0 553524 280002

55-35-24-28
(128.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Цыбульникова Кирилла Антоновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

Чистовик 50(пятьдесят)

Задача №2

рассмотрим ~~все~~ прямоугольники со стороной 101
тогда вторая сторона принимает значение от 1 до 100
т.к 101×101 мы вырезать не можем. заметим
что тогда ~~все~~ прямоугольник должен прилегать
стороной длиной 101 к какой-то стороне изначального
квадрата, иначе он разрубит его пополам

, тогда посчитаем кол-во таких ~~все~~ прямоуг. прилегающих к одной стороне квадрата.

кол-во таких 1×100 ← =100 способов выбрать другую сторону (1 до 100)

↑ способов выбрать сторону (101)

тогда заметим, что при подсчете для разных
сторон нет таких случаев когда мы считали 2 раза
или более ⇒ всего таких прямоугольников $4\cdot100=400$
теперь посчитаем прямоугольники чьи стороны
от 1 до 100 / посчитаем такие которые прилегают
ровно к 1й стороне квадрата, пусть длина
такой стороны n, ~~тогда~~ а вторая — x,
заметим что кол-во расположений такого
прямоугольника $\underline{99-n+1}$ — кол-во выбрать n
подряд идущих из 99 (берем 99 т.к 2 клетки прилежат
двум сторонам квадрата), а кол-во вариантов выбрать
вторую сторону x — 100, тогда всего таких

$$100\cdot(99-1+1)+100\cdot(99-2+1)\ldots+100(99-100+1)$$
$$=100\cdot(99+98+\ldots1)=100\cdot\frac{100\cdot99}{2}$$, но таких сторон
4 у квадрата причем повторяющихся случаев
нет ⇒ всего таких $4\cdot\frac{100^2\cdot99}{2}=2\cdot100^2\cdot99$

Чистовик.

Задача 2- продолжение.

2) Теперь посчитаем кол-во прилежащих к 2 сторонам, тогда одна из клеток должна быть в уголке квадрата, т.к длина стороны от 1 до 100 от 1 до 100. посчитали кол-во таких в конкретном уг. тогда кол-во выбрать 1 сторону - 100, кол-во выбрать другую сторону - 100 и местоположение однозначное $\Rightarrow 100^2$, также, таких уголков 4 $\Rightarrow$ всего $4\cdot 100^2$ тогда, мы посчитали все случаи, всего: $400+4\cdot 100^2+2\cdot 100^2\cdot 99=400+40000+1980000$

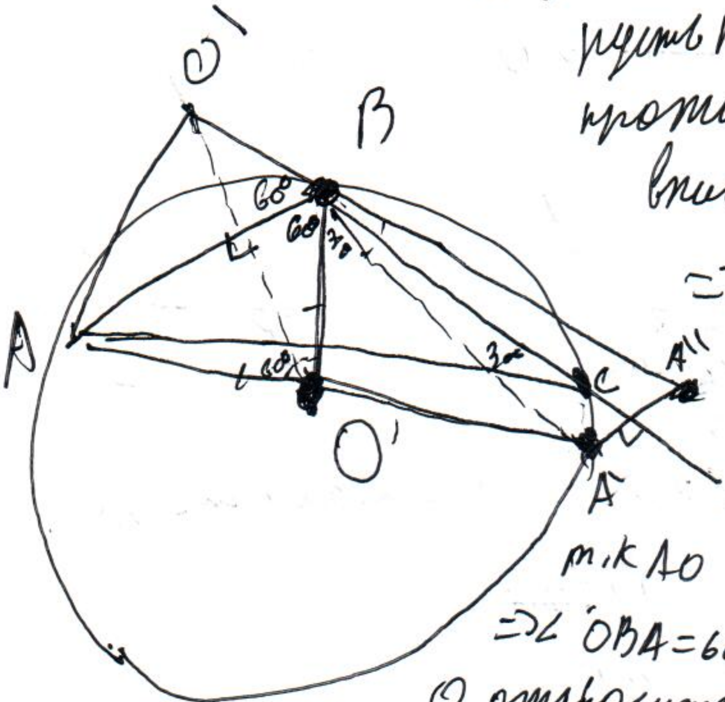
$=2020400$

Также, если прямоугольник не прилежит ни к одной стороне квадрата то он делает дырку, поэтому таких мы не учитывали

55-35-24-28
(128.3)

Черновик

№3



пусть точка диаметрально противоположная A – A'

вписанный угол $BCA = 30°$

$\Rightarrow \angle BOA$ (центральный) $= 60°$ для $\angle BCA$

$2\angle BCA = 60°$

тогда

$\triangle AOB$ – равносторонний т.к $AO = OB$ (радиусы) и $\angle AOB = 60°$

$\Rightarrow \angle OBA = 60°$, т.к O' симметрична O относительно AB по осевой симметрии $\triangle OAB = \triangle AO'B \Rightarrow AO'B$ – равносторонний

$\Rightarrow \angle O'BA = 60°$, рассмотрим $\triangle ABA'$ т.к AA' – диаметр то $\angle ABA' = 90° \Rightarrow \angle OBA' = \angle ABA' - \angle ABO = 90° - 60° = 30°$

пусть H – основание перпендикуляра из A' на $BC \Rightarrow A'H = HA''$ в силу симметрии A' и A'' отн. BC, тогда $\triangle BHA' = \triangle BHA''$

по BH – общая, $A'H = HA''$ и $\angle BHA' = \angle BHA'' = 90°$

$\Rightarrow A'B = BA''$, $\Rightarrow \triangle A'BA''$ – равнобедренный,

BH – высота на $A'A''$ в $\triangle A'BA'' \Rightarrow BH$ – бис-са

в $\triangle A'BA'' \Rightarrow \angle A'BH = \angle HBA'' \Rightarrow$

$\angle A'BH^* = \frac{1}{2}\angle A'BA''$, т.к $O'BA''$ лежат на 1 прямой

$\Rightarrow \angle O'BA + \angle OBA + \angle A'BA'' + \angle ABO = 180°$

$\Rightarrow \angle A'BA'' = 180 - \angle O'BA - \angle AOB - \angle OBA' = 180 - 60° - 60° - 30° = 30°$

$\Rightarrow \angle A'BH^* = \frac{1}{2} \cdot 30° = 15$. $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBA' + \angle A'BC = 60° + 30° + 15 = 105°$

Ответ: $105°$

Чистовик №4

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0$$

Заметим что $\log_2 a \neq 0$

$\Rightarrow a\neq 1$

и $a>0$

1) при $a>1$ $\log_2 a>0$. тогда домножим на $\log_2 a$

с учетом $a>0$; $a\neq 1$, $\underline{a>1}$

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2\geq 0$

$(a^x)^2-3a\cdot a^x+2a^2\geq 0$

Замена $a^x=t$, $t>0$

$t^2-3at+2a^2\geq 0$

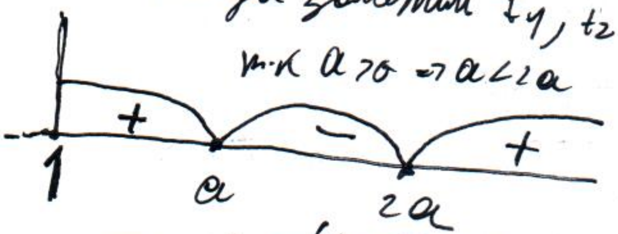
$D=9a^2-8a^2=a^2\geq 0$ верно при $a\neq 1$, $a\neq 0$

$t_1=\frac{3a-\sqrt{a^2}}{2}\ \underset{a>0}{=}\ \frac{3a-a}{2}=a$

$t_2=\frac{3a+\sqrt{a^2}}{2}\ \underset{a>0}{=}\ \frac{3a+a}{2}$ $2a$

тогда заметим $t_1, t_2>0 \Rightarrow$ $a>0$, $2a>0$ $\Rightarrow a>0$

т.к $a>0 \Rightarrow a<2a$



$t^2-3at+2a^2$ - парабола ветви вверх

$\Rightarrow t\in[1;a]\cup[2a;+\infty)$

$\Rightarrow$ обратная замена

$$\left[\begin{array}{l} 1\leq a^x\leq a \quad (1) \\ 2a\leq a^x \quad (2) \end{array}\right.$$

55-35-24-28
(128.3)

Чистовик №4 продолжение

(1) $\log_a 1 < x \le \log_a a \Rightarrow 0 < x \le 1$

(2) $\log_a 2a \le x \Rightarrow \log_a a + \log_a 2 \le x \Rightarrow 1+\log_a 2 \le x$

при любом значении подходящем под условие $a>1$ x будет принимать бесконечное кол-во значений $\Rightarrow a>1$ не подх.

2) пусть $a<1$, $a>0$ т.е $0<a<1$

тогда знаменатель $\log_2 a \le 0$

$\Rightarrow a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \le 0$

аналогично 1 пункту

$t = a^x$, $t>0$

$t^2 - 3at + 2a^2 \le 0$

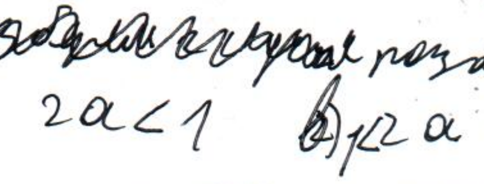
$D = 9a^2 - 8a^2 = a^2 \ge 0$

$t_1 = \frac{3a - \sqrt{a^2}}{2} \overset{a>0}{=} \frac{2a}{2} = a$

$t_2 = \frac{3a + \sqrt{a^2}}{2} \overset{a>0}{=} \frac{4a}{2} = 2a$

$t_1, t_2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ 2a>0 \end{cases} \Rightarrow a>0$

т.к $a>0 \Rightarrow a<2a$



$t^2-3at+2a^2$ - парабола ветви вверх

рассмотрим 2 случая

а) $2a<1$ б) $1<2a<2$

~~Б ч продолжение~~ Чистовик

а) $2a<1$ ~~так~~ $a<1$

$\Rightarrow t\in[a;2a]$

~~т.к. a<1~~

$a \geq a^x \leq 2a < 1$

~~т.к.~~ т.к. $a<1$

$\log_a a \geq x \geq \log_a 2a$

$1 \geq x \geq \log_a 2a$

$\Rightarrow |\log_a 2a - 1| = 2026$

$\log_a 2 + \log_a a - 1 = 2026$

$\log_a 2 = 2026$

$\Rightarrow a^{2026} = 2$

$\Rightarrow |a| = \sqrt[2026]{2}$

т.к. $a>0$ $\boxed{a = \sqrt[2026]{2}}$

в) $1<2a<2$

$\Rightarrow a<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow t\in[a;1)$

$a \geq a^x < 1$

т.к. $a<1$

$\log_a a \geq x \geq \log_a 1$

$1 \geq x \geq 0$

~~$\Rightarrow$ ...~~

$|1-0| = 2026$

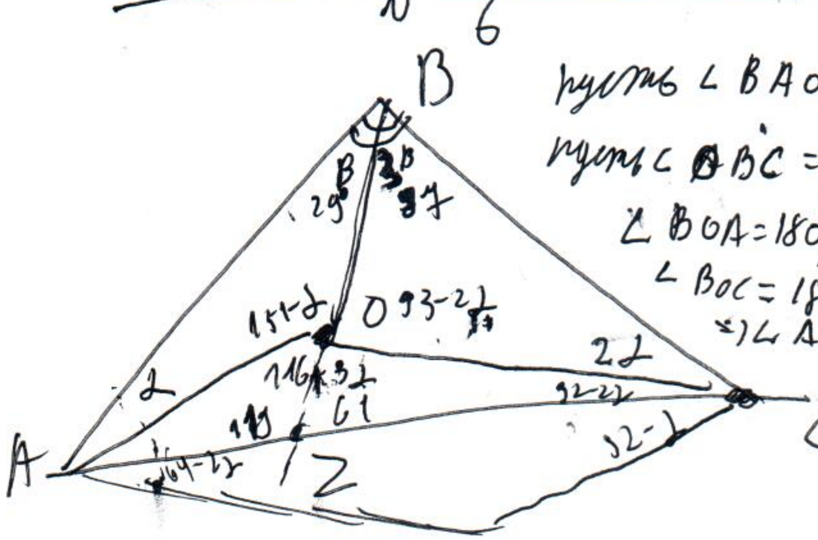
неверно

~~$\Rightarrow$ при $a = \sqrt[2026]{2}$ ...~~ $\sqrt[2026]{\ldots} = 1$ ~~условие верно~~

$\Rightarrow$ неподходит

~~$\Rightarrow$ ...~~ Итог: только при $a = \sqrt[2026]{2}$

№ 6



пусть $\angle BAO = 2\alpha \Rightarrow \angle BCO = 2\alpha$

пусть $\angle OBC = 3\beta$, $\angle ABO = \beta$

$\angle BOA = 180 - \angle ABO \overset{\text{из } \triangle AOB}{-} \angle OAB = 180° - \alpha - \beta$

$\angle BOC = 180 \overset{\text{из } \triangle BOC}{-} \angle OBC - \angle BCO = 180 - 2\alpha - 3\beta$

$\Rightarrow \angle AOC = 360 - \angle AOB - \angle BOC =$

$= 360° - (180 - \alpha - \beta) - (180 - 2\alpha - 3\beta)$

$= 3\alpha + 4\beta$

черновик

С другой стороны $\angle$ АОС $=$ $180 - \angle OAC - \angle OCA$ (из $\triangle AOC$), $\angle OAC = \angle BAC - BAO = 32 - \alpha$

аналогично $\angle OCA = 32 - 2\alpha$

$\Rightarrow \angle AOC = 180 - 64 + 3\alpha = 116 + 3\alpha$

$\Rightarrow 116 + 3\alpha = 3\alpha + 4\beta$

$\beta = \frac{116}{4} = 29$

$\Rightarrow \angle ABO = 29$

тогда $\angle BOA = 180 - \alpha - \beta = 180 - \alpha - 29 = 151 - \alpha$

Продлим ВО до пересечения с АС в т. Z

$\angle AOZ$ - внешний для $\triangle AOB$

$\Rightarrow \angle AOZ = \alpha + 29$, аналогично $\angle ZOC = 87 + 2\alpha$

$\angle OCZ = \angle BCA - \angle BCO = 32 - 2\alpha$

из $\triangle OZC$

$\Rightarrow \angle OZC = 180 - \angle ZOC - \angle OCZ = 180 - (87 + 2\alpha - 32 + 2\alpha) =$

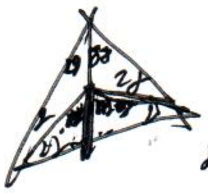
$= 61$

$\angle AZ$ $\cancel{\angle OZC = \angle AZO + \angle OAZ = 32 - \alpha}$ $+ 29 - \alpha =$

При этом $2\alpha < 32 \Rightarrow \alpha < 16$

$\frac{\angle BOA}{\angle BAO} = \frac{151 - \alpha}{\alpha} = \frac{151}{\alpha} - 1$

Черновик



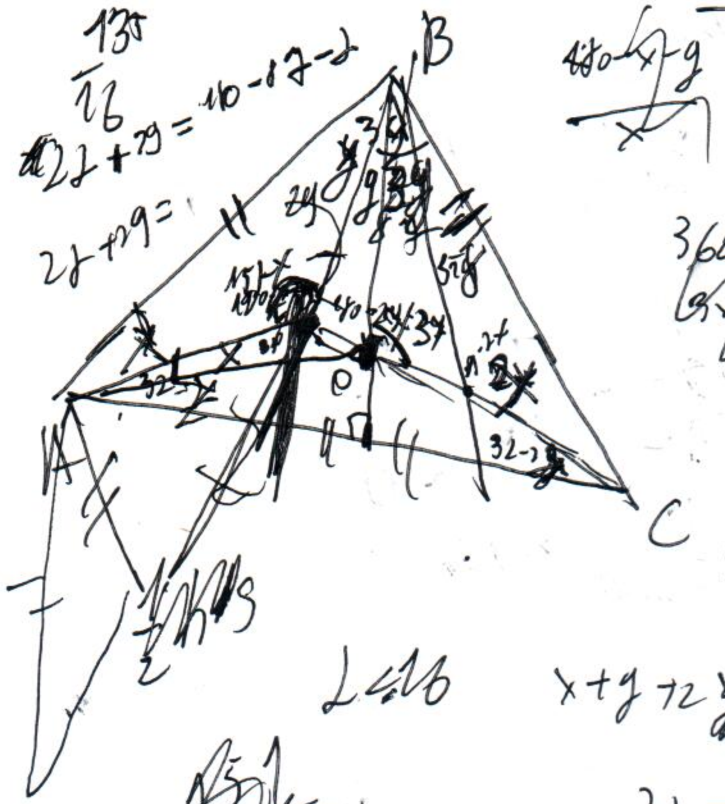
$180-2y-2+x_1$

$\frac{151-2}{2} = \frac{151}{2} - 1$

$\frac{135}{16}$

$2z+2y = 180-17-2$

$2z+2y =$



$151-2z = 13.5$

$360-$

$(3x+3y)2 = 180-64+3x$

$3y = 116$

$\frac{135}{16}$

$32-2x+90$ 302

151

$\angle < 16$

$x+y+2y+3y$

$3x+4y$

$\angle < 32$

$\leq \frac{tg^2 x + tg^2 y + c^2}{3}$

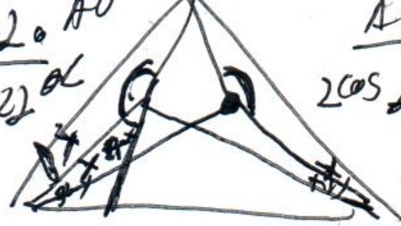
$\frac{135}{1}$ $2z < 32$

$\angle < 16$

$\frac{151-y}{93-2x} =$

$117-2x$

$\frac{\sin 2y}{\sin 8y} = \frac{\sin 2z \cdot AO}{\sin 2z}$



$\frac{AO}{2\cos \angle OC}$ $= \frac{\sin 151}{\sin 8y}$

$93-2x+$

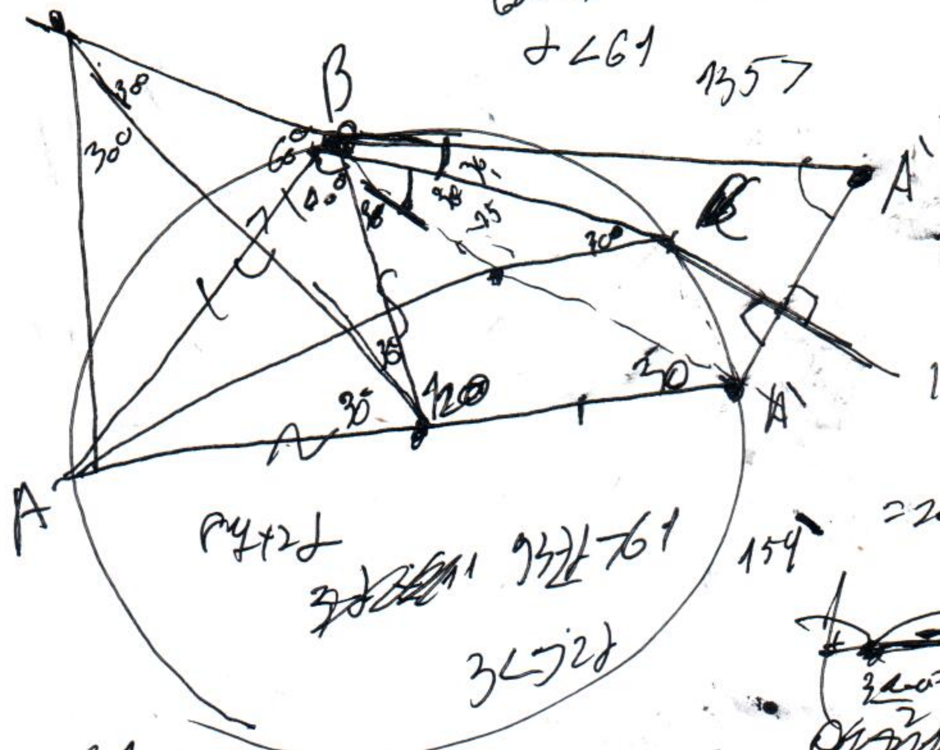
$\frac{AO}{OC} = \frac{\sin 2z \cos z}{\sin 8y}$

$abc + 2ab + 2bc + 2cz + 4a + 4b + 4c = 2020$

Черновик

$\left(\frac{1}{a}\right)^{2x} - 3\left(\frac{1}{a}\right)^{x+1}$

$\log_2 a > 0$ при $a > 1$



$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq 0$

$a^x = \frac{3a - a^2}{2} > 0$

$(a^x)^2 - 3a \cdot a^x + 2a^2 \geq 0$

$a^x = t$

$t^2 - 3at + 2a^2 \geq 0$

$D = 9a^2 - 4 \cdot 2a^2 = a^2 \geq 0$

$t_1 = \frac{3a - a^2}{2} > 0$ $\quad a(3 - a) > 0$

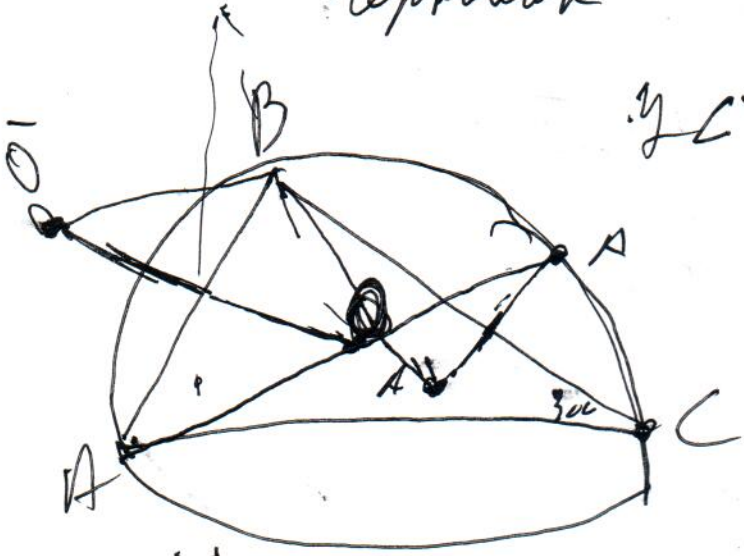
$t_2 = \frac{3a + a^2}{2} > 0$

$116 + 3d < 180$

$3d < 64$

$d < 21\frac{1}{3}$

Черновик

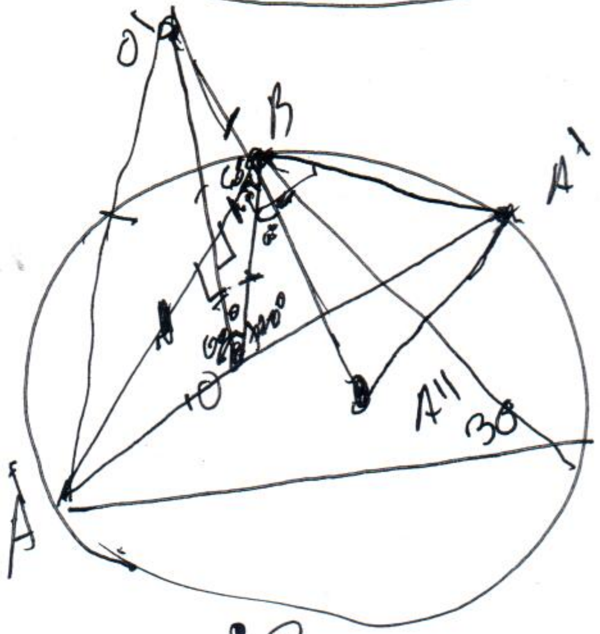


$x<1$

$y < x^{n} < 10$

3 задачи

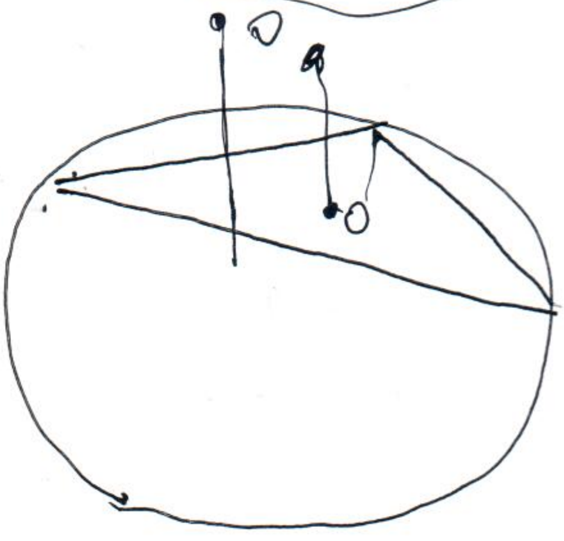
$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} > 4$

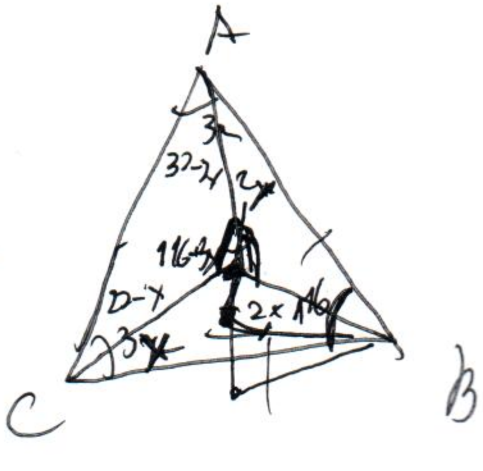


$x < \log_{\frac{1}{2}} 4$

$x < -2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$





116+3>

180-64

$32-2x+32-x=64-3x$

Черновик

$n-2$ $5-4+1$

$a \cdot b \cdot c = V$

2

$1-$

$a \cdot b \cdot c + 2a \cdot b + 2 \cdot b c + 2 c d + 4a + 4b + 4c = 2026$

$n \to 99-n+1$

1000100 4 1 $99-n \to 99$

$97 \to$

909

$a\ (101-n) = n+1$ $n-1$

$(n+1)a$ $(101-n) \Rightarrow n+1$

$\times 4$

101

$4(n+1)-4$

$4n$

106×100 100×100

101 $101-n$

$a = 101 \cdot 100$

$a\ 101-n\ (101-n) \cdot x$

101

$101-n$ 100

n

1000100

$10n$

$100 \cdot 4 = 400$

$(n+1) \cdot 100$

$1+1 \cdot 1000$

$2+1 \ldots$

$\frac{100 \cdot 101 \cdot 102}{2} \cdot 2$

$100 \cdot 101 \cdot 102$

$\frac{100(100+1)}{2} = 50 \cdot 101 \cdot 102$

Черновик. №8

$2x+2y+2z=180°$

$\cup \angle 2x, 2y, 2z;\ \pi \Rightarrow 2x, 2y, 2z$ — углы Δ

$tg\,x = \frac{\cos y}{\sin y}$ $\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos^2}{2}}$ $\quad \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$tg\,x = \sqrt{\frac{1-\cos^2 2x}{1+\cos^2 2y}}$

$2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1$

$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

$z = 90 - x - y$ $\quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$tg\,x \cdot tg\,y\ tg\,90 - (x+y)$ $\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

$tg\,x \cdot tg\,y\ ctg(x+y)$ $\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2\sqrt{\frac{1+\cos^2\alpha}{2}}}$ $\quad \frac{\sin\alpha}{4+}$

$\frac{\sin x \cdot \sin y \cos x+y}{\cos x \cos y \cdot \sin(x+y)} =$ $\quad \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$

$=$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\cos^2\alpha + 1}{2} = \frac{1-\cos^2\alpha}{2}$

$\frac{\sin x \sin y (\cos x \cos y - \sin x \sin y)}{\cos x \cos y (\sin x \cos x \sin y + \cos y \sin x)} = \frac{\sin x \sin y \cdot \cos x \cos y - \sin^2 x \sin^2 y}{\cos^2 x \cos y \sin y + \cos y^2 \cos y \sin y}$

$\frac{4 \sin x \sin y \cos x \cos y - 4\sin^2 x \sin^2 y}{2\cos^2 x \cdot \sin 2y + 2\cos^2 y \cdot \sin 2x}$ ($\sin 2x \sin 2y$) $= \frac{\sin 2x \sin 2y - 4\sin^2 x \sin y}{2\cos^2 x \cdot \sin 2 + \cos y \sin 2x}$