0 804781 110008

80-47-81-11
(122.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________ демидр

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Феофилова Платона Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

ЧИСТОВИК

№ 2

1) $\times\begin{array}{r}1000\\1000\end{array}$
$\overline{1000000}$

⇓

7 знаков

2) $\times\begin{array}{r}9999\\9999\end{array}$
$\begin{array}{r}89991\\89991\\89991\\89991\end{array}$
$\overline{99980001}$

⇓

8 знаков

⇓

отсюда понимаем, что у n^2 либо 7, либо 8 знаков.

⇓

$\overline{abcd}=n$ Тогда рассмотрим случаи:

1) $\overline{abcd}^2=\overline{abcd}\cdot 10^3+\overline{efg}$

2) $\overline{abcd}^2=\overline{abcd}\cdot 10^4+\overline{efgh}$

1) $\overline{abcd}=\overline{abcd}\cdot 10^3+\overline{efg}$

$\overline{abcd}(\overline{abcd}-10^3)=\overline{efg}$

Если $\overline{abcd}-10^3>0$, то левая часть выражения – хотя бы четырёхзначное число, а правая – трёхзначная, а значит они не равны. Единственный вариант $\overline{abcd}-10^3=0 \Rightarrow \overline{efg}=0 \Rightarrow n=1000$. Он подходит.

2) $\overline{abcd}^2=\overline{abcd}\cdot 10^4+\overline{efgh}$

$\overline{abcd}^2-\overline{abcd}\cdot 10^4=\overline{efgh}$

$\overline{abcd}(\overline{abcd}-10^4)=\overline{efgh}$

но $\overline{abcd}$ - четырёхзначное число $\Rightarrow <10^4 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ~~efgh~~ левая часть уравнения <0, а правая ≥ 0. Значит они не равны. Решений нет.

Ответ: 1000.

стр. 7

Чистовик

№3

Давайте будем составлять наш треугольник по трём вершинам, и посмотрим, сколько у нас будет вариантов.

Первой точкой будем выбирать противоположную гипотенузе. Её выбрать у нас 100 вариантов (т.к. всего таких точек 100)

Вторую точку выберем с тем же значением оси ординат, таких точек 9 (т.к. ту же самую точку мы не возьмём)

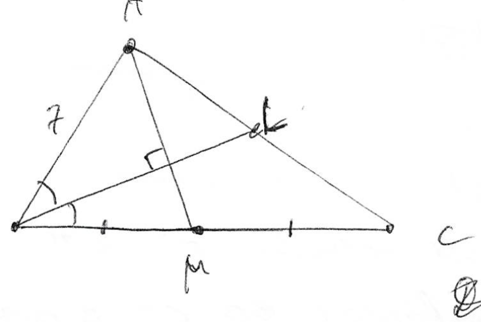
Третью точку выберем с тем же значением оси абсцисс, таких точек 9 (т.к. ту же самую точку не возьмём)

$\Downarrow$

Всего таких

$100 \cdot 9 \cdot 9 = 8100$ вар.

№4



т.к. в $\triangle ABM$ совпадают бис. и высота, $\triangle ABM$ равнобедренный, причём $AB = BM$.

$$AB = BM = \frac{1}{2} BC$$

$$\frac{1}{2} BC = AB = 7$$

$$BC = 14.$$

Значит длина AC должна быть такой, чтобы соблюдалось неравенство треугольника ABC, т.к. просто из того, что BC вдвое больше AB, следует факт о перпендикулярности медианы AM и бис-сы BL.

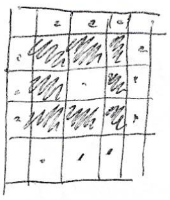
$$20 \geq AC \geq 8$$

Периметр $ABC = P \Rightarrow 14+7+20 \geq P \geq 8+7+14 \Rightarrow 41 \geq P \geq 29$ (P – целое)

Значит ответ: 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41.

Чистовик

№8



По условию, последний покрашенный квадрат будет выбран наугад среди всех незакрашенных, соседних к нашим закрашенным клеткам => всего таких клеток 13, а нам нужна одна => вероятность этого $\frac{1}{13}$.

№6

$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\le 0$ $\leftarrow a\neq 0$.

$|\cdot(-a^2)$

$x^2\cdot\frac{3}{a}-2x-a\ge 0$

$x^2\cdot\frac{3}{a}-x\cdot 2-a$ – квадратный трёхчлен, посчитаем дискриминант.

$D=4+4\cdot a\cdot\frac{3}{a}=4+12=16$

$x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{\frac{6}{a}}=a\cdot\frac{2\pm 4}{6}$

Рассмотрим 2 случая:

1) $a>0$:

У нас ~~тре~~ кв. трёхчлен с ветвями вверх

$\Rightarrow$ он ≥ 0 при $\left[\begin{array}{l} x\ge a\cdot\frac{2+4}{6}=a \\ x\le a\cdot\frac{2-4}{6}=-\frac{1}{3}a\end{array}\right.$

Тогда $\cancel{x}\in[a;+\infty)$.

Но такой отрезок никогда не имеет длину 2026.

Значит это нам не подходит.

2) $a<0$:

У нас кв. трёхчлен с ветвями вниз $\Rightarrow$

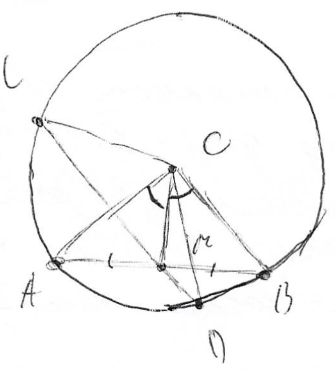
$\Rightarrow$ он ≥ 0 при $a\cdot\frac{2-4}{6}\ge x\ge a\cdot\frac{2+4}{6}\Rightarrow -\frac{1}{3}a\ge x\ge a$.

Тогда длина отрезка от $-\frac{1}{3}a$ до a $=2026$.

$\Rightarrow\left|\frac{4}{3}a\right|=2026\Rightarrow a=-1519{,}5$.

Ответ: при $a=-1519{,}5$.

№7 Чистовик стр. 4

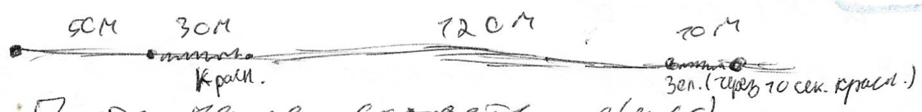


Во-первых докажем, что если 2 хорды точкой пересечения делятся пополам, то это 2 диаметра, пересекающихся в центре окружности:
Проведём хорду, отметим середину.
У второй хорды одна вершина будет находиться на меньшей дуге AB, а одна на большей. Тогда, если она точкой M разделится пополам, то $\angle COM = \angle MOD$. Но тогда $\angle DOM < \angle BOM$, а $\angle COM > > \angle AOM = \angle MOB \Rightarrow \angle DOM < \angle BOM$, $\angle COM > \angle BOM \Rightarrow$ $\Rightarrow$ они не равны $\Rightarrow$ такого, что AB и CD – не диаметры быть не может. ~~Тогда~~

Тогда 3 хорда – также диаметр, ведь она проходит через центр окружности. $\Rightarrow$ её длина это 2 радиуса т.е. $5 \cdot 2 = \underline{10}$

Ответ: 10.

№5



Пусть наша скорость – a (м/с).

Посмотрим, какая в целом у нас может быть наибольшая скорость – для этого мы должны проехать 50 м за 30 секунд, т.е. $a = \frac{5}{3}$ (м/с). Тогда по первому переходу мы заезжаем как только загорелся зелёный, но вот доезжаем мы до него, до второго, как на нём красный. не подходит. А что если мы хотим успеть во всё тот же зелёный интервал первого светофора, но уже как можно с меньшей скоростью?

$$\begin{cases} a \cdot 30 \le 50 \\ a \cdot 80 \ge 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a \le \frac{5}{3} \\ a \ge 1 \end{array} \quad \text{т.е. } a = 1 \text{ (м/с)}$$

Чистовик стр. 5

№5 (продолж.)

Тогда на второй светофор мы заезжаем через 200 сек. после начала => тем зелёный и как только мы с него съезжаем, загорается красный. => Значит на интервале между $\frac{5}{3}$ м/с и 1 м/с есть скорость, при которой мы успеем на оба светофора в соответствии с условием. Давайте найдём каждую скорость:

(чем раньше интервал - тем выше скорость)

на 80 сек. загорается красный на I

$80 \geq \frac{80}{a}$ ← расст. до конца I перехода.

на 270 секунде загорается красный на II

$270 \geq \frac{270}{a}$ ← расст. до конца II перехода

$30 \leq \frac{50}{a}$ ← расст. до начала I перехода

на 30 секунде загорается зелёный на I

$160 \leq \frac{200}{a}$ ← расст. до начала II перехода

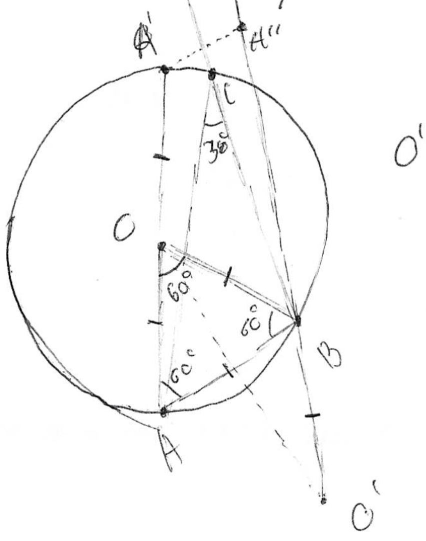
т.к. на 160 секунде загорается ~~красный~~ зелёный на II

$a \geq 1$ $\quad a \geq 1$

$a \leq \frac{5}{3}$ $\quad a \leq \frac{5}{4}$

Опираясь на все неравенства можно сказать, что наибольшая подходящая скорость это $\frac{5}{4}$ м/с.

Ответ: $\frac{5}{4}$ м/с.



№7

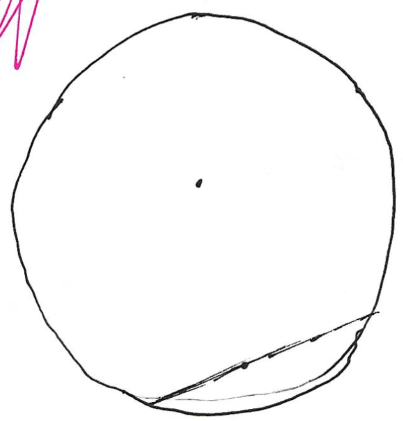
$O'B \parallel AO$ т.к. отр. правильного треугольника $\triangle OAB$

Ответ: 75°.

80 (Восемьдесят)

80-47-81-11 (122.2)

Черновик



$10000^2 = 100000000$

1000

$1000 \times 1000 = 1000000$

$9999 \times 9999 = 99980001$

$\overline{abcd}^2 = \overline{abcd....}$

$(a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d)^2 =$

$a^2\cdot 10^6 + b^2\cdot 10^4 + c^2\cdot 10^2 + d^2 + 2ab\cdot 10^5 + 2ac\cdot 10^4$

$+ 2ad\cdot 10^3 + 2bc\cdot 10^3 + 2bd\cdot 10^2 + 2cd\cdot 10$

0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

$\overline{1bcd}$

с b нету перехода на a.

$a^2\cdot 10^6 + 2ab\cdot 10^5 + 10^4(b^2+2ac) + 10^3(2ad+2bc) +$

$+ 10^2(2bd + c^2) + 10\cdot 2cd + d^2$

1) у a^2 есть переход:

$a^2\cdot 10^2 + 2ab\cdot 10 + b^2 + 2ac = \overline{abcd}$

2) у a^2 нет перехода:

$a^2\cdot 10^3 + 2ab\cdot 10^2 + (b^2+2ac)\cdot 10 + 2ad + 2bc =$
$= \overline{abcd}$

1) $100a^2 + 20ab + 2ac + b^2 = 1000a + 100b + 10c + d$

1) $\overline{abcd}^2 = \overline{abcd}\cdot 10^3 + \overline{efg}$

2) $\overline{abcd}^2 = \overline{abcd}\cdot 10^4 + \overline{efgh}$

$\overline{abcd}(\overline{abcd} - 10^3) = \overline{efg}$

только если $\overline{abcd} - 10^3 = 0$

$\overline{abcd} \mid \overline{abcd}$

Черновик

$(0;0)$

$(0;10)$

$0;10$ $1;10$ $2;10$ $3;10$ .... $10;10$

$0;9$

$0;2$

$0;1$

$(0;0)$ $1;0$ $2;0$ $3;0$ $4;0$ ..... $10;0$

~~10 на 11~~

10 на 10

~~$100\cdot 9\cdot 9$~~

$100\cdot 10\cdot 9$

$\underline{100\cdot 9\cdot 9}$

$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\le 0$

$4x=2026$

$x=506,5$

~~$a=2x$~~

$a=\frac{-2x\pm\sqrt{16x^2}}{2}$

$x\ge a\ge -3x$

1) $a>0$:

$1\cdot a^2+2xa-3x^2\le 0$

$D=4x^2+12x^2=16x^2$

2) $a<0$:

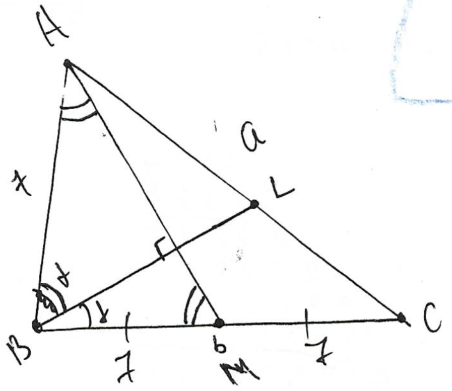
$1\cdot a^2+2xa-3x^2\ge 0$

$D=4x^2+4\cdot 3x^2=16x^2\ge 0$

$a=\frac{-2x\pm\sqrt{16x^2}}{2}=$

$=\frac{-2x\pm 4x}{2}=$

$=-x\pm 2x$



$20\ge a\ge 8$

$\left[\begin{array}{l} a\le -3x \\ a\ge x \end{array}\right.$

80-47-81-11
(22.2)

Черновик

1) $a>0$

$x \geq a \geq -3x$

2) $a<0$

$\left[\begin{array}{l} a \leq -3x \\ a \geq x \end{array}\right.$

$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0$

$\cancel{x\cdot\left(-\frac{3}{a^2}\right)}$

$\frac{3x^2}{a^3} - \frac{2x}{a^2} - \frac{1}{a} \geq 0$

$\cancel{3x^2 - x\cdot 2a - a^2 \geq 0}$

$x^2 \cdot \frac{3}{a} - 2x - a \geq 0$

$\cancel{D = 4 + 4\cdot a \cdot \frac{3}{a}}$

$D = 4 + 4\cdot a \cdot \frac{3}{a} = 16 = 4^2$

$x = \frac{2 \pm 4}{\frac{6}{a}} = a \cdot \frac{2\pm 4}{6}$

1) $a>0$:

$x^2 \cdot \frac{3}{a} - 2x - a \geq 0$

$\cancel{a \leq x \leq -\frac{1}{3}a}$

$\left[\begin{array}{l} x \geq a \\ x \leq -\frac{1}{3}a \end{array}\right.$

$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}a\right] \cup [a; +\infty)$.

2) $a<0$:

$a \leq x \leq -\frac{1}{3}a$

$\cancel{x \in \left[a; -\frac{1}{3}a\right]}$

$x \in [a; 0) \cup \left(0; -\frac{1}{3}a\right]$

$\frac{4}{3}a = 2026$

Ни при каких.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

~~шшшш~~ Черновик

I - 30с. красный, 50с. зел.

II - 50с. красный, 50с. зел.

1) $\frac{50}{30}$ $\frac{м}{с}$:

$\frac{30}{\frac{5}{3}} = 18$ $\quad \frac{120}{\frac{5}{3}} = \frac{360}{5} = 72 (с)$

$30 + 18 + 72 = 120$

$\frac{80}{\frac{5}{4}} = \frac{320}{5} = 64$

$\frac{200}{\frac{5}{4}} = 160$

$\frac{210}{\frac{5}{4}} = 168$

2) 1 $\frac{м}{с}$:

200

~~а (км/ч)~~

~~а (м/с)~~

~~$\frac{5}{3} \geq а, 1$~~

~~$\frac{200}{а} \leq 200$~~

$\frac{200}{а} \leq 160$

$\frac{210}{а} \geq 210$

~~$\frac{30}{а} \geq$~~

$\frac{50}{а} \geq 30$

$\frac{80}{а} \leq 80$

$\frac{200}{160} \leq а$ $\quad \frac{50}{30} \geq а$

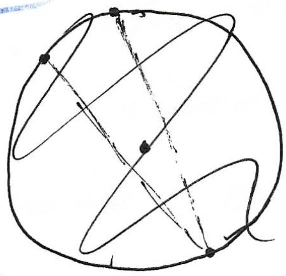
$\frac{210}{210} \geq а$ $\quad \frac{80}{80} \geq а$

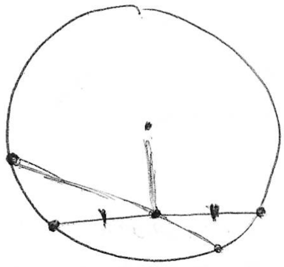
$а \geq 1$

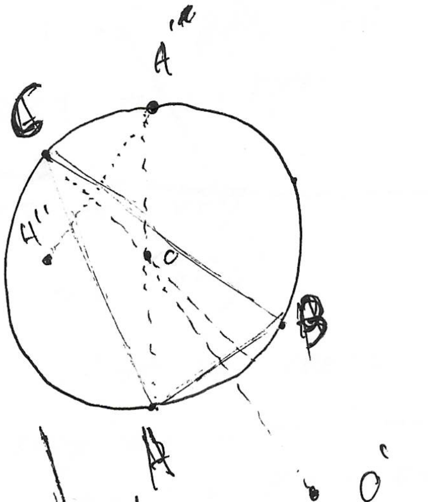
$а \leq \frac{5}{4}$ $\quad \frac{5}{3} \leq а$

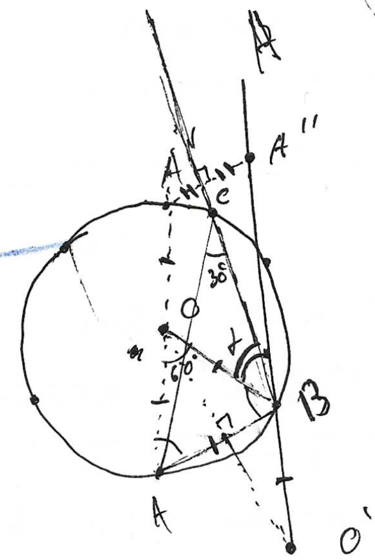
80-47-81-11
(122.2)

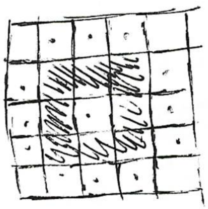
Черновик











$\frac{1}{13}$

$\frac{4}{9} \cdot 0$