



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

дешифр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Хоревича Михаила Ивановича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» МАРТА 2026 года

Подпись участника
Хоревич

гениум

Черновик 80 (Восемьдесят) ~~Лист - Аппенд~~

$$abc + 2(ab + bc + ac) + 4(a + b + c) = 2026$$

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c - 2026 = 0$$

$$= 100(1+2+\dots+99) = 100 \cdot 5050 = 505000$$

$$= 100 \cdot (a+2) + 200 \cdot (b+2) + 300 \cdot (c+2) + 2026$$

$$abc + ab + bc + ac + 2a + 2b + 2c$$

$$ab(c+2) + bc(a+2) + ac(b+2) - 2abc - 2050 + 4(a+2) + 4(b+2) + 4(c+2) = 0$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) + (a+2)(b+2) + (b+2)(c+2) + (c+2)(a+2) - 2abc - 2050 + 4(a+2) + 4(b+2) + 4(c+2) = 0$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) = (ab + a + b + 1)(c+1) = abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = (ab + 2a + 2b + 4)(c+2) = abc + 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c + 8$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$$

$$\begin{array}{r} \times 113 \\ 18 \\ \hline 304 \\ 113 \\ \hline 2034 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 559 \\ 2 \\ \hline 1118 \\ 444 \\ \hline 1562 \\ 484 \\ \hline 2026 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 505100 \\ 4 \\ \hline 2020400 \end{array}$$

$$a \geq 1 \Rightarrow a+2 \geq 3$$

$$\begin{array}{r} \times 118 \\ 9 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$4 \cdot 1 \cdot 111 = 444$$

$$\begin{array}{r|l} 2034 & 2 \\ 1017 & 3 \\ 339 & 3 \\ 113 & 113 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$2034 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$$

$$6 \cdot 3 \cdot 113$$

$$\begin{array}{r} \times 99 \\ 50 \\ \hline 00 \\ 495 \\ \hline +4950 \\ 101 \\ \hline 50051 \end{array}$$

Числовик

~1

Пусть $a, b, c \in \mathbb{N}$ — длина, ширина и высота данной прямой призматической призмы. Тогда:

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 2026 \mid +8$$

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c + 8 = 2034$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$$

$$\text{Т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ то } \begin{cases} a \geq 1 \\ b \geq 1 \\ c \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2 \geq 3 \\ b+2 \geq 3 \\ c+2 \geq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

\Rightarrow Исходя из системы неравенств и из того, что $a \neq b \neq c$, выходим только одна возможная тройка значений для множителей

$$(a+2; b+2; c+2) - \text{это тройка } (3; 6; 113) \Rightarrow$$

\Rightarrow Не теряя общности $a=1, b=4, c=111$

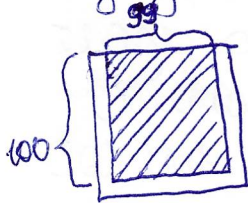
\Rightarrow Единственно возможный, а следовательно и наименьший, объем призмы равен $1 \cdot 4 \cdot 111 = 444$.

Ответ: 444.

~2

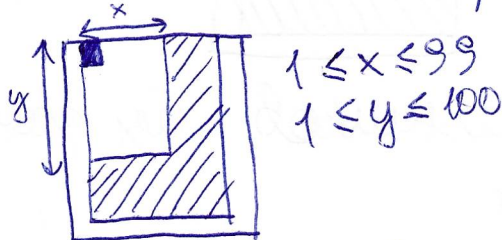
Рассмотрим несколько групп вырезов:

- 1) Вырезы, принадлежащие закрытой области и содержащие одну сторону квадрата:



Будем считать от левого угла:

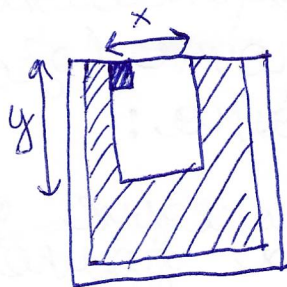
- для первой левой клетки количество прямоугольников равно $99 \cdot 100$ (99 возможных ширин и 100 возможных высот прямоугольника, начинающегося из данной клетки)



$$1 \leq x \leq 99$$

$$1 \leq y \leq 100$$

- для второй слева клетки количество равно $98 \cdot 100$



$$1 \leq x \leq 98$$

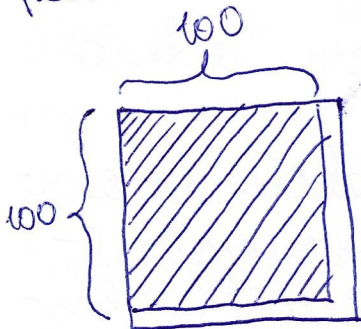
$$1 \leq y \leq 100$$

\Rightarrow общее число прямоугольников для каждой стороны квадрата из данной фигуры равно $99 \cdot 100 + 98 \cdot 100 + \dots + 2 \cdot 100 + 1 \cdot 100 = 100 \cdot \frac{100 \cdot 99}{2}$

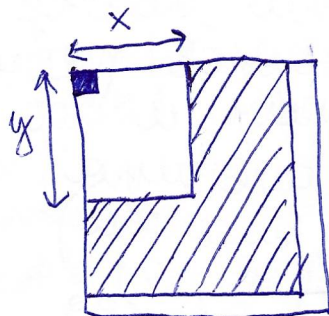
\Rightarrow Так как стороны y квадрата и клетки квадрата зафиксированы (ориентация выреза или незначительна) то общее количество прямоугольников

из данной группы равно $100 \cdot \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 4$

2) Прямоугольники, принадлежащие заштрихованной области и содержащие две смежные стороны квадрата:



- Для каждого из них на квадрате можно разместить прямоугольников $100 \cdot 100$

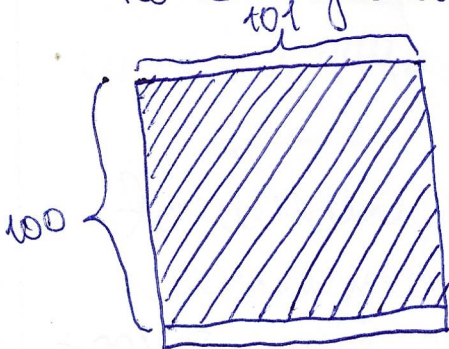


$$1 \leq x \leq 100$$

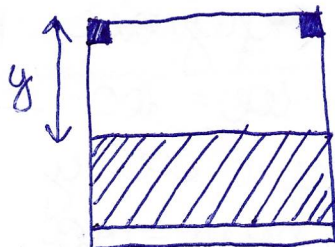
$$1 \leq y \leq 100$$

\Rightarrow всего прямоугольников из данной группы $100 \cdot 100 \cdot 4$

3) Вырезы, принадлежащие заштрихованной области и содержащие три смежные стороны (два смежных угла) квадрата:



- Для каждого из двух смежных углов квадрата можно вырезать 100



$$1 \leq y \leq 100$$

\Rightarrow всего вырезов из данной группы $100 \cdot 4$

⇒ Объединяя все три группы,
общее кол-во способов равно

$$100 \cdot \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 4 + 100 \cdot 100 \cdot 4 + 100 \cdot 4 =$$

$$= 400(50 \cdot 99 + 100 + 1) = 400 \cdot 5051 = 2\,020\,400$$

Ответ: 2020400.

Черновик

$$\frac{(a^x)^2 - 3a(a^x) + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$$\log_2 a \neq 0$$

$$a \neq 1$$

$$a > 0$$

$$t = a^x \quad x = \log_a t$$

$$t^2 - 3at + 2a^2$$

$$D = 9a^2 - 8a^2 = a^2$$

$$t_{1,2} = \frac{3a \pm a}{2}$$

$$t_1 = 2a$$

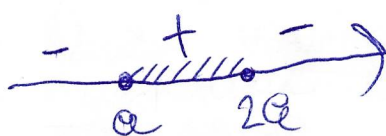
$$t_2 = a$$

$$\frac{(t-a)(t-2a)}{\log_2 a} \geq 0$$

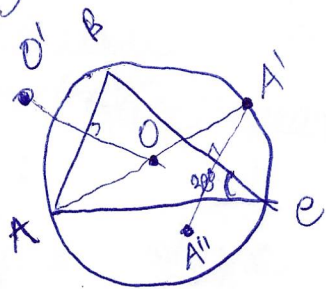
1) $\log_2 a > 0, a > 1$



2) $\log_2 a < 0, 0 < a < 1$



$a^x = a \Rightarrow x = 1$
 $a^x = 2a$
 $a^{x-1} = 2$
 $\log_a(a^{x-1}) = \log_a 2$
 $x-1 = \log_a 2$
 $x_2 = \log_a 2 + 1$
 $x_2 - x_1 = 2026$
 $\Rightarrow \log_a 2 = 2026$
 $a^{2026} = 2$
 $a = \sqrt[2026]{2}$



$$a \leq a^x \leq 2a$$

$$1 \leq a^{x-1} \leq 2$$

$$\log_a 1 \leq x-1 \leq \log_a 2$$

$$0 \leq x-1 \leq \log_a 2$$

$$1 \leq x \leq \log_a 2 + 1 \Rightarrow \log_a 2 = 2026$$

$$a = \sqrt[2026]{2}$$

Числовая

и ч

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$$\frac{(a^x)^2 - 3a(a^x) + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

Пусть $t = a^x$:

$$\frac{t^2 - 3at + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$$D = 9a^2 - 8a^2 = a^2$$

$$t_{1,2} = \frac{3a \pm a}{2}$$

$$\begin{cases} t_1 = a \\ t_2 = 2a \end{cases}$$

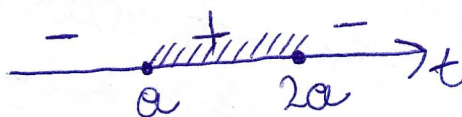
$$\frac{(t-a)(t-2a)}{\log_2 a} \geq 0$$

1) $\log_2 a > 0 \Rightarrow a > 1$:



Отрезок не образуется

2) $\log_2 a < 0 \Rightarrow 0 < a < 1$:



$\Rightarrow a \leq t \leq 2a$

$a \leq a^x \leq 2a \mid : a$

$1 \leq a^{x-1} \leq 2$

$\log_2 a \neq 0$

$$\begin{cases} a \neq 1 \\ a > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \log_a 1 \leq x-1 \leq \log_a 2$

$0 \leq x-1 \leq \log_a 2 \mid +1$

$1 \leq x \leq \log_a 2 + 1$

$\Rightarrow x \in [1; \log_a 2 + 1]$

$\Rightarrow \log_a 2 + 1 - 1 = 2026$

$\log_a 2 = 2026$

$a = \sqrt[2026]{2} > 1$, но

$0 < a < 1 \Rightarrow$ Кривые
как знак и а
не существуют
Ответ: $a \in \emptyset$.

Чертежи

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

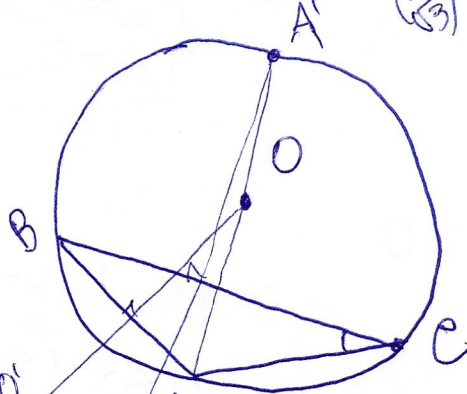
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\frac{\pi}{8}$$

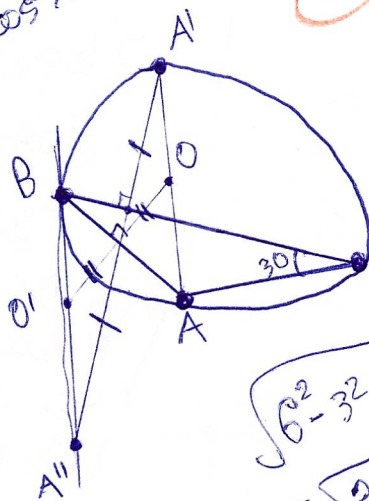
$$\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{\sin x \cos x - \sin x \cos^3 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

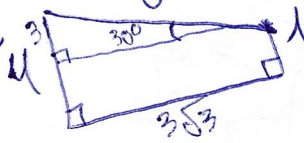


$$4 - 1.5 = 2.5$$



$$S = \pi r^2 \frac{d}{2\pi} + \dots$$

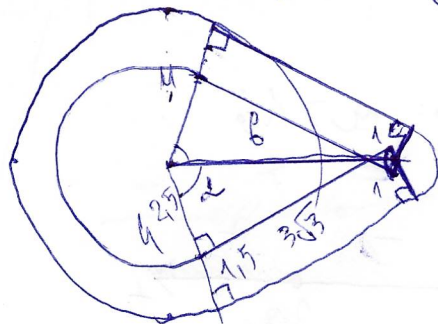
$$2.5 \cdot 2\pi \cdot \frac{d}{2\pi} + \dots$$



$$\sqrt{6^2 - 3^2} = \dots$$

$$= \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{2.5}{6} = \frac{2.5}{80} = \frac{5}{12}$$



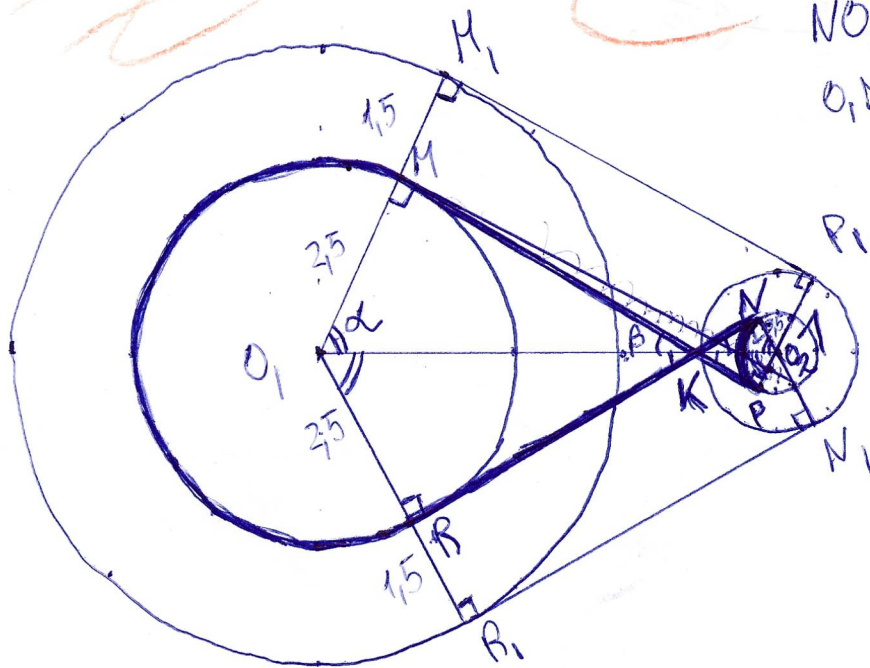
$$\frac{2\pi - 2\pi \cos \alpha}{5 \cdot 2\pi} \cdot 2\pi \cdot 2.5 = \dots$$

$$= 5\pi - \pi \arccos \frac{5}{12} + \dots$$

$$2\pi \arccos \frac{5}{12} \cdot 0.5 \arccos \frac{5}{12} + \dots$$

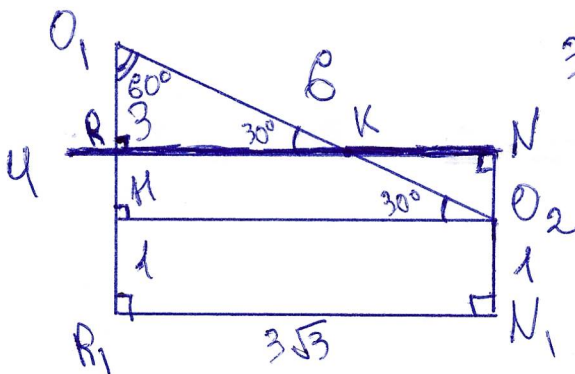
$$= 5\pi - \arccos \frac{5}{12}$$

Числовик
№7



$NO_2 = O_2P = 0,5$
 $O_1M = O_1R = 2,5$

- 1) $\beta = \angle MKO_1 = \angle BKO_1$ (касательные к окружностям из одной точки) $= \angle MKO_2 = \angle PKO_2$ (вертикальные) $\Rightarrow \angle MO_1K = \angle RO_1K = \angle NO_2K = \angle PO_2K = \alpha$. Из $\triangle O_1MK \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$
- 2) Рассмотрим трапецию:



- 3) $AN \parallel NO_2 \Rightarrow \angle O_1O_2N = \angle O_1KB$ (накрестные углы). $NO_1 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{1}{2} O_1O_2 \Rightarrow \angle O_1O_2N = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \beta = 60^\circ$

4) $NO_2 = BN = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$

- 5) \Rightarrow Большая дуга $\cup MR = \frac{360^\circ - 2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 2,5\pi = \frac{240^\circ}{360^\circ} \cdot 5\pi = \frac{2}{3} \cdot 5\pi = \frac{10\pi}{3}$
- 6) малая дуга $\cup NP = \frac{60^\circ \cdot 2}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 0,5\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi = \frac{\pi}{3}$

$$7) \Rightarrow \text{Весь периметр равен } \sigma_{MA} + \sigma_{NP} + 2 \cdot RN = \\ = \frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}.$$