0 151451 850000

15-14-51-85
(123.8)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Чекапенко Игоря Вадимовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

Чистовик

№2

Чтобы внутри не было дырки надо чтобы хотя бы одна сторона прямоугол. совпадала с наружней стороной квадрата.

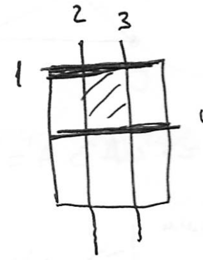
- Рассмотрим когда 1 сторона совпадает:

$$4\cdot C_{100}^{2}\cdot C_{100}^{1} = \frac{4\cdot 100\cdot 99\cdot 100}{2} = 1980000$$

выбрать совпадающую сторону (1)

выбрать 2 из 3

выбрать 4



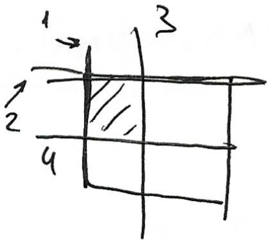
- Рассмотрим когда 2 стороны совпадает:

$$4\cdot C_{100}^{1}\cdot C_{100}^{1} = 4\cdot 100\cdot 100 = 40000$$

выбрать 2 совп стороны

выбрать 3

выбрать 4

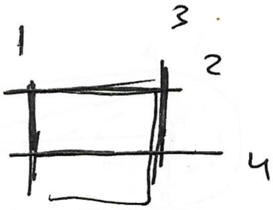


- 3 стороны совпадает:

$$4\cdot C_{100}^{1} = 4\cdot 100 = 400$$

выбрать 3 совп стороны

выбрать 4

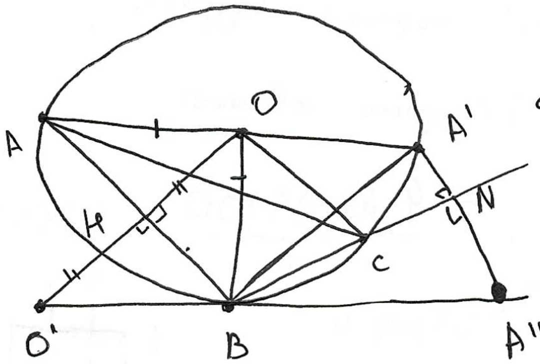


Всего способов $198000 + 40000 + 400 = \cancel{238400}$ 2020400

Ответ: 2020400

N 3

Окр $(O;R)$



1 $\angle AOB = 2\angle ACB = 60^\circ$
центральный

2 ~~OH=HO'~~
симм - $OO' \perp AB$
$AO=OB=R$ $\Big| \Rightarrow OH$-бисс
в р/б $\triangle AOB$
$\Downarrow$
$\angle AOH = \angle OHB = 30^\circ$

3 $OO' \perp AB$ - сим
$OH = HO'$ - симм $\Big| \Rightarrow \triangle OO'B$ - р/б
$\Downarrow$
HB-бисс $\angle O'BO = 120^\circ$
$\Downarrow$
$\angle O'BH = \angle HBO = 60^\circ$

4. AA' - диам $\Rightarrow \angle ABA' = 90^\circ \Rightarrow \angle OBA' = 90^\circ - \angle ABO = 30^\circ$

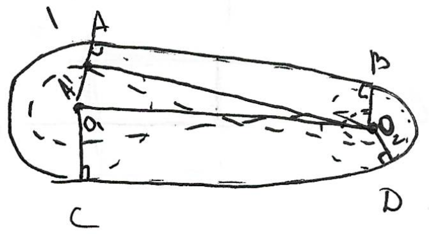
5. $A'A'' \perp BC$ - симм
$A'N = NA''$ - симм $\Big| \Rightarrow \triangle A'BA''$ - р/б $\Rightarrow \angle A'BN = \angle NBA'' = \dfrac{180^\circ - \angle OBH - \angle ABA'}{2}$ $= \dfrac{180^\circ - 60^\circ - 90^\circ}{2} = 15^\circ$
BN - бисс

6. $\angle B = \angle ABO + \angle OBA' + \angle A'BN = 60^\circ + 30^\circ + 15^\circ = 105^\circ$

Ответ: 105°

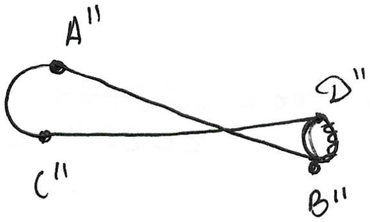
N7

Начертим ~~линию~~ травы - - - -трава



$CD = AB = A'O_2 = \sqrt{6^2 - (4-1)^2} =$
$= 3\sqrt{3}$

$\angle AO_1O_2 = 60^\circ$
$\angle BO_2O_1 = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$
$\Downarrow$
$\smile AC = 240^\circ$
$\smile BD = 120^\circ$



$\smile A''C'' = 240^\circ$
$\smile B''D'' = 360 - \smile BD = 240^\circ$

$A''B'' = C''D'' = AB = 3\sqrt{3}$

$L_{\smile A''C''} = 2\pi R_1' \cdot \dfrac{240^\circ}{360^\circ} = 2\pi \cdot (4-1,5) \cdot \dfrac{2}{3} = 2\pi \cdot 2,5 \cdot \dfrac{2}{3}$

$L_{\smile B''D''} = 2\pi R_2' \dfrac{240^\circ}{360^\circ} = 2\pi \cdot (1,5-1) \cdot \dfrac{2}{3} = 2\pi \cdot 0,5 \cdot \dfrac{2}{3}$

$L = 2 \cdot 3\sqrt{3} + 2\pi \cdot 2,5 \cdot \dfrac{2}{3} + 2\pi \cdot 0,5 \cdot \dfrac{2}{3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} + 4\pi = 2 \cdot (3\sqrt{3} + 2\pi)$

Ответ: $2 \cdot (3\sqrt{3} + 2\pi)$

15-14-51-85 (123.8)

№4

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geqslant 0 \qquad \frac{(a^x)^2-3a\cdot a^x+2a^2}{\log_2 a}\geqslant 0$$

$$\frac{(a^x-2a)(a^x-a)}{\log_2 a}\geqslant 0$$

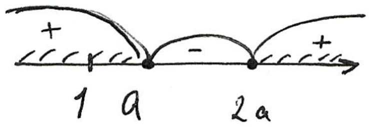
Рассмотрим $\log_2 a$, $a>0$

При $a>1$ $\quad \log_2 a>0$

При $a=1$ $\quad \log_2 a=0$ в нашем случае не подходит

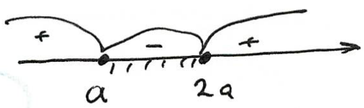
при $0<a<1$ $\quad \log_2 a<0$

1. $a>1$



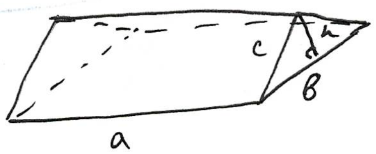
$$\left[\begin{array}{l} a^x\geqslant 2a \\ a^x \leq a\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x\geqslant \log_a 2+1 \\ x\leq 1\end{array}\right.$$

2. $0<a<1$



$$\begin{cases} a^x\leq 2a \\ a^x\geqslant a\end{cases} \quad \begin{cases} x\leq \log_a 2+1 \\ x\geqslant 1\end{cases}$$

№1



$c=\sqrt{b\cdot h}$ $\quad a-$

$$V=\frac{abh}{2}$$

$$S=ab+2a\sqrt{bh}+bh$$

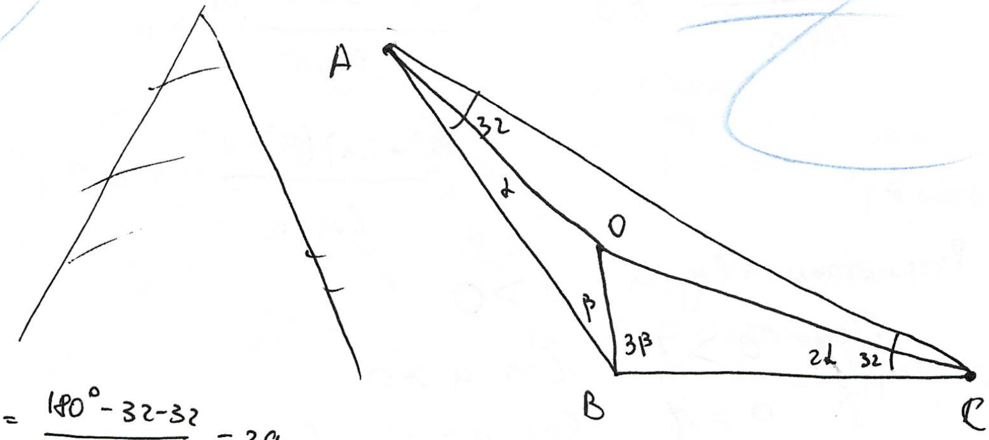
$$L=3a+2b+4\sqrt{bh}$$

$$\frac{abh}{2}+ab+2a\sqrt{bh}+bh+3a+2b+4\sqrt{bh}=2026$$

№5

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=\frac{(\cos(x-y)-\cos(x+y))\cdot\sin z}{(\cos(x-y)+\cos(x+y))\cos z}=\frac{\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z-1}{\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z}$$

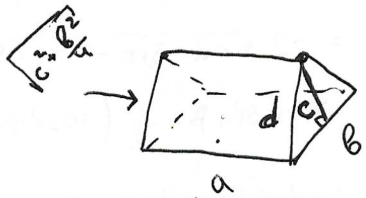
№6



$$\beta = \frac{180^\circ - 32 - 32}{4} = 29$$

$$\frac{151 - \alpha}{\alpha} = ?$$

Черновик



$V = \frac{abc}{2}$

$\cancel{8}\ S = a\cdot b + bc + 2a\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}}$

$D = 3a + 2b + 4\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}}$

$\frac{abc}{2} + ab + bc + 2a\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}} + 3a + 2b + 4\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}} = 2026$

$d^2 = bc$

$d = \sqrt{bc}$

$\left(b + 2\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}}\right)(a+2) + \frac{bc}{2}(a+2) + 3a+6 = 2026+6$

$\left(\frac{bc}{2} + b + 2\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}} + 3\right)(a+2) = 2032$

$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot127$

$a=2$

$\frac{254}{2} = 127$

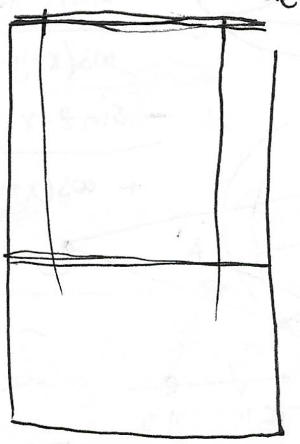
$\frac{bc}{2} + b + 2\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}} + 3 = 508$

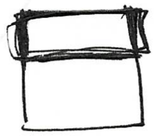
$\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}} = k \in N$

$2\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}} = 505 - \frac{bc}{2} - b$

$4c^2 + \cancel{b^2} = 505^2 + \frac{b^2c^2}{4} + \cancel{b^2} - 1010b - 505bc + b^2c$

$\frac{abc}{2} + \frac{abc}{c} + \frac{abc}{a} + \frac{2abc}{\sqrt{bc}} + \frac{3abc}{bc} + \frac{2abc}{ac} + \frac{4abc}{a\sqrt{bc}} = 2026$





$4\cdot C_{102}^{2}\cdot C_{100}^{1} = 4\cdot\frac{102\cdot101}{2}\cdot100 =$

$= 2\cdot102\cdot101\cdot100 = \underline{2060400}$

$\times\begin{array}{r}102\\101\\\hline 102\\102\ \ \\\hline\end{array}$

$\times\begin{array}{r}10302\\2\\\hline 2060400\end{array}$

$a = 125$

$\frac{bc}{2} + b + 2\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}} = 32$

$4c^2 + \cancel{b^2} = 32^2 + \frac{b^2c^2}{4} + \cancel{b^2} - 32bc - 64b + b^2c$ $\quad 4bc = 32^2 + \frac{bc^2}{4} + b^2 - 32bc - 64b + b^2c$

$\frac{abc}{2} + ab + bc + 2a\sqrt{bc} + 3a + 2b + 4\sqrt{bc} = 2026$

$b+2a$

$\cancel{(a+2)(}$

$(a+2)\left(\frac{bc}{2} + b + 2\sqrt{bc} + 3\right) = 2032$

Черновик.

$\cos\alpha-\beta - \cos\alpha+\beta =$

$= -2\sin\alpha \cdot \sin -\beta = 2\sin\alpha\sin\beta$

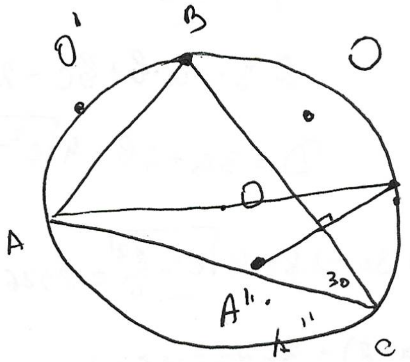
$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\alpha-\beta - \cos\alpha+\beta\right)$

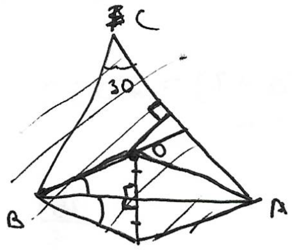
$\cos\alpha-\beta + \cos\alpha+\beta = 2\cos\alpha\cos\beta$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos\alpha-\beta+\cos\alpha+\beta}{2}$

$\sin\alpha-\beta + \sin\alpha+\beta = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin\alpha-\beta+\sin\alpha+\beta}{2}$



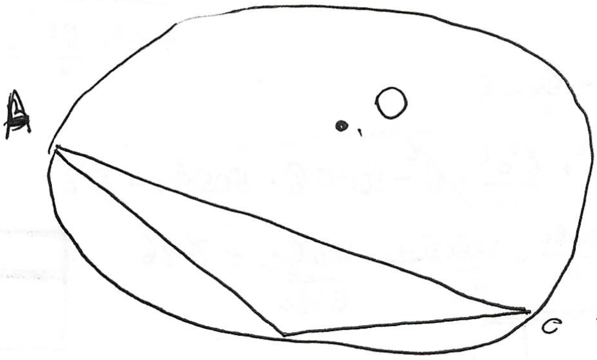


$tg^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2}$

$tg = \sqrt{\frac{1}{\cos^2} - 1}$

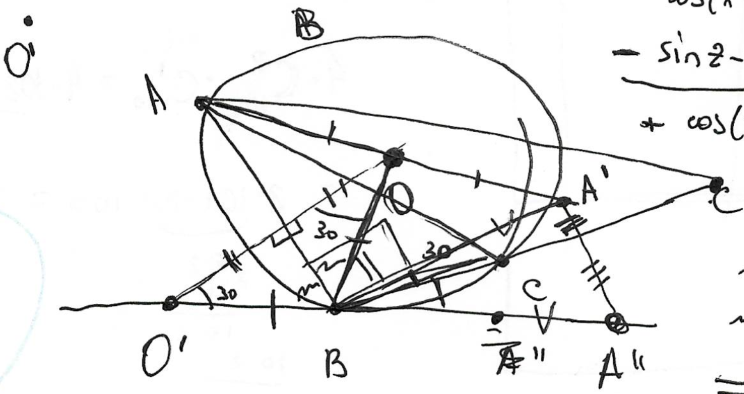
$\frac{\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z}{\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z} =$

$= \frac{(\cos(x-y) - \cos(x+y))\cdot\sin z}{(\cos(x-y)+\cos(x+y))\cos z} =$



$= \frac{\sin(z-x+y)+\sin(z+x-y)}{\cos(x-y-z)+\cos(x-y+z)+}$

$\frac{-\sin z-x-y-\sin z+x+y}{+\cos(x+y-z)+\cos(x+y+z)} =$



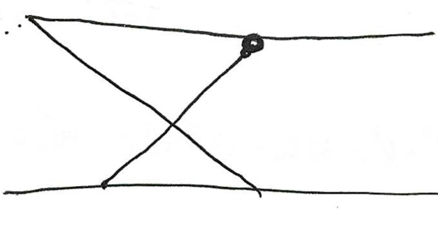
$\frown = 15$

$\sim - 60$

$= = 30$

$60+60+30=150$

$\angle B = 105^\circ$



$= \frac{\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z - 1}{\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z} = \frac{2-\sin^2 x - \sin^2 y - \sin^2 z}{\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z} =$

Черновик

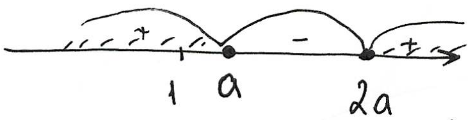
$$\frac{(a^x)^2 - 3a\cdot a^x + 2a^2}{\log_2 a} \qquad a>0$$

$$a^x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2-8a^2}}{2} = \frac{3a\pm a}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} a^x = 2a \\ a^x = a \end{array}\right.$$

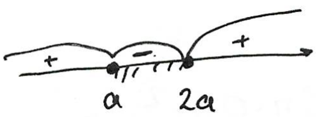
$$\frac{(a^x-2a)(a^x-a)}{\log_2 a} \geq 0$$

1) $a > 1$



$$\left[\begin{array}{l} a^x \geq 2a \\ a^x \leq a \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} x\log_a a \geq \log_a 2 + \log_a a \\ x \leq 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x \geq \log_a 2 + 1 \\ x \leq 1 \end{array}$$

2) $0<a<1$



нет

$$\begin{cases} a \leq a^x \\ 2a \geq a^x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \log_a 2 + 1 \end{cases}$$

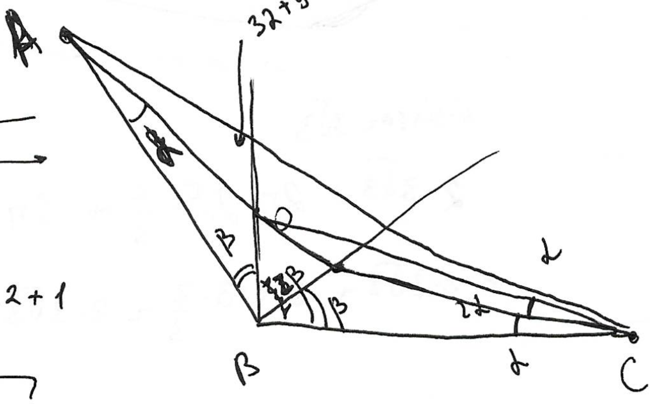
$$\frac{\cos 2x + \cos 2y - \cos(2x+2y) - 1}{\sin 2x + \sin 2y + \sin(2x+2y)} =$$

$$= \frac{\cos 2x + \cos 2y - \cos 2x\cos 2y + \sin 2x \sin 2y - 1}{\sin 2x(1+\cos 2y) + \sin 2y(1+\cos 2x)} =$$

$$= \frac{\cos 2x(1-\cos 2y) - (1-\cos 2y) + \sin 2x \sin 2y}{\sin 2x\cos^2 y + \sin 2y\cdot\cos^2 x} =$$

$$= \cos 2x$$

$32+97=129$

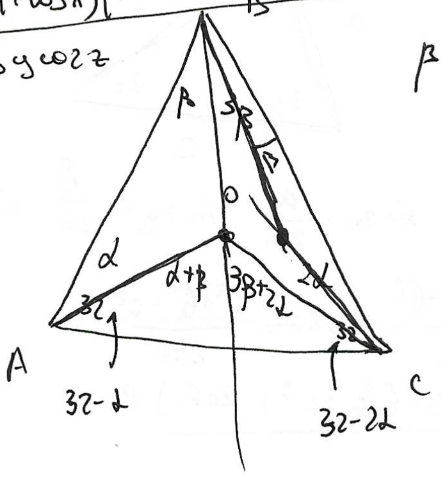


$$\frac{151-\alpha}{\alpha} = ? \quad \frac{151}{\alpha} - 1 = ?$$

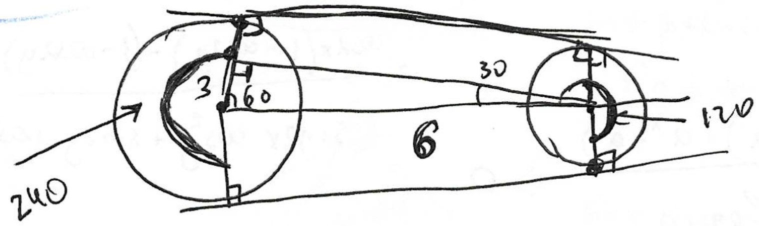
$$\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 y}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 z}-1\right)} =$$

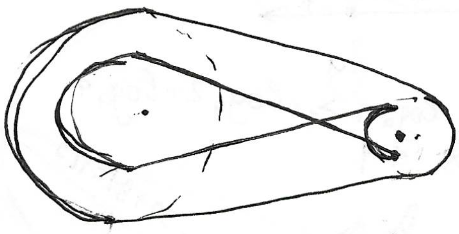
$$= \sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(1-\cos y)(1+\cos y)(1-\cos z)(1+\cos z)}{\cos x\cos y\cos z}}$$

$$\beta = \frac{180-64}{4} = 45-16 = 29$$



$a^2(b+c) + b^2(a+c)$

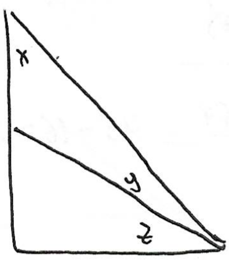


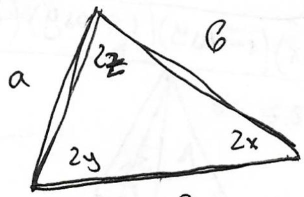


$6 \cdot \sin 60 = 3\sqrt{3}$

$$2 \cdot 3\sqrt{3} + 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot \frac{2}{3} + 2\pi \cdot 0{,}5 \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= 2 \cdot 3\sqrt{3} + 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} + 4\pi = 2(3\sqrt{3} + 2\pi)$$





$\sin 2x = \frac{a}{2R}$ $\sin 2y = \frac{b}{2R}$ $\sin 2z = \frac{c}{2R}$

$\cos 2x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos 2y = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\cos 2z = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$$\frac{(ab^2 + ac^2 - a^3 + a^2b + c^2b - b^3 + a^2c + b^2c - c^3 + 2abc)R}{(a+b+c)abc}$$