0 505881 180006

50-58-81-18
(129.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 3

Место проведения Уфа
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Хазиева Саида Ришатовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

70 (семьдесят) физ

50-58-81-18 (129.4)

Черновик $\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$

$\cos x \geq 0$ $\sin x \neq 0$

$3-3ctg^2x \geq 0$

$1 \geq ctg^2x$

$-1 \leq ctg\, x \leq 1$

$3-3ctg^2x = 8\cos^2x \; | \cdot \sin^2 x$

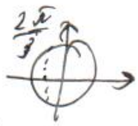
$3\sin^2x - 3\cos^2x = 2\sin^2(2x)$

$-3\cos^2 2x = 2-2\cos^2(2x)$ $\quad t=\cos 2x$

$2t^2-3t-2=0$ $\quad |t| \leq 1$

$D=(-3)^2+4\cdot2\cdot2=25$

$t=\frac{3\pm5}{2\cdot2}=\cancel{2};\ -\frac{1}{2}$



$\cos 2x = -\frac{1}{2}$

$2x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$

$x = \pm\frac{\pi}{3}+\pi k$

$1=\sin^2x+\cos^2x \; | : \sin^2x$

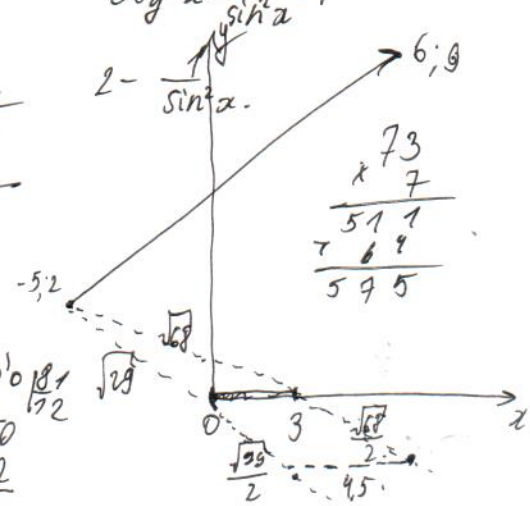
$\frac{1}{\sin^2x}=1+ctg^2x$

$ctg^2x=\frac{1}{\sin^2x}-1$

$2-\frac{1}{\sin^2x}$

$81 \times 22 = 162 + 162 = 1782$

73×7: 511, 766, 5775



A: $n : (a+b+c) = k : 9$

$\overline{abc}$

108

$n : 9$

$a+b+c : 9$

$81\cdot2 = 162$
$81\cdot3$ (9)
$81\cdot4$
$81\cdot5$
$81\cdot6$
$81\cdot7$ (6)
$81\cdot8$
$81\cdot9$
$81\cdot10$
$81\cdot12$ (посл)

$1000 : 81 = 12$; -81, 190, 162

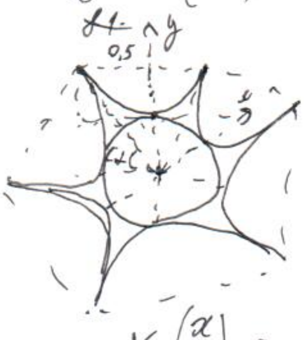
$S = 81\cdot22$

1) √
2) √
5) √

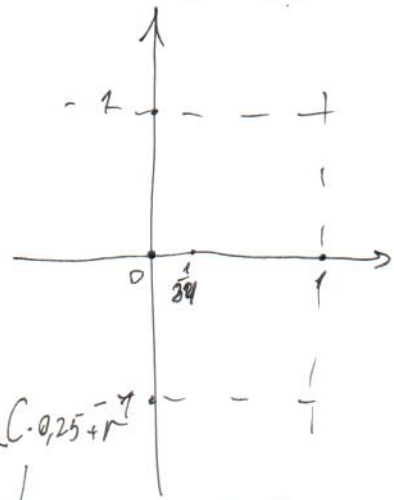
$k: 11, 15, 17.$

1

или



$y = C\cdot0{,}25+r$



$\sqrt{3}=\frac{0{,}25C+r}{0{,}5}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}25C+r=2r$

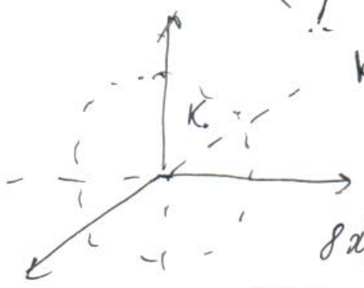
$tg\,\alpha=\frac{0{,}25C+r}{0{,}5}=0{,}5C+2r$

$tg\,\alpha=y'(0{,}5)=2Cx=0{,}5\cdot2\cdot C=C$

$0{,}5C+2r=C$

$C+4r=2C$

$4r=C$



$K: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x,y,z \in 5$

$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

$a>0$, $a \neq 1$; $x>0$, $x\neq1$

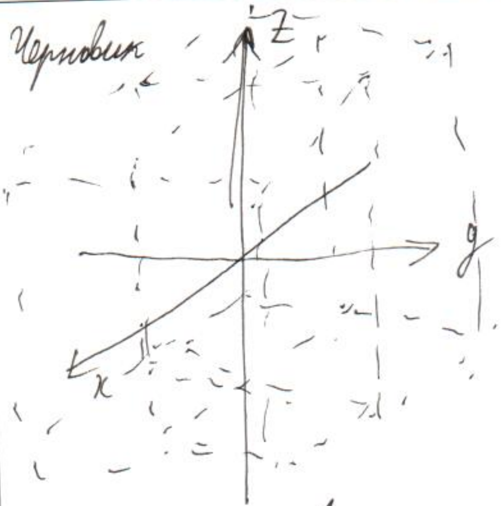
$\log_a x^{8x^2} - \log_a a^{2x} - \log_x a \geq 0$

$16x\log_a x + 8x^2\frac{1}{x\ln a} - x > 0$

$16x\log_a x + \frac{8x}{\ln a} - \frac{1}{x\ln a} - 2 \vee 0$ $\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

$-\frac{1}{x\ln a} - 2 \vee 0$

Черновик



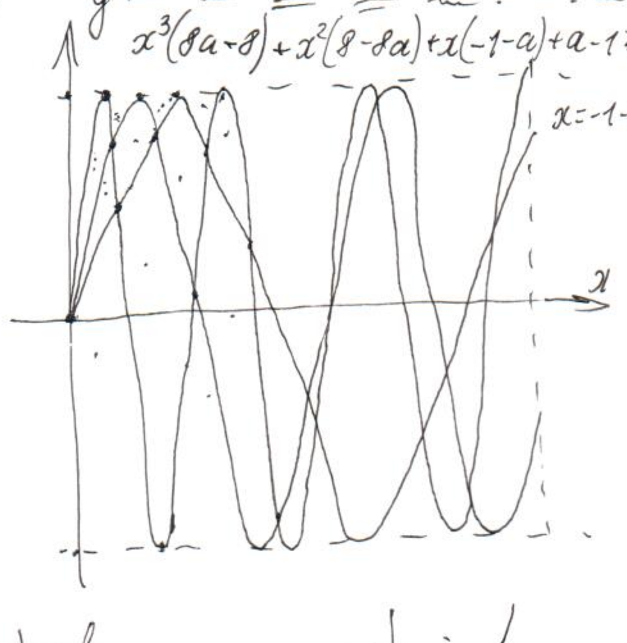
Код!

$8x^2(ax-x-a+1)-(ax-a-x+1)-2x \geq 0$

$8ax^3-8x^3-8ax^2+8x^2+ax+a+x+1-2x \geq 0$

$x^3(8a-8)+x^2(8-8a)+x(-1-a)+a-1 \geq 0$

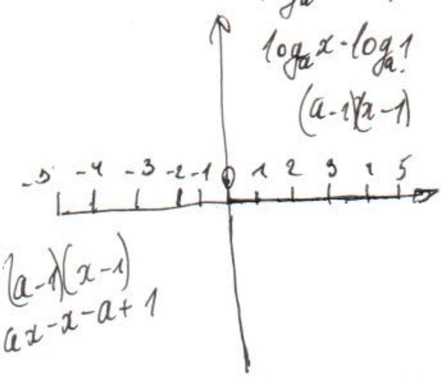
$x=-1$ - корень



$\log_a x \vee 0$

$\log_a x - \log_a 1$

$(a-1)(x-1)$



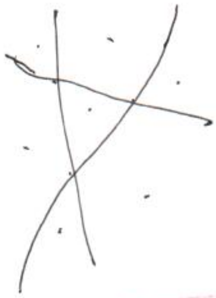
$(a-1)(x-1)$

$ax-x-a+1$

1) $11=k$

$y=\sin(k\cdot\pi)$

$k=\frac{1}{22};\frac{2}{22};\frac{3}{22}\dots\frac{22}{22}$



1: 10. $8x^2\cdot\log_a^2 x-2x\cdot\log_a x$.

2: 9 $8x^2\cdot(a-1)(x-1)$ $k=15:\frac{1}{30};\frac{2}{30}\dots\frac{30}{30}$

3: 8 $-2x$. $k=17$ $\frac{1}{34};\frac{2}{34};\frac{3}{34}\dots\frac{34}{34}$

4: 7 55 $3|165\cdot110$

5: 6

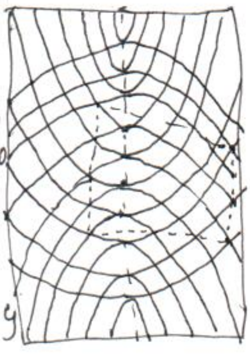
6: 5 $8x^2\cdot\log_a^2 x-2\cdot x\cdot\log_a x-1 \geq 0$ $\vee 0$

7: 4 $(4x^2\cdot\log_a^2 x-2x\log_a x+1)+4x^2\log_a^2 x-2 \geq 0$

8: 3 $(2x\log_a x-1)^2$

9: 2

10: 1

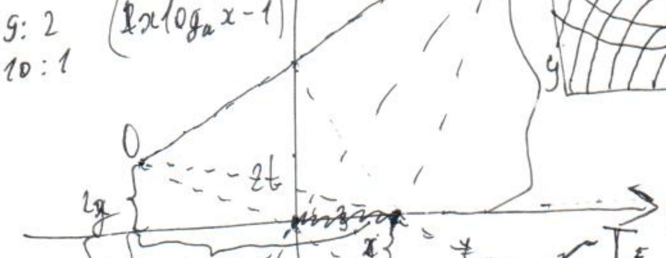


$3k+b=0$

$6k+b=9$

$3k=9$

$k=3,\ b=-9.$



$\frac{6}{9}\cdot10=\frac{20}{3}-6=\frac{2}{3}$

6.

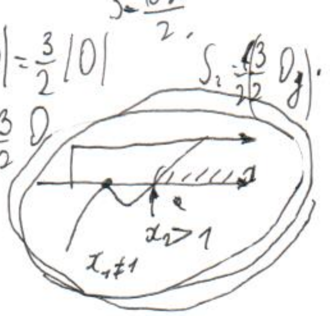
$3=\frac{O_x}{2}$

$x: \ |T-O|=\frac{3}{2}|O|$ $S_z=\frac{3}{2}O_z$

$y: \ O+|T|=\frac{3}{2}O$

$x>0$ $a>0$

$x\neq1$ $a\neq1$



$8x^2\log_a x-\log_x a-2x \geq 0$

$8x^2\log_a x-\frac{1}{\log_a x}-2x \geq 0$ при $x\to\infty$, $f(x)\geq0$ ✓ $8a^2-1-2a$

50-58-81-18 (129,4)

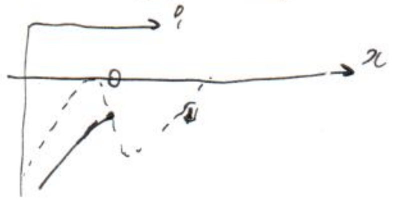
Черновик $x^3(8a-8)+x^2(8-8a)+x(-1-a)+(a-1)\geq 0$ $x>0$ $a>0$ $x\neq 1$ $a\neq 1$

$8x^3(a-1)-8x^2(a-1)-x(a+1)+a-1$ $\cancel{x^3(8a-8)}$

$8x^2(a-1)(x-1)$

$\cancel{x=1}$: $F(x)$

$x=1: f(x)=-2<0.$



$f'(x)$ $x^2\cdot 24(a-1)-16(a-1)\cdot x-(a+1)=0.$

$24a-24-16a+16-a+1$

$7a-7$

I $0<a<1$: $f'(x)$ в т. 1 ↘

II $a>1$: $f'(x)$ ↗

$256(a-1)^2+4\cdot 24\cdot(a-1)(a+1)=$

$=256a^2-512a+256+96a^2-96>0.$

$352a^2-512a+160>0.$

$88a^2-128a+40>0.$

$22a^2-32a+10>0.$

$11a^2-16a+5>0.$

$D=256-220=36.$

$a=\frac{16\pm 6}{11}=\frac{10}{11};\ 2$

$\times\begin{array}{r}24\\4\\\hline 96.\end{array}$

$+\begin{array}{r}256\\96\\\hline 352\end{array}$

$-\begin{array}{r}256\\96\\\hline 160\end{array}$

$352\,|\,4$, -32, $88.$, 32

$512\,|\,4$, -4, $128.$, 11

0, $\frac{10}{11}$, 2 – два экстремума

$x=\frac{16(a-1)\pm\sqrt{11a^2-16a+5}}{}$

$x^3(8a-8)-x^2(8a-8)+x(a-1)+(a-1)\geq 2x$

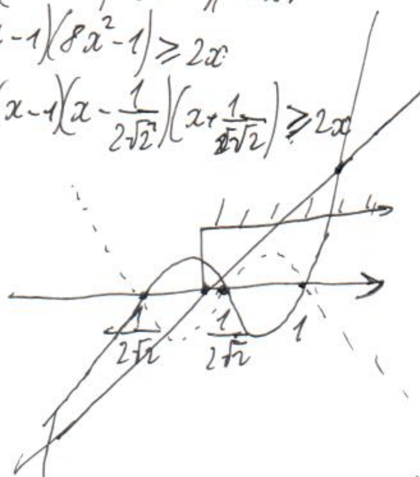
$(a-1)(8x^3-8x^2-x+1)\geq 2x.$

$(a-1)x(8x^2(x-1)-(x-1))\geq 2x.$

$(a-1)(x-1)(8x^2-1)\geq 2x$

$8(a-1)(x-1)\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\geq 2x$

$a>1$:



$x>0$

$x=1$

$a=1$

$a>0.$

$\times\begin{array}{r}165\\110\\\hline 165\\165\\\hline 17150\end{array}$

Чистовик №1 $\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$, Огр: $\cos x \geq 0$

возвели в квадрат $\quad -1 \leq ctg\, x \leq 1$

$3 - 3ctg^2x = 8\cos^2 x \mid \cdot \sin^2 x \neq 0$ по огр

т.к. $ctg\,x \Rightarrow \sin x \neq 0$

$3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 8\cos^2 x \cdot \sin^2 x$,

$\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$, $2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

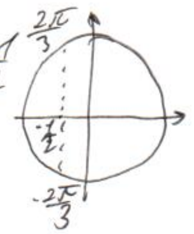
$-3\cos(2x) = 2\sin^2 2x$, по ОТТ: $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$.

$-3\cos(2x) = 2 - 2\cos^2 2x$, $\cos 2x = t$ - замена, $|t| \leq 1$

$2t^2 - 3t - 2 = 0$

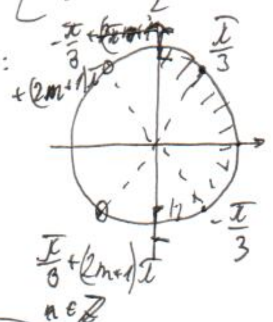
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$.

$t = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$, $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ $|t_1| > 1$ - нету корней $x \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$



$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\cos(x) \geq 0$:



$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \end{array}\right.$, $ctg\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \leq 1$, подходит

$ctg -\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \geq -1$ подходит т.к. ctg у период π

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$

$\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$.

$\Rightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right. \text{ - ответ}}$

№2. n - число в A. для трехзначных n: $n = \overline{abc}$

$\frac{n}{a+b+c} = k$, $k \vdots 9 \Rightarrow n = (a+b+c) \cdot k$, правая часть делится на $9 \Rightarrow$ $n \vdots 9$, тогда $a+b+c \vdots 9$ (признак деления).

$n \vdots 81$, $100 : 81 = 1,\ldots \Rightarrow$ первое число $81 \cdot 2 = 162$

$1000 : 81 = 12,\ldots \Rightarrow$ последнее число $81 \cdot 12 = 972$

Значит все числа:

$81 \cdot 2 = 162$	(1)
$81 \cdot 3 = 243$	(2)
$81 \cdot 4 = 324$	(3)
$81 \cdot 5 = 405$	(4)
$81 \cdot 6 = 486$	(5)
$81 \cdot 7 = 567$	(6)
$81 \cdot 8 = 648$	(7)
$81 \cdot 9 = 729$	(8)
$81 \cdot 10 = 810$	(9)
$81 \cdot 11 = 891$	(10)
$81 \cdot 12 = 972$	(11)

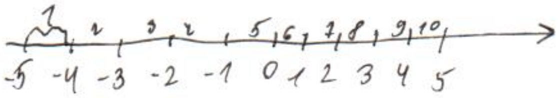
Сумма (2), (6) и последнего:

$81 \cdot 3 + 81 \cdot 7 + 81 \cdot 12 = 81 \cdot 22 = \underline{1782}$

50-58-81-18
(129.4)

Чистовик - №3. Пространство F - это куб со сторонами 10×10×10
занимаемое F

Чтобы задать треугольник, нужно выбрать две стороны, третья определится однозначно.



Его катет треугольника - отрезок длиной равной целому шагу от 1 до 10

Выбрать отрезок длины 1: 10 способов (по рисунку)

Выбрать отрезок длины 2: 9 способов

3 : 8

4 : 7

5 : 6

6 : 5

7 : 4

8 : 3

9 : 2

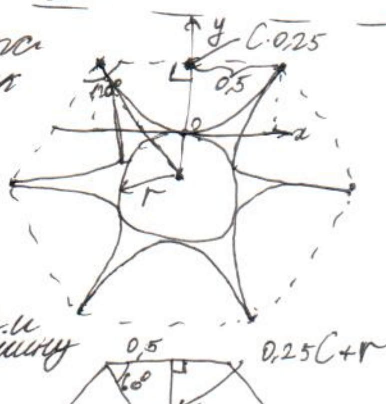
10 : 1 → 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 55 - способов выбрать отрезок на одной оси

Значит выбрать первый катет: $3\cdot 55 = 165$ ← три оси на выбор

А выбрать второй катет: $2\cdot 55 = 110$ ← две оси на выбор, т.к. катеты не могут быть параллельны друг другу

Тогда всего способов: $165\cdot 110 = 17150$ - ответ.

№5. $y = C\cdot x^2$. В силу симметрии, фигура из пунктира - правильный шестиугольник со стороной 1 (по условию)



т.к. угол „шестиугольника" в вершине равен нулю, тангенс угла наклона касательной совпадает с прямой, проходящей через центр окр. и вершину

$y' = 2Cx$, а в т. (0,5) $y'(0,5) = C$

прямая, проходящая через центр: $f(x) = kx + b$

$k = C (= y')$, $b = -r$

$f(0) = -r$, по рисунку

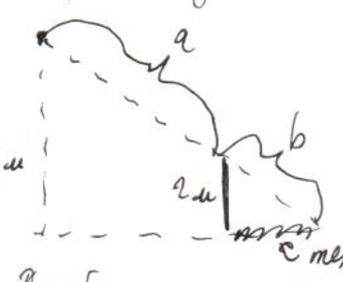
$f(0,5) = 0,25C = 0,5C - r$

$r = 0,25C \Rightarrow C = 4r$

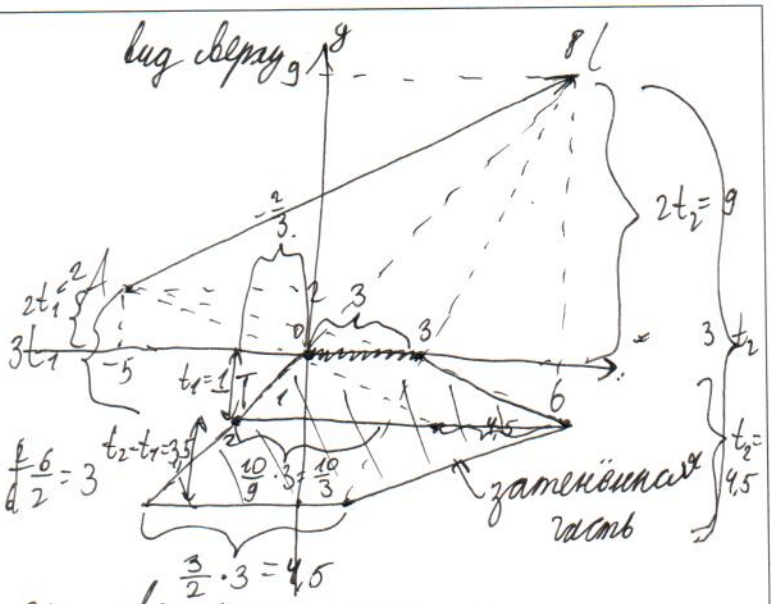
$tg 60° = \frac{0,25C + r}{0,5} = \frac{r + r}{0,5} = 4r = \sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{4}$ - ответ

Чистовик №6.

вид с боку



вид сверху



Подобные треугольники, $k=\frac{6}{2}=3$

тогда $k\frac{a}{b}=\frac{2}{1}=2$

Соединяя путь света от светлячка до определенной точки забора, получаем подобный треугольник, с $k=3$

Возьмем крайние точки и покажем границы крайних теней, все затенёные точки будут в этой фигуре

Т.к. треугольники подобны => эта фигура - две трапеции с одним общим основанием

Найдем параметры трапеций: 3 дано, 4,5 - из подобия (на рисунке показано)

~~Основание~~ в полтора раз больше (аналогично с гонаго) чем $3-(-5)=8$: ~~12~~ => 12.

точка T принадлежит прямой ~~f(x)~~ $kx+b$, $f(6)=6k+b=9$

$f(0)=0k+b=0 \Rightarrow b=0, k=\frac{3}{2}$.

$12-5+\frac{2}{3}=7+\frac{2}{3}$ - общее основание $f(-1)=\frac{3}{2}x=-1 \Rightarrow x=-\frac{2}{3} \Rightarrow T\binom{-\frac{2}{3}}{-1}$

Тогда площадь затемненной части: $\frac{1}{2}\left(7+\frac{2}{3}+3\right)\cdot 1+\left(7+\frac{2}{3}+4{,}5\right)\cdot 3{,}5=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}+\left(\frac{23}{3}+\frac{9}{2}\right)\cdot\frac{7}{2}=\frac{16}{3}+\frac{46+27}{6}\cdot\frac{7}{2}=\frac{16}{3}+\frac{73\cdot 7}{12}=\frac{16\cdot 4+73\cdot 7}{12}=\frac{575}{12}$ - ответ.

№8. $8x^2\cdot\log_a x-\log_x a-2x\geq 0$.

$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$ одз.

Нам важны знаки => по методу рационализации:

$\log_a x\geq 0 \underset{\text{по знаку}}{\Leftrightarrow} (a-1)(x-1)\geq 0$

$\log_x a\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(a-1)$

Тогда $8x^2(a-1)(x-1)-(x-1)(a-1)-2x\geq 0$

$(a-1)(x-1)(8x^2-1)\geq 2x$

$8(a-1)(x-1)\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\geq 2x$; рассмотрим $y=2x$

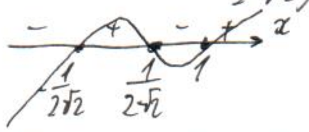
$y=8(a-1)(x-1)\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

Чистовик №8. продолжение. (окр. учтем позже)

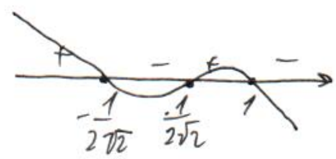
Знаки $2x$; при $x<0 \to 2x<0$; $x \geq 0 \to 2x \geq 0$, $x=0$ - корень

Знаки $8(a-1)(x-1)\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$:

I $a>1$:



II $a<1$:



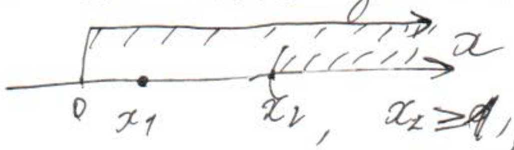
что просят: $\underbrace{\text{полуинтервал}}$ и точка

=> в какойто момент в бесконечност уходит.

при $x \to \infty$: $8x^2 \to \infty$, $\log_a x \to \infty \Rightarrow 8x^2 \cdot \log_a x \to \infty$. возрастает

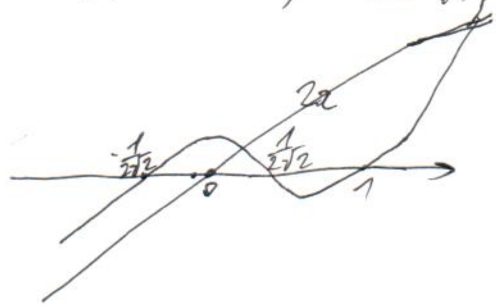
$\log_x a \to 0 \Rightarrow -\log_x a$ - возрастает

$-2x$ - убывает, но $8x^2 \log_a x$ возрастает быстрее => всё уходи в бесконечность. значит ответ выглядит:



x_2, $x_2 \geq 1$, иначе при $x_2<1$ возникнет два интервала

I



II