0 912309 870003

91-23-09-87
(124.26)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Федорова Сергея Ивановича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника
Федоров

91-23-09-87 (124.20)

N1

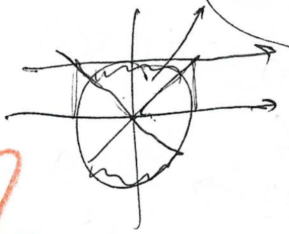
$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x \;\uparrow^2$

Чистовик

$ctg\, x \in [-1; 1]$

$x \in k\pi + y, \; k \in \mathbb{Z}$

$y \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$



$ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$

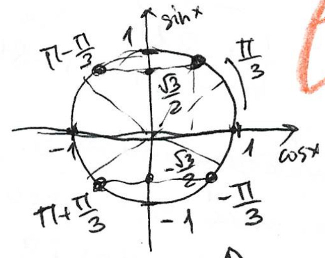
вершим ОДЗ

$3\left(1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8\cos^2 x$

$3\cdot\frac{\sin^2 x - \overbrace{\cos^2 x}^{1-\sin^2 x}}{\sin^2 x} = 8\cos^2 x$

$\sin^2 x = t$

$3\cdot\frac{2\sin^2 x - 1}{\sin^2 x} = 8 - 8\sin^2 x$



$6t - 3 = 8t - 8t^2$

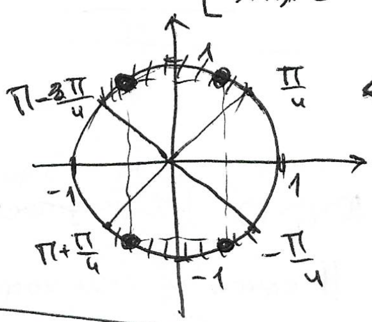
$8t^2 - 2t - 3 = 0$

$D = 4 + 96 = 100$

$t = \frac{2 \pm 10}{2\cdot 8} = \frac{2+10}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = \sin^2 x$

$\sin^2 x \ne 1$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi\cdot n, \; n \in \mathbb{Z}$



лежит в области допустимых значений (////)

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi\cdot n, \; n \in \mathbb{Z}$

№2. Чистовик

$n \vdots S(n) = 9k$

$n = 9k \cdot S(n)$

$n \vdots 9 \Leftrightarrow S(n) \vdots 9$

$S(n) = 9m$

$n = 81km$

$\boxed{n \vdots 81}$

признак делимости на 9: если число $n \vdots 9$, то и его сумма цифр $S(n) \vdots 9$

$n \,\vdots\, S(n) \vdots 9k$

$81 \vdots 9 = 9$

1) $162 \vdots 9 = 18$

2) $243 \vdots 9 = 27$

3) $324 \vdots 9 = 36$

4) $405 \vdots 9 = 45$

5) $486 \vdots 18 = 243 \vdots 9 = 27$

~~567 ⋮ 18 = X~~

6) $648 \vdots 18 = 324 \vdots 9 = 36$

~~729 ⋮ 18 = X~~

7) $810 \vdots 9 = 90$

~~891 ⋮ 18 = X~~

8) $972 \vdots 18 = 486 \vdots 9 = 54$

$+81 > 1000$

Посмотрим на все трёхзначные числа $\vdots 81$

не подходят, т.к. $\vdots 18 = \vdots 9$ и $\vdots 2$, но эти числа $\not\vdots\, 2$

Итого множество A: $\{162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972\}$
1 2 3 4 5 6 7 8

$S(243) = 9$ $S(486) = 18$ $S(810) = 9$

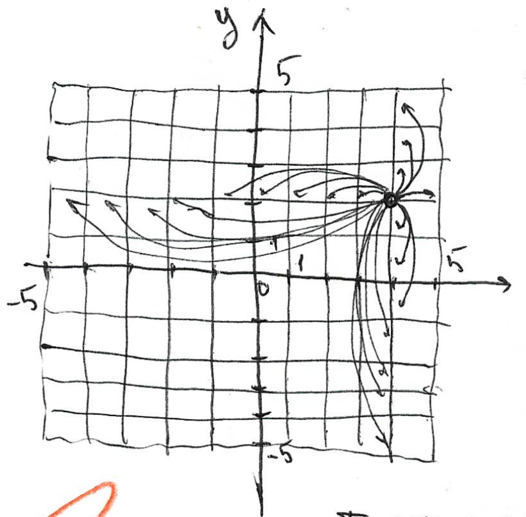
Ответ:

№3.

Множество F – куб $10 \times 10 \times 10$ (от -5 до 5 ~~10 допустимых~~ по каждой координате)

Т.к. каждый катет $\parallel$ одной из оси координат, весь $\triangle$ параллелен одной из координатных плоскостей (если катеты $\parallel$ осям Ox и Oy то $\triangle \parallel Oxy$)

Тогда р/м 3 координатных плоскости и все $\triangle$, $\parallel$ им:



плоскость Oxy

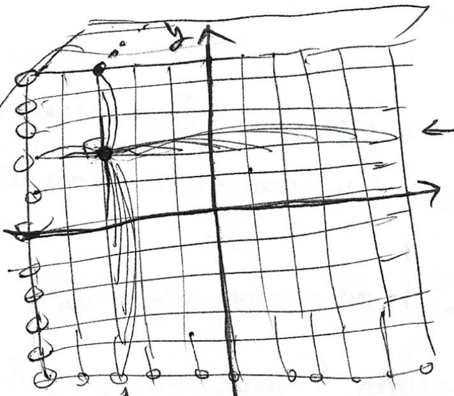
Р/м произвольную вершину и посмотрим все п/у треугольники с прямым углом в этой вершине $\Rightarrow$ выбираем катеты по осям Ox и Oy: по 10 вариантов на каждую ось (т.к. если коорд. вершины – $(x_0; y_0)$, то вторая вершина катета по оси Ox: $\underbrace{[-5;5]}_{11 \text{ точек}} / \underbrace{\{x_0\}}_{-1 \text{ точка}}$ для Oy аналогично)

10 точек

То есть для каждой вершины есть 100 п/у $\triangle$ с прямым углом в этой вершине.

91-23-09-87
(124.26)

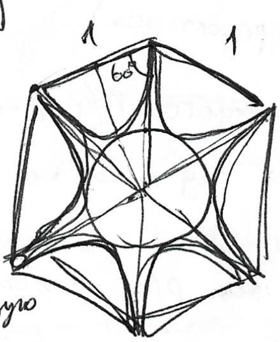
Черновик



← 10 вар.

100 на каждую вершину

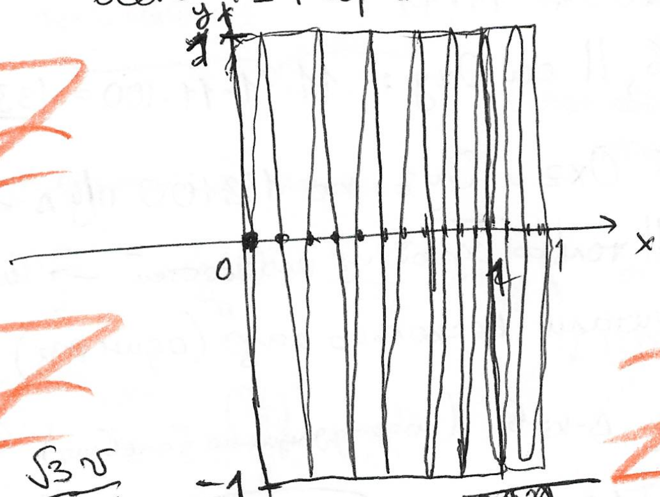
10 вар.



11 вершин => $11 \cdot 100 = 1100$

$121 \times 11 = 1331$

всего 121 верш. → $121 \cdot 1100 = \underline{133100} \cdot 3 = \boxed{399300}$



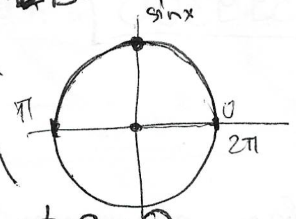
$y = \sin k\pi x$

$y = \sin 13\pi x \rightarrow x = \frac{1}{13}$, $x = \frac{2}{13}$

$y = \sin 15\pi x$

$y = \sin 17\pi x$

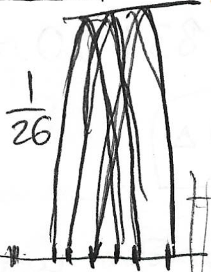
$g = \frac{\sqrt{3}v}{\cancel{2}\Delta t}$



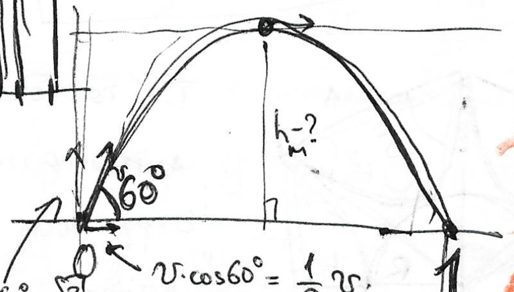
$\frac{1}{13} - \frac{1}{15} = \frac{2}{13 \cdot 15}$

$\frac{1}{13} : \frac{2}{13 \cdot 15} = \frac{\cancel{13} \cdot 15}{\cancel{13} \cdot 2} = \frac{15}{2}$

$\frac{1}{26}$



$\frac{\sqrt{3}}{2}v - \frac{\Delta t}{2} \cdot g = 0$

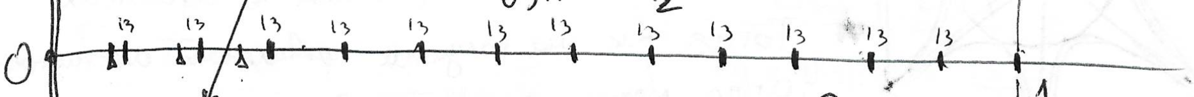


$\cos 60° = \frac{v_x}{v}$

$v \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}v$

$v \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}v$

$\frac{1}{2}v \cdot \Delta t = 1м$



$v = \frac{2 м}{\Delta t с}$

$\frac{mv^2}{2} + mg\cdot 0 = \frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} + mgh$

$gh = \frac{4v^2 - v^2}{8} = \frac{3v^2}{8}$

$\frac{v^2}{2} = \frac{v^2}{8} + gh$

$h = \frac{3v^2}{8 \cdot g} = \frac{\cancel{3} v^2}{8\sqrt{3}\cancel{v}} \cdot \Delta t = \frac{\sqrt{3}v\Delta t}{8} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2м \cancel{\Delta t}}{8\cancel{\Delta t}} = \frac{\sqrt{3}}{4} м$

№3 (продолжение). (Чистовик)

у каждого п/у Δ-ка только одна вершина с углом 90° => никакие два п/у Δ-ка мы не посчитаем дважды (и посчитаем каждый)

Но мы р/м плоскость Oxy — плоскость ‖ ~~реальному~~ п/у Δ-ку (плоскость проекций) => одна вершина в плоскости Oxy соответствует 11 вершинам в пространстве (~~от~~ $\underbrace{[-5; 5]}_{11\text{ точек}}$ по оси Oz)

Тогда каждой вершине в плоскости Oxy соответствует 11·100 п/у Δ-ков.

всего вершин в плоскости 11·11

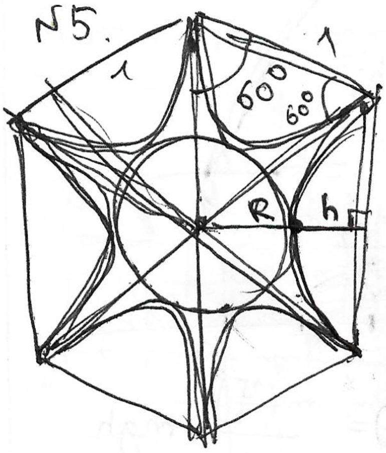
Итого ~~Δ~~ п/у Δ-ков, ‖ оси Oxy: $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 100 = \underline{133100}$

Также для плоскостей Oxz и Oyz по 133100 п/у Δ-ков, причём каждый Δ ‖ только одной из плоскостей → никакой п/у Δ-к мы не посчитали несколько раз (один раз)

То есть всего п/у Δ-ков (подходящих по условию) в множестве $F = 3 \cdot 133100 = \boxed{399300}$

Ответ: 399300 Δ

№5.



Т.к. параболы состыкованы под углом в 0°, ~~линии~~ прямые, проведённые из центра окружности (шестиугольника) к его вершинам — касательные к параболам в вершинах

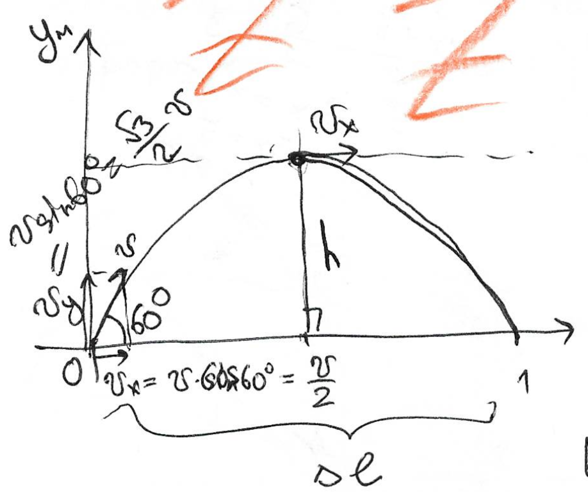
Тогда т.к. мы получили правильный шестиугольник, угол между касательной и стороной шестиугольника — 60°

(также расстояние от центра окружности до вершин = стороне шестиугольника = 1) (т.к. р/ст Δ-ки)

Тогда высота в р/ст Δ-ке равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и равна $R+h$, где R - радиус окр. h - высота параболы

№5 (продолжение) Чистовик

Найдем высоту h параболы. Воспользуемся соображением о том, что парабола — траектория движения тела, брошенного под углом => решим ~~зад~~ эту задачу, как задачу по физике:



(изначальной) вектор скорости — та самая прямая — касательная к параболе в вершине (шестиугольника)

Т.е. мы запускаем тело под углом 60° к горизонту со скоростью v, оно приземлилось через $\Delta l = 1$ м (сторона шестиугольника равна 1, возьмём метры)

Надо найти высоту тела в его верхней точке траектории (h).

1) Закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + mg\cdot\underset{0}{0} = \frac{mv_x^2}{2} + mgh \Leftarrow v_x = v\cos60° = \frac{v}{2}$$

$| : m$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} + gh$$

$$gh = \frac{v^2}{2} - \frac{v^2}{8} = \frac{3v^2}{8}$$

$$h = \frac{3v^2}{8g}$$

2) Пусть тело летело Δt секунд

Тогда $v_x \cdot \Delta t = \Delta l$

$$\frac{v}{2}\cdot\Delta t = 1\text{м}$$

$$\boxed{v = \frac{2\text{м}}{\Delta t\,\text{с}}}$$

Также т.к. ускорение св. падения g:

$$v_y - g\cdot\frac{\Delta t}{2} = 0$$ (в верхней точке только гор. скорость)

$$\boxed{g = \frac{2v_y}{\Delta t} = \frac{\sqrt3 v}{\Delta t}}$$

$$v_y = v\cdot\sin60° = \frac{\sqrt3 v}{2}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \frac{\sqrt3}{4}}$$

3) Подставляем: Тогда

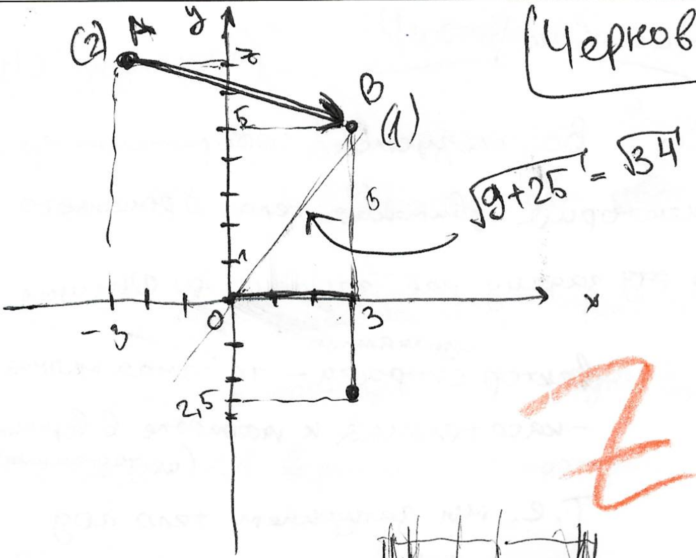
$$h = \frac{3v^2}{8g} = \frac{\sqrt3\,\cancel{3}\,v^{\cancel{2}}}{8\cdot\cancel{\sqrt3}\,\cancel{v}}\cdot\Delta t = \frac{\sqrt3\, v\,\Delta t}{8} =$$

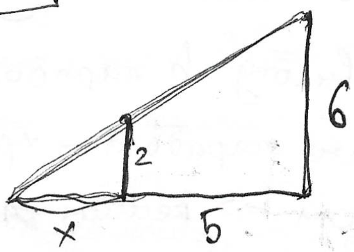
$$= \frac{\sqrt3\cdot 2\text{м}\cdot\cancel{\Delta t_c}}{8\cdot\cancel{\Delta t_c}} = \frac{\sqrt3}{4}\text{м} = \frac{\sqrt3}{4}\cdot 1\text{м}$$

То есть h (из начальной задачи) $= \frac{\sqrt3}{4}$

Тогда $\frac{\sqrt3}{2} = R + h \to R = \frac{\sqrt3}{2} - h = \frac{\sqrt3}{2} - \frac{\sqrt3}{4} = \boxed{\frac{\sqrt3}{4}}$ радиус окружности

Черновик



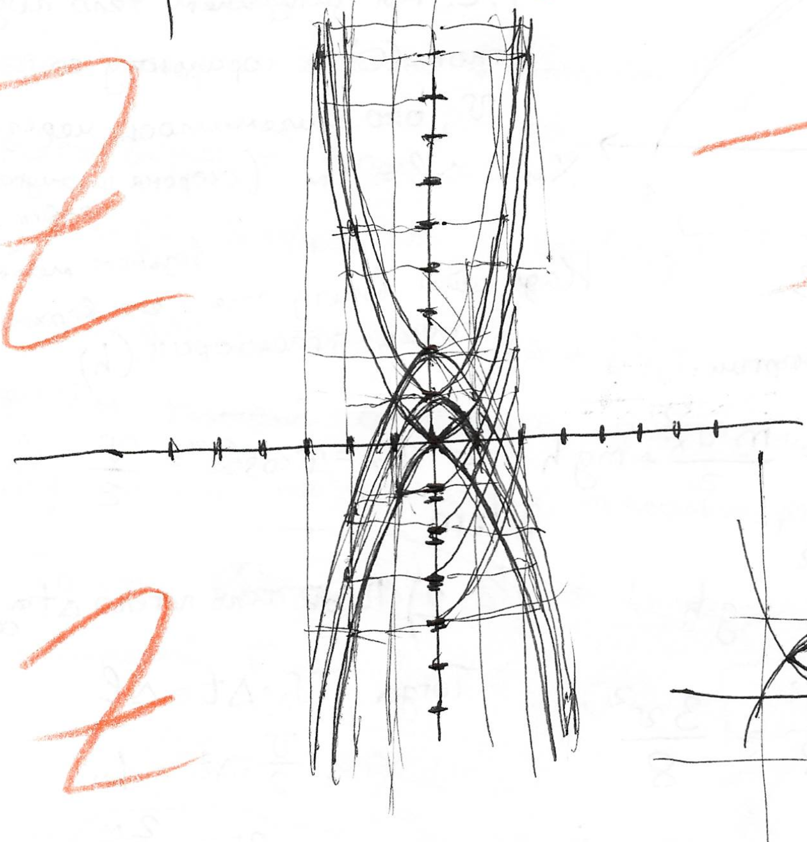


$$\frac{x+5}{x} = \frac{6}{2} = 3$$

$$3x = x+5$$

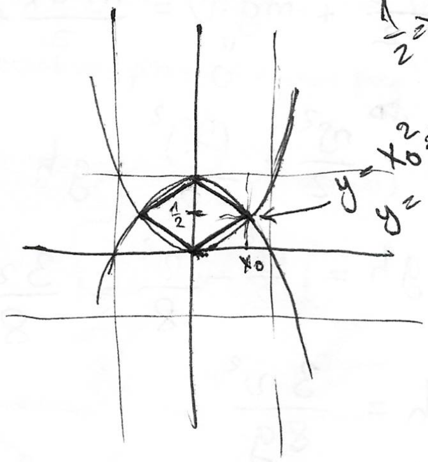
$$2x = 5$$

$$x = 2,5$$



$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2} = x_0^2$



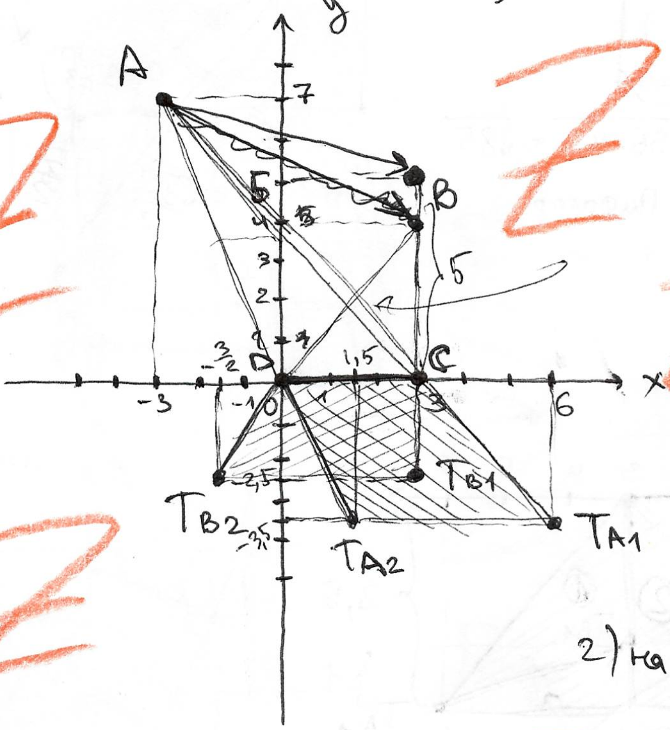
$y = x_0^2$

$y = -x_0^2 + 1$

Чистовик

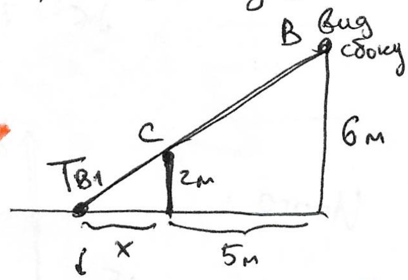
№6.

Посмотрим на тень от забора, когда светлячок был в точках А и В (нам этого хватит, т.к. светлячок двигался по прямой $\Rightarrow$ тень „ехала" из положения тени в А в положение тени в В также по прямой (соотв. тени от точек забора ехали по прямой))



(1) Р/м тень из точки В

1) на вершину С:



из подобия Δ:

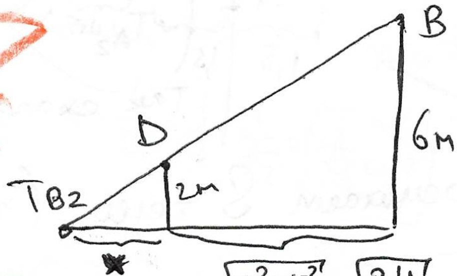
$$\frac{x+5}{x}=\frac{6}{2}=3$$

$$3x=x+5$$

$$2x=5$$

$$x=2{,}5$$

2) на вершину D: вид сбоку



$\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$ по т. Пифагора

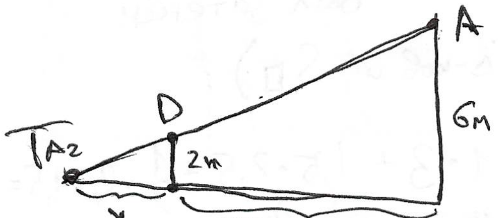
$$\frac{x+\sqrt{34}}{x}=\frac{6}{2}=3$$

$$2x=\sqrt{34}$$

$$x=\frac{\sqrt{34}}{2}=\sqrt{\frac{17}{2}}$$

(2) Р/м тень из точки А:

1) на вершину D: вид сбоку

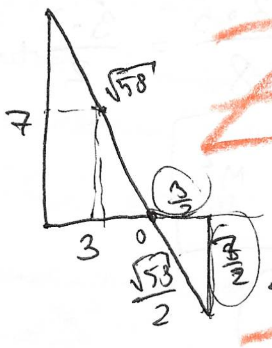


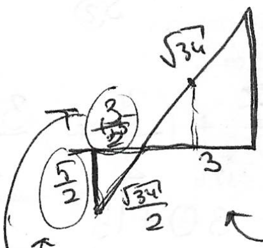
$\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{58}$ ← по т. Пифагора

$$\frac{x+\sqrt{58}}{x}=\frac{6}{2}=3$$

$$2x=\sqrt{58}$$

$$x=\frac{\sqrt{58}}{2}$$





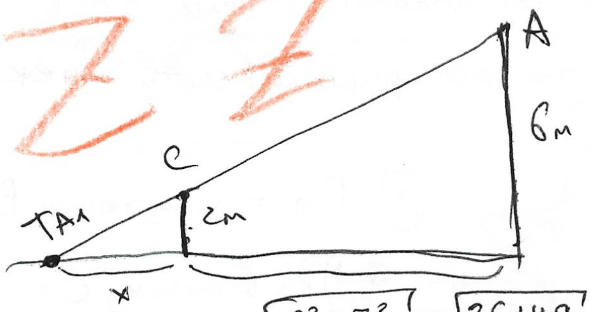
на плоскости Oxy

из подобия Δ-ков с коэф. 2

№6 (продолжение) $\boxed{\text{Чистовик}}$

2) из A на вершину C:

вид сбоку

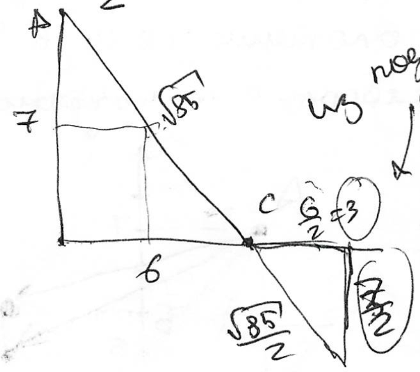


$\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{36+49}=\sqrt{85}$

по т. Пифагора

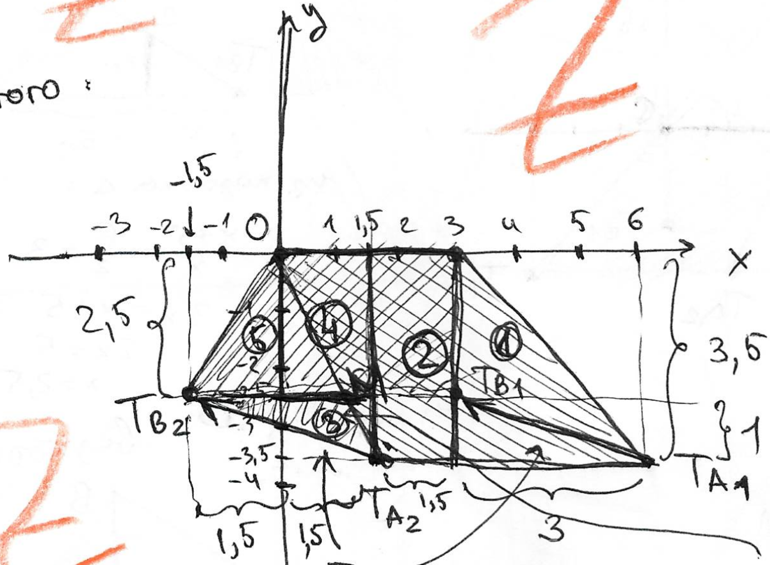
$$\frac{x+\sqrt{85}}{x}=\frac{6}{2}=3$$

$$x=\frac{\sqrt{85}}{2}$$



из подобия △-ков с k=2

Итого:



Так ехала тень $\Rightarrow$ △$T_{A_2}T_{B_2}M$ тоже был затенён

Посчитаем S тени (по $S_{п/у}$ △-ков и $S_{\square}$):

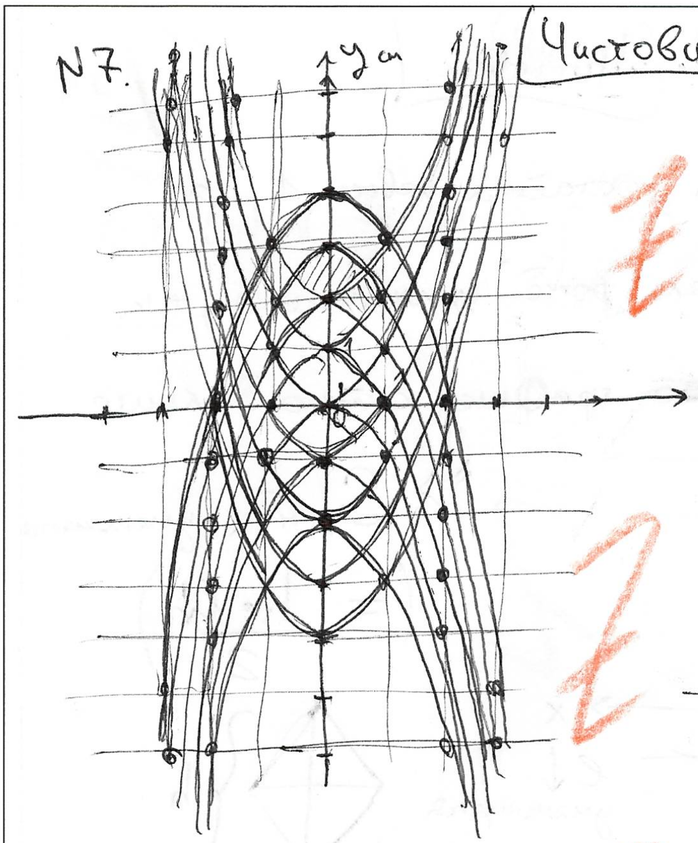
$$S=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 3{,}5\cdot 3}_{S_1}+\underbrace{1{,}5\cdot 3{,}5}_{S_2}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3}_{S_3}+\underbrace{1{,}5\cdot 2{,}5}_{S_4}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot 1{,}5}_{S_5}=$$

$$=\frac{7\cdot 3}{4}+\frac{3\cdot 7}{4}+\frac{3}{2}+\frac{3\cdot 5}{4}+\frac{3\cdot 5}{8}=\frac{3\cdot 7}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3\cdot 5}{4}+\frac{3\cdot 5}{8}=$$

$$=\frac{84+12+30+15}{8}=\boxed{\frac{141}{8}\text{ м}^2}$$

Ответ: $\frac{141}{8}$ м²

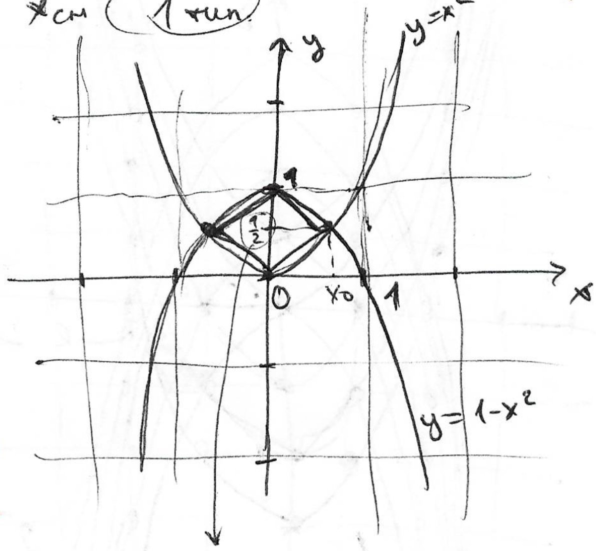
№7. Чистовик

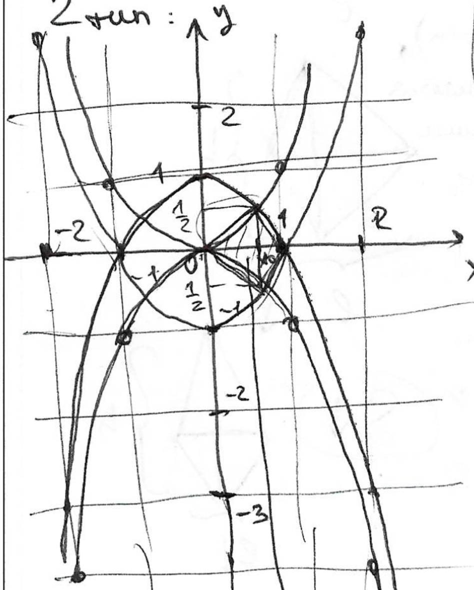


(все остальные, что дальше от Oy, заметно меньше) (2 типа)

Только 2 клеточки претендуют на ~~то~~ самую большую по площади:

~~т.к. рассоздан~~





в силу симметрии $y_0 = \frac{1}{2}$

Тогда $y_0 = x_0^2 = \frac{1}{2}$

$y_0 = 1 - x_0^2 = \frac{1}{2}$

$x_0^2 = \frac{1}{2}$

$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Тогда площадь 4-х угольника равна

$$S = 4 \cdot S_{\Delta} = \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\ см^2}$$

Наиб площадь

всё так же $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y_0 = \frac{1}{2}$

(можно было не проверять, т.к. по нашим соображениям ромб 2-го типа сузился отн. типа 1)

Тогда $S = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ см^2$

$\wedge$

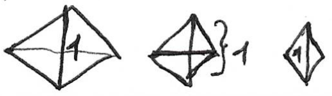
$\frac{1}{\sqrt{2}}\ см^2$

Почему же наиб. площадь будет именно в таком 4-х угольнике?

Заметим, что клеточки (ограничённые уже = 4-х угольники) ~~каждая~~ — две половины ромба

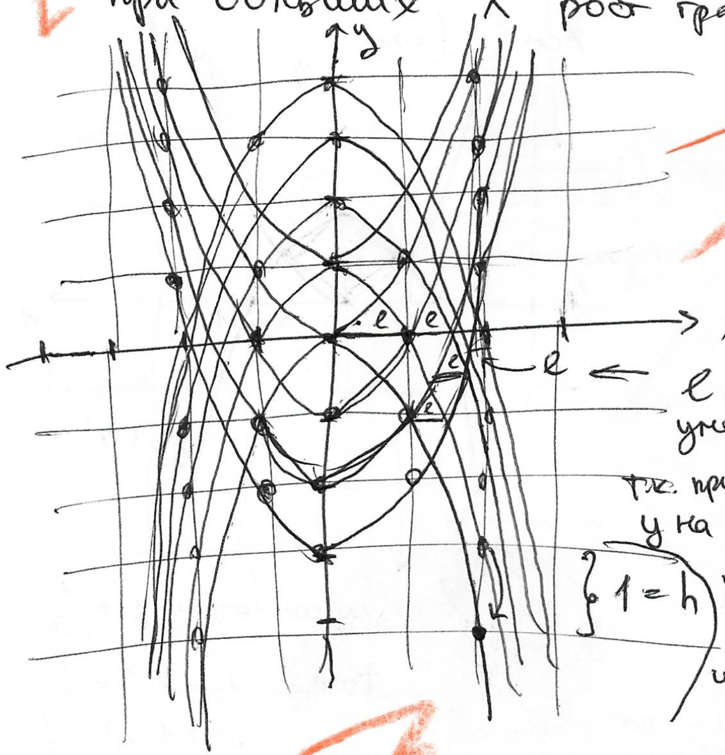
т.к. графики отличаются ~~на~~ поднятием на 1, то высота ~~р~~ „ромба" фиксирована и равна 1

Образующие ~~клеточку~~

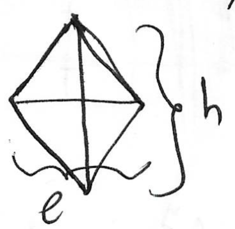


№7 (окончание). Чистовик

То есть высота „ромба" остаётся равна 1, а горизонтальная диагональ „ромба" уменьшается, т.к. при бóльших x рост графика сильно больше

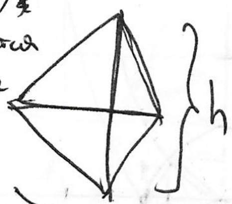


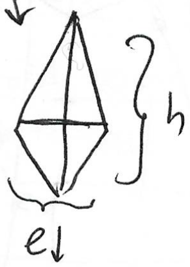
$\Rightarrow S_{ромба}$ уменьшается $\left(= \frac{h \cdot l\downarrow}{2}\right)$



$l \leftarrow$ $l\downarrow$ уменьшается т.к. при изменении y на 1 (высота), x изменяется в меньшее число раз

$1 = h$





$S\downarrow$

Значит, клетка на оси Oy имеет наибольшую площадь $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ см^2

$y_0 = x_0^2$

$\cancel{y+1} = y_0 + 1 = x_1^2 = x_0^2 + 1$

$x_1 = \sqrt{x_0^2+1}$

$x_1 - x_0 = \sqrt{x_0^2+1} - \sqrt{x_0^2}$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ см}^2}$

т.к. чем дальше „ромб" от Oy, тем больше он „сужается"

№8 (Чистовик)

$$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$$

№4.

Чистовик