0 560322 260006

56-03-22-26
(123.21)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Хрипченко Михаила Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» мая 2026 года

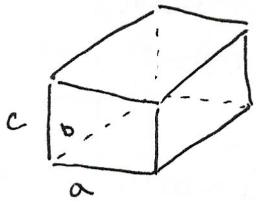
Подпись участника

 50 (пятьдесят)

56-03-22-26 (123.21)

Черновик 1   a – длина; b – шир; ~~в~~ c – высота , $a, b, c \in \mathbb{N}$

$a \neq b \neq c$ $V_{пр} = abc$ $S_{пов} = 2(ac + ba + cb)$



$L_{реб} = 4(a+b+c)$ $V_{пр} + S_{пов} + L_{реб} = 2026$

$ab\cancel{c} \to \min$

$abc + 2(ac + ba + cb) + 4(a+b+c) = 2026$

$(a+2)(b+2)(c+2) = abc + 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) + 8$

~~$2026 = (a+2)(b+2)(c+2)$~~

~~2026~~ $= (a+2)(b+2)(c+2) = (ab + 2b + 2a + 4)(c+2)$

$(abc + 2bc + 2ac + 4c + 2ab + 4b + 4a + 8)$ – да

$\Rightarrow (a+2)(b+2)(c+2) = 2026 - 8 = 2018$ 460 115

$2018 \,|\, 2$
1009

700 309 1100 1300 260 850 230 920
1160 –145 280 91 291 31 1020 ~~115~~ 1035
580 290 31 93 37 111 1012
1015 930 370 ~~93~~ 101
1023 740 101
1110

$(a+2)(b+2)(c+2) - 8 = 2026$

2034   900 117 $113 \cdot 9 \cdot 2$

$2034 \,|\, 2$
$1017 \,|\, 3$
$339 \,|\, 3$
113

99
333 + 6   900 1017
70 43   90
110 130   27
117

Получается $2034 = \cancel{113} \, 113 \cdot 3^2 \cdot 2$

Нам нужно узнать abc, поэтому не важно, чему конкретно будут равны a, b, c т.е нам не нужны перестановки чисел

Например если взять $113 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{2}6$ ~~на~~ 3

~~a = 111 b = 7 c = 0~~

$\boxed{\begin{matrix} 113 \cdot 3 \cdot 6 \text{ или} \\ 226 \cdot 3 \cdot 3 \end{matrix}}$

то понятно, что произве, ост т.к. 2 просто не может быть отдельно ибо, $a, b, c \in \mathbb{N}$

$111 \cdot \cancel{2}1 \cdot 4 = 444$

$226 \cdot 1 \cdot 1$ ~~(2261)~~

$\neq 1 \neq 1$ по услов

Чистовик (1) №1.

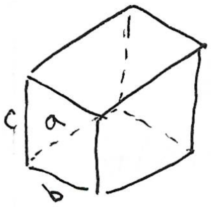
длина $- a$; b - ширина; c - высота

$a \neq b \neq c$ $a, b, c \in \mathbb{N}$

$V_{призмы} = abc$

$S_{поверх} = 2(ab+bc+ac)$

$L_{ребер} = 4(a+b+c)$



$V_{призмы} + S_{поверх} + L_{ребер} = 2026$

т.е $abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$

$(a+2)(b+2)(c+2) - 8 = 2026$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$ $2034 = 113 \cdot 3^2 \cdot 2$

Т.к. нам нужно найти abc, нам не важно чему
конкретно будет равно какое число т.е если
подходит $(1;2;3)$ то можно не проверять $(3;2;1)$
так же т.к. $a+2; b+2; c+2$ - натуральные их
можно представить в ~~а~~ виде множителей числа 2034
так же понятно, что мы не можем использовать
Например разложение $113 \cdot 9 \cdot 2$, ибо тогда одно
из ~~4~~ чисел a, b, c будет 0; а $a, b, c \in \mathbb{N}$
Остается два ~~тр~~ случая $113 \cdot 6 \cdot 3$ и
$224 \cdot 3 \cdot 3$
Но в случае $224 \cdot 3 \cdot 3$
У нас будет два одинаковых числ 1 и 1 (а у нас $a \neq b \neq c$)
$\Rightarrow$ Нам не подходит.

Тогда $(a+2)(b+2)(c+2) = 113 \cdot 6 \cdot 3$

Пусть: $a = 111$ $b = 4$ $c = 1$ (опять же каждое из чисел можно поменять местами)
Но произведение останется

$abc = 111 \cdot 4 \cdot 1 = 444 \Rightarrow V_{призмы} = 444$

Ответ: 444

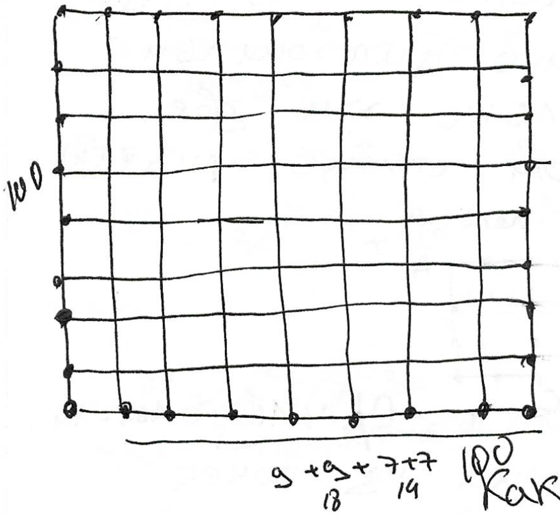
56-03-22-26
(123.21)

Черновик 2

Прямоугольники можно задавать по 2 точкам

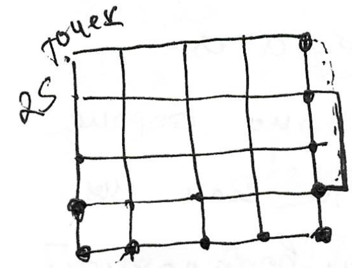
~~Если бы можно было~~

Т.к. внутри нельзя можно брать первую точку на ~~в~~ крае квадрата



102 + 102 + 100 + 100 = 404 точки

Какие тогда потом можно взять точки, чтобы ~~Sq~~ $\boxed{}$ квадрат не поделился на 2 части?



~~Нельз~~ Если они между самыми крайними нельзя брать от противоположн до (не включительно) крайней ~~слева~~ с другой стороны да нет в цело нельзя брать те что противоположные кроме крайних. Тогда рассмотрим 2 случая: 1. Когда берем крайнюю можно взять любую точку вторую (правда кроме тех, кто с этой на одной линии) 2. А если не крайняя ~~нел~~ еще нельзя брать с противоположной сторон

Всего точек 102^2

$$4\cdot(102^2-101\cdot 2)+\cancel{300}\cdot(102^2-99-4-1)$$

-1, -203

$$1:\ 4\cdot(102^2-1-101-101)$$

$$\cancel{4\cdot(1}\ 4\cdot 10201=40804$$

$102 + 102 = 204$, 102, 10404, -203, -202, -302

$$2:\ 400\cdot(\cancel{1020}\,10404-1-101-101-99$$

$$400\cdot 10102=4040800$$

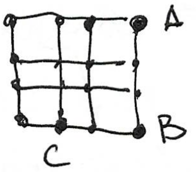
$$40800 + 40804 = 81604$$

4081604

Чистовик 2 №2.

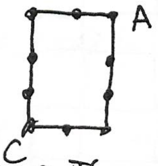
Прямоугольник в такой сетке можно задать двумя точками, а именно диагональю прямоугольника (если только эти две точки не лежат в одном столбце или ряду)

Те



по A,B задать нельзя

а ~~A~~ A,C можно



Т.к. мы не можем делать прямоугольники внутри квадрата Пусть одна из точек будет лежать на границе квадрата.

В таком случае (если точка на стороне не самая крайняя „уголок"

) то если мы возьмем ~~крайнюю~~ точку с противоположной стороны не крайнюю то ~~образ~~ квадрат разделится на две части).

Разделим на 2 случая.

1. ~~С~~ Первая точка — уголок; вторая — любая кроме (не в одном ряду, столбце)

2. Первая точка — точка на стороне (не уголок); вторая — любая кроме (тех, что в одном ряду, столбце и не с противоположной стороны на стороне)

Всего точек 102^2 на сторонах $102+102+100+100=404$

4 точки уголки 400 на стороне (не уголки)

~~в од~~ Тогда: 1: $4\cdot(102^2-1-101-101)$

-1 убираем эту же точку $-101-101$ убираем те, что в одном ряду столбце

2: $400\cdot(102^2-1-101-101-99)$

-99 потому что на противоположной стороне одну точку уже учитываем, которая в одном ряду и 2 уголка

1: $4\cdot(10404-203)=40804$

2: $400\,(10404-1-101-101-99)=400\cdot10102=4040800$

$40804+4040800=4081604$

Ответ: 4081604

56-03-22-26 (123.21)

Черновик 3

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

ОГР: $a>0$

$a \neq 1$ ибо $2^0=1$ ~~0 — то~~ ~~# делить на 0~~

При $a \geq 2$ $\log_2 a > 0$ При $a<2$ ~~а~~ $\log_2 a<0$

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2$ Можно рассмотреть как роз 2 случая

При $a \geq 2$ $a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \geq 0$

$a^{2x}+2a^2 \geq 3a^{x+1}$ ~~А~~ Тут при $x \geq 3$ уже понятно что подходит ибо $a \geq 2$

$a^6+2a^2 \geq 3 \cdot a^4$ $a^2 \geq 3$ поэто

$a^2 \cdot a^4 \geq 3a^4$ и дальше отрыв будет только расти поэтому этот случай не подходящ

$\log_3 9 - \log_3 3$

$\log_3 \frac{9}{3} = \log_3 3$

При $a \in (0;1) \cup (1;2)$

$\log_{x} 2 = 16$

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \leq 0$ т-е

$x=2^{16}$ $a^{2x}+2a^2 \leq 3a^{x+1}$ Тут уже видно, что отрезочек для x будет ограниченым

$3^2=9$

$\log_3 9 = 2$

кол-во решений

[1 2 3 .... 2026] x

Как это задать условием?

Помню, если выразить x то оз отв на a-шку можно задать условие проблема в том, что граница не совсем определенная мб

$[-1000; 1016]$ и >9.

$2 \leq a^{x-1}(3-a^{x-1})$

При чем мы знаем, что a точно $a \in (0;1) \cup (1;2)$

~~а~~ $2a^2 \leq 3a^{x+1} - a^{2x}$

$2 \leq 3a^{x-1} - a^{2x-2}$

Заменим вообще a^{x-1} ~~на~~ $= t$

$2 \leq 3a^{x-1} - (a^{x-1})^2$

$3t - t^2 \geq 2$

$t^2-3t+2 \leq 0$

$t=2$ $t=1$ $t \in [1;2]$

Теперь мы знаем, что

$a^{x-1} \in [1;2]$

Можно вроде искозать

$x-1 \in [\log_a 1; \log_a 2]$

$2^{x-1} \in [4;8]$ верно $x+1$

$x-1 \in [2;3]$

$a = \sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$

$x \in [1+\log_a 1; \log_a 2 + 1]$

Чистовик 3 №4

$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^{2}}{\log_2 a} \geq 0$ $a>0$ $a \neq 1$ ибо тогд $\log_2 1 = 0$

$\log_2 a \neq 0$

При $a>1$ $\log_2 a > 0$ при $a<1$ $\log_2 a < 0$

Рассмотрим $a>1$:

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^{2} \geq 0$ $a^{2x}+2a^2 \geq 3a^{x+1}$

Понятно, что при очень больших x разница между a^{2x} и $3a^{x+1}$ будет очень большой при $a>1$ до ∞ и решением будет [число; $+\infty$) это не может быть отрезком с длиной 2026, поэтому рассмотрим второй случай: $a \in (0;1)$:

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^{2} \leq 0$

$2a^2 \leq 3a^{x+1} - a^{2x}$ $|:a^2 \neq 0$

$2 \leq 3a^{x-1} - a^{2(x-1)}$ Пусть $a^{x-1} = t$

$t^2 - 3t + 2 \leq 0$ $t \in [1;2]$

$a^{x-1} \in [1;2]$ $x-1 \in [\log_a 1; \log_a 2]$

$x \in [1+\log_a 1; \log_a 2 + 1]$

$|\log_a 2 - \log_a 1| = 2026$ длина отрезка

$|\log_a \frac{2}{1}| = 2026$ $-\log_a 2 = 2026$

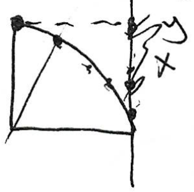
Мы знаем, что $a \in (0;1)$ и чтобы получить 2 нужно делить поэтому $\log_a 2 < 0$

$\log_a 2 = -2026$ $a^{-2026} = 2$ $\frac{1}{a^{2026}} = 2$

$a^{2026} = \frac{1}{2}$ $a = \sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$

Ответ: $a = \sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$

Черновик 4 $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$ — max



$x+y+z=\frac{\pi}{2}$ ~~вероятно~~ мб $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$

$\frac{1}{8}$ чета хз мб и нет

Не можно сде~~лать~~лать большой tg — хотя стоп но там тогда появится мелкий

Можно ли сделать $>\frac{1}{8}$ ~~8~~ не совсем очев это да

Не ну первая идея : $x=\left(\frac{\pi}{2}-y-z\right)$ и подставить

можно ли доказать например для более простого

max $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$ $x+y=\frac{\pi}{2}$ $x=\frac{\pi}{2}-y$

~~tg~~ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\operatorname{tg}y=\operatorname{ctg}y\operatorname{tg}y=1$

это очевидно хотя в целом

$\operatorname{ctg}(y+z)\operatorname{tg}x y\operatorname{tg}z$

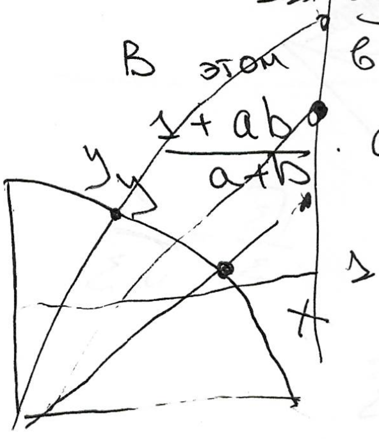
$\frac{1}{\operatorname{tg}(y+z)}\operatorname{tg}x\operatorname{tg}z$

$\operatorname{tg}(y+z)=\frac{\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z}$

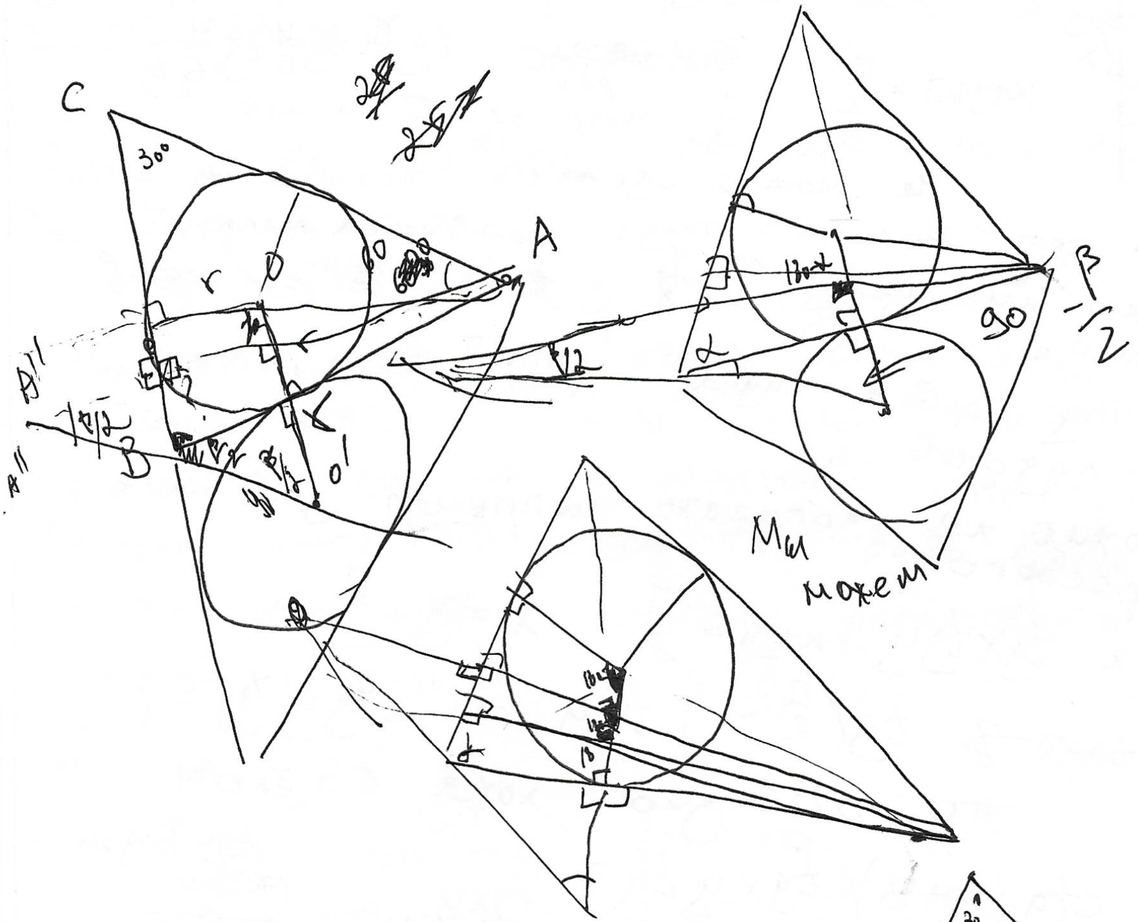
$\frac{1+\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z}{\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}\cdot\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z \rightarrow \max$

В этом в целом есть смысл как будто

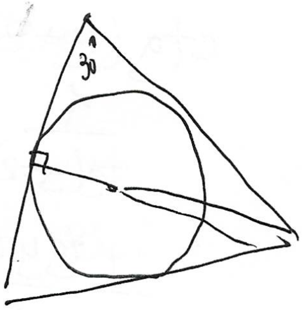
$\frac{1+ab}{a+b}\cdot ab$ ~~$1+ab$~~ $\frac{(ab)^2+ab}{a+b}$

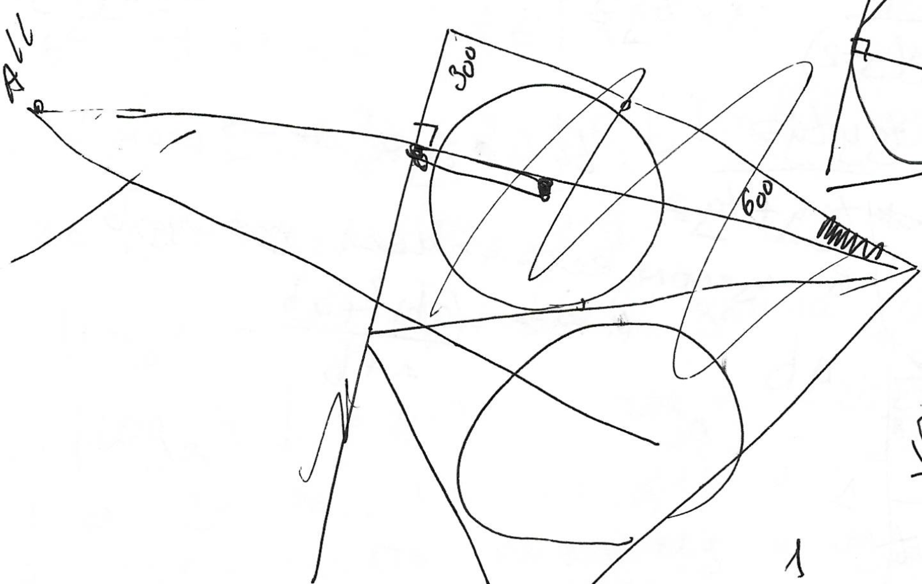


ЧЕРНОВИК 5



Мы можем





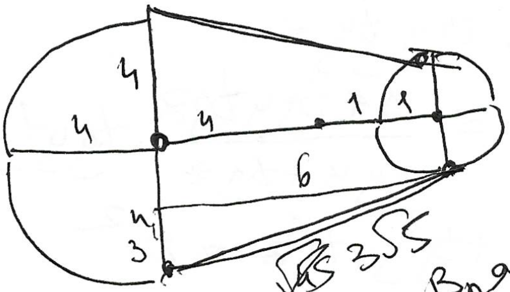
$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{3\sqrt{3}}$

$\frac{\sin^2 x}{\cancel{\sin^2} \cos^2 z}$

Черновик 6

нужно найти длину этой штуки



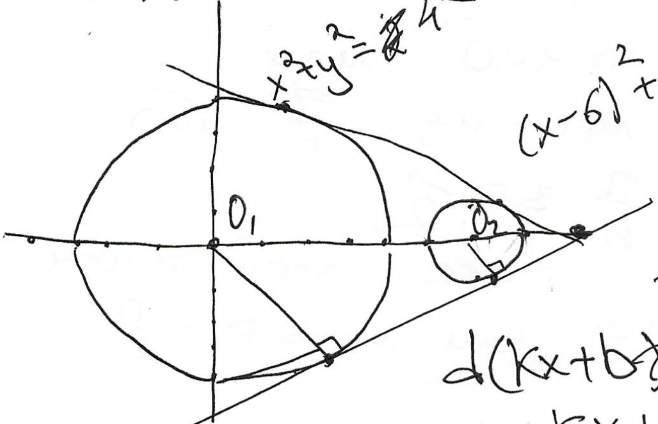
мб просто

$\cancel{8\pi}+2\pi = 10\pi$

$\sqrt{35}$ $3\sqrt{5}$

вряд ли так можно

скорее нужно найти общую касательную к двум окружностям



$(x-6)^2+y^2=1$

$y=kx+b$

$\cancel{kx+b}=x^2+y^2=4^2$

$d(kx+b, O_1)=4$ х3

$y+kx+b=0$ пусть так

$$\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$\underline{k+1+b}$

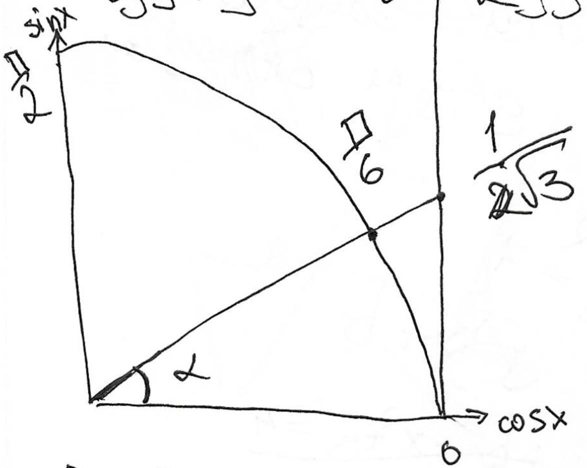
Чистовик 4 №5

$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z \to \max \quad x+y+z=\frac{\pi}{2} \quad 0<x,y,z<\frac{\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}-y-z \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y-z\right)\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$

$=\operatorname{ctg}(y+z)\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z=\frac{1\cancel{\pm}\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z}{\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}\cdot\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$

$\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}x=t \quad 2\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}^2y+\operatorname{tg}^2z=t^2$



Если какой-то угол будет $\geq\frac{\pi}{6}$, то другой хотя бы 1 точно будет меньше $\frac{\pi}{6}$ ибо $\frac{\pi}{6}\cdot 3=\frac{\pi}{2}$

В виду симметрии относ. этой точки можем сказать, что при $x=y=z=\frac{\pi}{6}$ max Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{9}$

№3

$180-180+\alpha-90+\frac{\alpha}{2}$