0 434398 940004

43-43-98-94

(129.11)

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
## имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс, вариант 2

Место проведения г. Ульяновск
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Фроловой Татьяны Игоревны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» МАРТА 2026 года

Подпись участника

100 (сто) финиш



Задача 2. Верно

черновик.

Обозначим искомое трёхзнач. число через x. Из условия $\frac{x}{S(x)} = 9 \cdot m$, где $m \in N$.

Отсюда $x = 9m \cdot S(x)$.

Очевидно, $x \vdots 9 \Rightarrow$ по признаку делимости $S(x)$ тоже $\vdots 9$.
Поскольку число трёхзначное, возможно лишь 3 варианта для суммы его цифр: 9, 18, 27.

$\rceil S(x) = 9$, тогда $x \vdots 81$, рассмотрим числа вида $81 \cdot k$, выберем такие числа, сумма цифр которых $\vdots 9$.

Подходит 162, 243, 324, 405, 810.

Если $S(x) = 18 \Rightarrow x \vdots 162$. Проверим числа вида $162 \cdot k$; получим 486, 648, 972.

Если $S(x) = 27 \Rightarrow x \vdots 243$. Однако единственное подходящее трехзначное число это 999, но оно $\not\vdots 243$.

Расположим в порядке возрастания:

162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972.

$162 + 648 + 972 = 1782$

Ответ: 1782

Задача 3.

Координаты точек принимают целые значение от −6 до 6, таких значений 13, а значит, заданное множество F состоит из 13 точек.

Катеты искомого прямоугольного $\Delta$ $\parallel$ 2-м различным осям координат. Пару осей можно выбрать $C_3^2 = 3$ способами.

Зафиксируем вершину при прямом угле, назовём её A. Эту точку можно выбрать $13^3$ способами.

] выбранные оси — $Oy$ и $Ox$, тогда вторая вершина первого катета отличается от $A$ только абсциссой. Других доступных абсцисс ровно 12. Аналогично, вторая вершина второго катета отличается от $A$ лишь ординатой, для неё 12 вариантов выбора в $F$.

Понятно, что гипотенуза полученного $\triangle$ не будет $\parallel$ ни одной из координатных осей.

Значит, прямой угол и катеты определяются однозначно (никакой $\triangle$ не посчитан дважды).

Тогда итоговое число треугольников: $3 \cdot 13^3 \cdot 12 \cdot 12 =$
$= 9491004$

Ответ: 9491004

Задача 1.

ОДЗ по условию неотрицательности правой части

$$\begin{cases} 1 - tg^2 x \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x \leq \cos^2 x \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Возведем уравнение в квадрат:

$$3(1 - tg^2 x) = 8 \sin^2 x$$

] $u = \sin^2 x$, где $u \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

выразим $tg x$: $tg^2 x = \frac{u}{1-u}$. Тогда:

$$3\left(1 - \frac{u}{1-u}\right) = 8u \Rightarrow \frac{3(1-2u)}{1-u} = 8u$$

Т.к. $u \leq \frac{1}{2}$, то $1 - u \neq 0$, умножим на $1-u$:

$$3 - 6u = 8u - 8u^2 \Rightarrow 8u^2 - 14u + 3 = 0 \Rightarrow 8\left(u - \frac{1}{4}\right)\left(u - \frac{3}{2}\right) = 0$$

Корни: $\left[\begin{array}{l} u_1 = \frac{1}{4} \\ u_2 = \frac{3}{2} \end{array}\right.$

Т.к. $u \in [0; \frac{1}{2}]$ $\Rightarrow$ подходит только $u = \frac{1}{4}$ чистовик.
$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}$, т.к. $\sin x \geq 0$, то $\sin x = \frac{1}{2}$
А значит, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$
Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Задача 4.

По формуле Эйлера $M = 1 + G + A$, где N - число внутренних пересечений.
График $y = \sin(k\pi x)$ при нечётном k имеет k экстремумов на $[0, 1]$ (точки касания $y = \pm 1$), разбиваясь на $k+1$ хорду.
$G = (11+1) + (13+1) + (15+1) = 42$
Корни $\sin(a\pi x) = \sin(b\pi x)$ на $[0, 1]$
з $|y| < 1$ ищем среди серий $x = \frac{2m}{b-a}$ и $x = \frac{2m+1}{b+a}$, $m \in Z$
Пары $(11, 13)$: $x = m$ $\varnothing$. $x = \frac{2m+1}{24}$ дают 12 точек; на границу не попадают, т.к. $11(2m+1) \not\equiv 0 \pmod{12}$
Итого 12.
Пара $(11, 15)$: $x = m$ дает $x = \frac{1}{2}$ (граница, $y = -1$).
$x = \frac{2m+1}{26}$ дает 13 точек; на границе $11(2m+1) \equiv 0 \pmod{13}$
$\Rightarrow m = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Исключили повторение. Итого 13.
Пара $(13, 15)$: $x = m$ $\varnothing$. $x = \frac{2m+1}{28}$ дает 14 точек; на границе не попадают ($13(2m+1) \not\equiv 0 \pmod{14}$). Итого 14.
Тройных пересечений нет: равенство дробей со знаменателями: 24, 26, 28 - невозможно из-за разной чётности. Числитель нечетен при приведении. Внутренних касаний нет: $s(a) = s(b)$ и $s'(a) = s'(b)$ $\Rightarrow |y| = 1$ (точка на границе).
$A = 12 + 13 + 14 = 38$
$M = 1 + 42 + 38 = 81$ Ответ: 81.

Задача 8. членовым.

~~Решение~~:

ОДЗ $x, a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

$] \ t = \log_a x$ :

$$\frac{3x^2 \cdot t^2 - 2xt - 1}{t} \le 0$$

корни числителя: $\frac{1}{x}, -\frac{1}{3x}$. Т.к. $x > 0$, то $-\frac{1}{3x} < 0 < \frac{1}{x}$

Метод интервалов даёт совокупность:

$\log_a x \le -\frac{1}{3x}$ и $0 < \log_a x \le \frac{1}{x}$

Исследуем $h(x) = x\ln x$. Точка min $x = \frac{1}{e}$, наименьшее значение $h(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$. На $[0; \frac{1}{x}]$ функция убывает, на $[\frac{1}{e}; +\infty)$ ↑.

$] \ A > 1$.

Умножим совокупность на $x \cdot \ln A > 0$; второе условие $0 < x\ln x \le \ln A$, откуда $x > 1$. Т.к. $h(x)$ возрастает на $(1;+\infty)$, решение — интервал $(1; x_0]$.

Из первого условия: $x \cdot \ln x \le -\frac{1}{3}\ln A$.

Изолированная точка возникнет, только если прямая $y = -\frac{1}{3}\ln A$ касается минимума $h(x)$.

Имеем $-\frac{1}{3}\ln A = -\frac{1}{e}$, откуда $A = e^{\frac{3}{e}}$. Решением $x = \frac{1}{e}$ $\notin (1; x_0]$. Значение подходит.

$] \ 0 < A < 1$.

Умножение первого условия на $x\ln A < 0$: $x \cdot \ln x \ge -\frac{1}{3}\ln A > 0$. В силу возрастания $h(x)$ при больших $x$, решением будет бесконечность $[1; +\infty)$. Он не является ограниченным полуинтервалом $\Rightarrow$ решений в этом случае нет.

Ответ: $A = e^{\frac{3}{e}}$ чистовик.

Задача 7.

$\exists k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$. Узлы сетки – решение уравнение $2x^2+a = -2x^2+b$, откуда $4x^2 = b-a = k$
абсциссы лежат на прямых $x_k = \pm\frac{\sqrt{k}}{2}$.
Любая клеточка ограничена параболами с параметрами ~~[a, a+1]~~ $a, a+1$ (ветви вверх), и $b, b+1$ (ветви вниз). Вершины такого четырёхугольника – смежные узлы. В силу симметрии диагонали // осям координат, следовательно $S = \frac{1}{2} \cdot t_x \cdot t_y$. Вертикальная диагональ всегда равна 1 ($t_y$; разность ординат узлов с одинаковой абсциссой, но параметрами, отличающимися на 1). Но возможны 2 вида клеточек:
I. – центральные (зажаты между $x_{-1}, x_1$) горизонтальная диагональ $t_x = x_1 - x_{-1} = 1$, тогда $S_0 = 0,5$ (площадь).
II – боковые, при $k \geq 1$. Горизонтальная диагональ $t_x = x_{k+1} - x_{k-1} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{2}$; $S_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{4} = \frac{1}{2(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})}$. По условию требуется найти большую площадь. Т.к. ф-ция $f(k) = \sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}$ возрастает, то при $k \geq 1$ max $S_k$ достигается при $k=1$, при этом $S_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} < 0,5$.
$\Rightarrow$ наибольшая $S = 0,5$. Центральная клеточка имеет размер $1 \times 1$ $S_0$ и гарантированно помещается на листе $210 \times 297$ мм. Отсюда: $S = 0,5$

Ответ: 0,5

Задача 6. черновик.

$\exists$ плоскость забора $= 0$, $x \in [0;3]$, $z \in [0;2]$.
Земля – плоскость $z = 0$. Позиция источника
$L(t = (9t-3, 3t+4, 6), t \in [0;1])$ отрезок от $L$ до
точки

черновик.

$\sqrt{\frac{3}{\cos^2 x}} = 2\sqrt{2}\sin x$ $\quad 1-tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad D = 8\cdot 8 - 4\cdot 3\cdot 8 = 8\cdot 4(2-3) < 0$

$\sqrt{\frac{3}{1-\sin^2 x}} = 2\sqrt{2}\sin x$

$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \geq 0\\ \frac{3}{1-\sin^2 x} = 8\sin^2 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|\sin x| \neq 1\\ \sin x \geq 0\\ 3 = 8\sin^2 x - 8\sin^4 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|\sin x| \neq 1\\ \sin x \geq 0\\ 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 3 = 0\end{cases}$ $\varnothing$

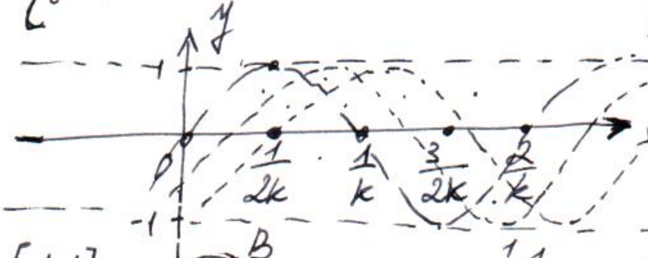
$y = \sin k\pi x$

$T = \frac{2}{k}$

$\frac{T}{2} = \frac{1}{k}$

$\frac{T}{4} = \frac{1}{2k}$

$\frac{3T}{4} = \frac{3}{2k}$



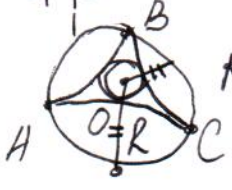

$k \in \{11, 13, 15\}$

$5 + 6 + 7 = 18$

~~19 ...~~

$9\cdot 5 + 6 + 3 = 9\cdot 6 = 54$

$\begin{cases} y \in [-1;1]\\ x \in [0;1]\end{cases}$




$R = 1.$

$144 \times 3 = 432$

$432 \times 507$

$2197$

$13^2 = 169$

$13^3 = 2197$

$1 - tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

1. +
2. +
3. +
4.
5.
6.
7. +
8. +