x+32}{2} \cos \frac{32-x}{2}}{\sin \frac{x+100}{2} \cos \frac{46+x}{2}}$$

$$\triangle ABH: \frac{\sin x}{\sin(32-x)} \cdot \frac{\sin a}{\cos a} = 1$$

$$\triangle HBC: \frac{\sin 29^\circ}{\sin 87^\circ} \cdot \frac{\sin 2x}{\sin(32-2x)} \cdot \frac{\sin a}{\cos a} = 1$$

$x(9 - \cancel{2}x) = (2x+3)(3-x)$

$9x - \cancel{2}x^2 = 6x + 9$

$-2x^2$

$$\frac{\sin x}{\sin(32-x)} \cdot \frac{\sin(32-2x)}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 87^\circ}{\sin 29^\circ} = 1$$

$\frac{16}{3} \approx 4$

$x(4{,}5 - x) = (x + 1{,}5)(3 - x)$

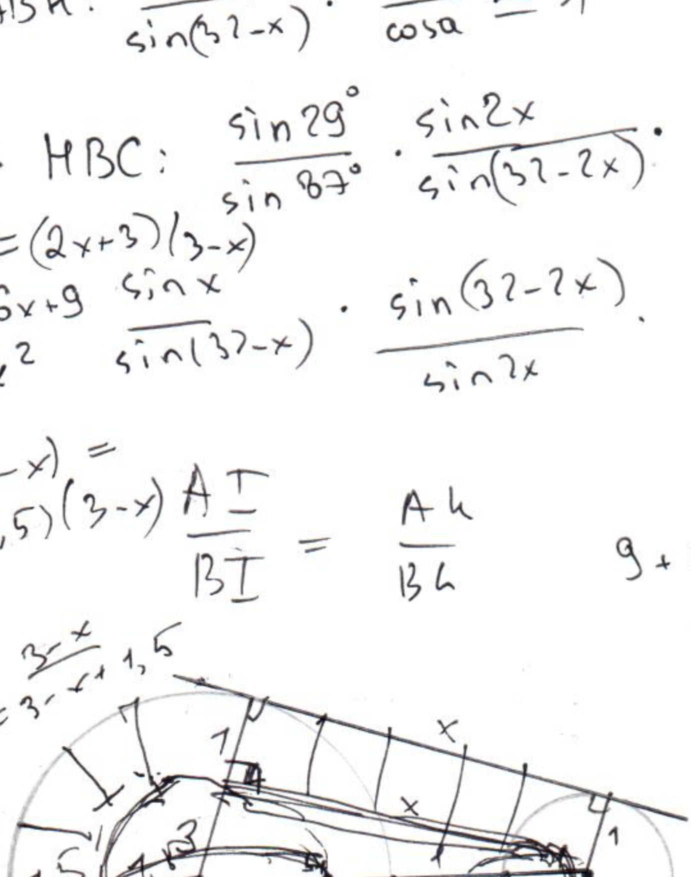
$$\frac{AI}{BI} = \frac{Ak}{Bk}$$

$9 + x^2 = 36$

$x^2 = 24$

$x = \sqrt{24}$

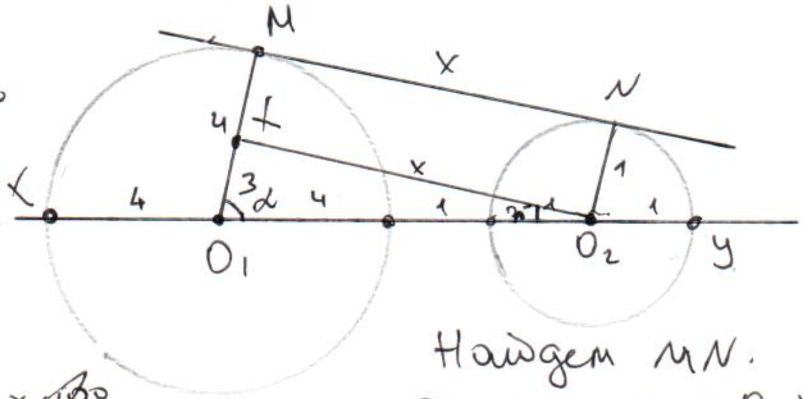
$$\frac{x}{x+1{,}5} = \frac{3-x}{3-x+1{,}5}$$



Задача №7

Чистовик

Страница 9 из 10



$2 + \frac{46+x}{2} = 90^\circ$

$\cancel{32+46=180}$

$x = 51^\circ$

$\frac{x+32}{2} = 180^\circ - \frac{x+180}{2}$

$x + 16 + 50 = 180$

Найдем MN.

Опустим пер O_2X

$\Rightarrow XM = 1$

$\Rightarrow O_1X = 3$

$O_2X = MN = x$

$\Rightarrow$ в $\triangle O_1O_2X$: $9 + x^2 = 36$

$x^2 = \cancel{24}\ 27$

$x = \cancel{2\sqrt{6}}\ 3\sqrt{3}$

При этом $\alpha = \arccos\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\alpha = 60^\circ \Rightarrow \overset{\smile}{MX} = \cancel{\frac{1}{6}}\ \frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 4 =$

$= \frac{8\pi}{3}$, ~~NY=~~

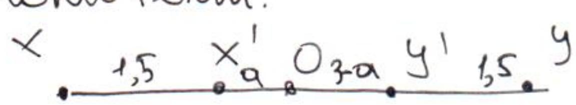
$\angle NO_2Y = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow$

$\overset{\smile}{NY} = \frac{1}{6}\cdot 2\pi\cdot 1 = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow$ ~~Весь~~ Весь маршрут имеет длину

$2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} + \cancel{2\sqrt{6}}\ 3\sqrt{3}\right) = \cancel{4\sqrt{6}}\ 6\sqrt{3} + 6\pi.$

А маршрут косинки сделан гомотетию этого маршрута в иной. Найдем к-нт гомотетии:



$\frac{OX'}{OX} = \frac{OY'}{OY} \Rightarrow$

$\frac{a}{a+1,5} = \frac{3-a}{4,5-a}$, $\quad 4,5a - a^2 = 3a - a^2 + 4,5 - 1,5a$

$4{,}5a = 1{,}5a + 4{,}5$ Чистовик

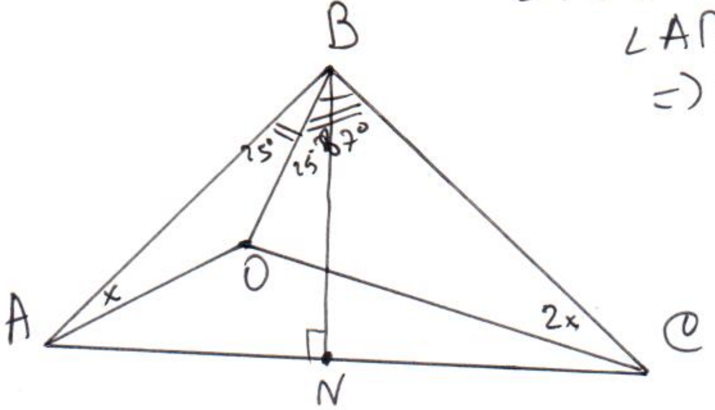
$a = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$

$\Rightarrow$ к-нт гомотетии равен $\frac{1}{2} \Rightarrow$

длина дороги равна $\frac{\cancel{4\sqrt{6}}\,6\sqrt{3} + 6\pi}{2} = \cancel{2\sqrt{6}}\,3\sqrt{3} + 3\pi$

Ответ: $\cancel{2\sqrt{6}}\,3\sqrt{3} + 3\pi$

Задача 6



$\angle A = \angle C = 32° \Rightarrow$

$\angle ABC = 116°$

$\Rightarrow$ тк $\angle ABO = \frac{1}{3}\angle OBC$, то

$\angle ABO = 29°$, $\angle OBC = 87°$

синусная т. Чевы для ΔABC и т. O:

$$\frac{\sin x}{\sin(32-x)} \cdot \frac{\sin(32-2x)}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 87}{\sin 29} = 1$$

Если провести высоту BN, то

$\angle ABO = \angle OBN = 29°$. BO - бис-са $\angle ABN$

Страница 10 из 10

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}$$

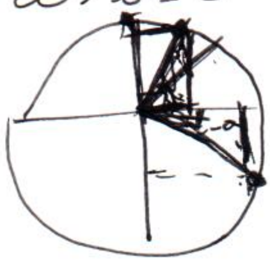
Черновик

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin s}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \overset{?}{=} \cancel{\operatorname{tg} a} \qquad \operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \infty$$

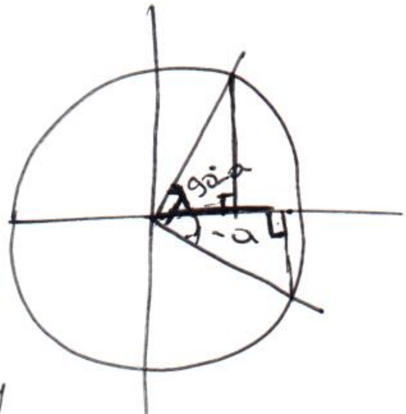
$$\cos 90^\circ \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} a}$$



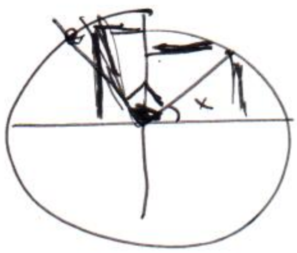
$$\frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)} \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{ctg}(-30^\circ) \overset{?}{=} \operatorname{tg}(60^\circ)$$



$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \pm \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

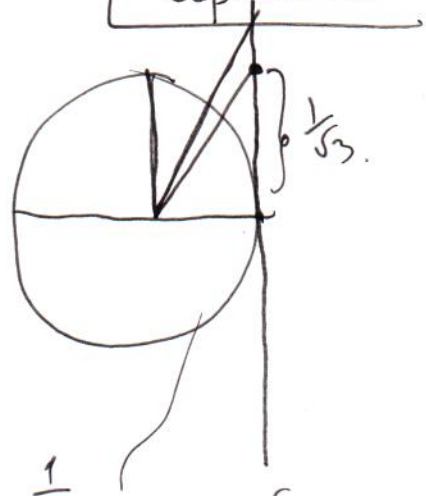
$a = 45^\circ$: $\operatorname{tg} 45^\circ = \mp \frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ}$



$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{+1}{\operatorname{tg} a}$$

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x+y)} = \frac{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}$$

Черновик



$$\frac{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\,(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}$$

$\operatorname{tg}x=a \quad \operatorname{tg}y=b$

$$\frac{ab(1-ab)}{(a+b)}$$

$$ab=\frac{1}{2} \qquad \frac{\frac{1}{4}}{a+b} \le \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} = \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad ab=\frac{1}{2}$$

$2x \overset{?}{<} 90^\circ.$

$$\max\left(\frac{\overbrace{ab(1-ab)}^{\le\frac{1}{4}}}{\underbrace{a+b}_{\geq 2\sqrt{ab}}}\right) - ? \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}a}$$

$$\le \frac{ab(1-ab)}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}(1-ab)}{2}$$

$\sqrt{ab}=t:$

$$\frac{t(1-t^2)}{2}$$

$\cancel{a+b}$

$a=b$

$\sqrt{ab}=a=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$t-t^3$

$$f'=1\cdot t^0-3\cdot t^2 = $$
$$=1-3t^2.$$

$\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

$$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f(t)=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Задача 5 Чистовик

$z = \frac{\pi}{2} - x - y$

$\Rightarrow \cancel{tg\,x + tg\,y + tg\,z =}$

$tg\,z = tg\left(\frac{\pi}{2} - x - y\right) = \frac{1}{tg(x+y)} = \frac{1 - tg\,x\,tg\,y}{tg\,x + tg\,y}$

$\Rightarrow tg\,x\,tg\,y\,tg\,z = \frac{tg\,x\,tg\,y\,(1 - tg\,x\,tg\,y)}{tg\,x + tg\,y}$

$tg\,x = a,\ tg\,y = b$:

$\frac{ab(1-ab)}{a+b}$.

~~Заметим, что~~

~~[$ab = t$ Δ $t(1-t)$.~~

~~Это парабола, ее max при $t = \frac{1}{2} \Rightarrow$~~

$\cancel{\frac{ab(1-ab)}{a+b}}$

т.к. $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow a, b > 0$

$\Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$

здесь мы формально пользуемся тем, что $1-ab>0$, но если $<$, то и все выраж <0, а у нас $tg\,x\,tg\,y\,tg\,z > 0$, Пр-ие

$\Rightarrow \frac{ab(1-ab)}{a+b} \leq \frac{ab(1-ab)}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}(1-ab)}{2}$

[$t = \sqrt{ab}$

$\cancel{f(t) =} \frac{t(1-t^2)}{2}$.

Δ $f(t) = t(1-t^2)$

$f'(t) = 1 \cdot t^0 - 3 \cdot t^2 = 1 - 3t^2$

$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ - корень, $t \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $f' > 0$

$t > \frac{1}{\sqrt{3}}$ $f' < 0$

$\Rightarrow f \uparrow$ на $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\downarrow$ на $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right) \Rightarrow$

max достигается (на полож. t) при | Чис то вик.
$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$f(t) = f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \frac{1}{3})$

$\Rightarrow$ наше выражение всегда $\geq \frac{f(\frac{1}{\sqrt{3}})}{2} =$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Покажем, что эта оценка достигается. Для этого нужно, чтобы все нер-ва обратились в р-во, т.е.

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $a = b$

$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{ab} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a = b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Вспомним, что функция $\operatorname{tg} x \nearrow$ на $(0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ т.к. $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} x$, то

x и $y < 45^\circ \Rightarrow x + y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$z = \frac{\pi}{2} - 2x > 0$.

Тогда max равен $\frac{1}{3\sqrt{3}}$, и достигается при $x = y = \operatorname{arctg} 1/\sqrt{3}$, $z = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} 1/\sqrt{3}$

Ответ: $1/3\sqrt{3}$.