0 799746 820002

79-97-46-82
(122.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________ дешифр

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Чернобровкина Андрея Михайловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

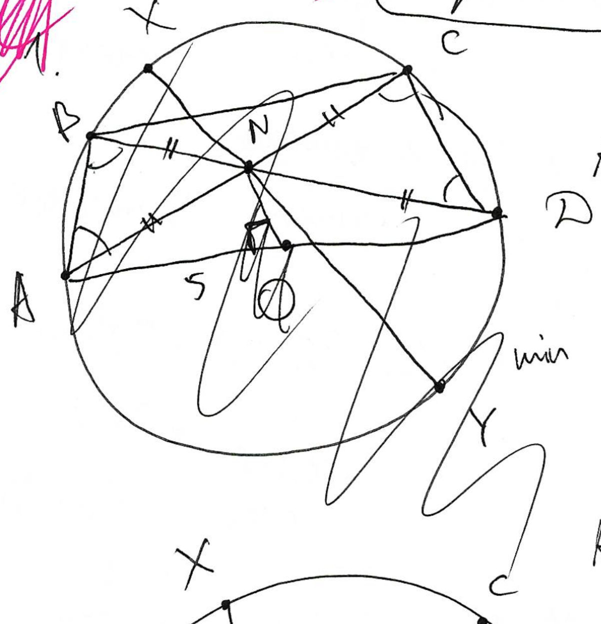
АЧер

85 (Косинус делать нет?) Нет

79-97-46-82 (122.1)

Черновик

1.



$AC = BD$

$AN \cdot NC = AN^2 = 5^2 + ON^2$

$XN \cdot NY = AN \cdot NC = AN^2$

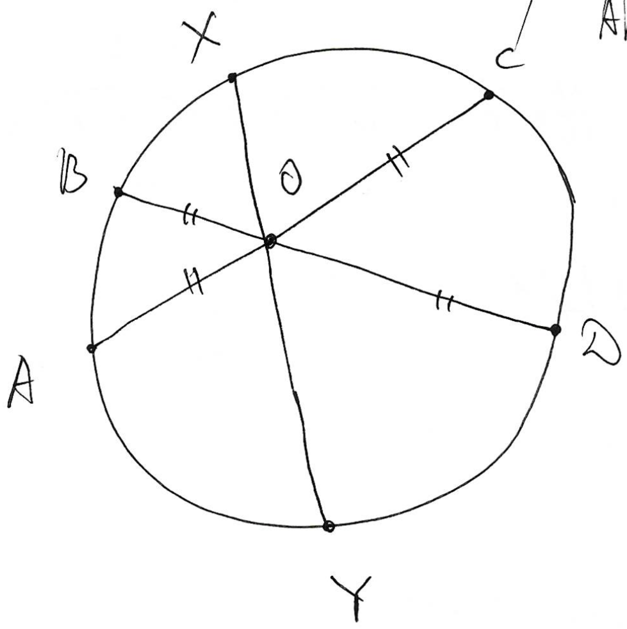
$XN + NY$ -?

$XN = NY = AN$

$AN^2 = 25 + ON^2$

$AN \downarrow \quad ON \downarrow$

$N = O$



$ABCD$ - прямоугольник

O - центр

~~XO1~~ XY - диаметр

$XY = 10$

2. $n = \overline{abcd}$ $\quad n^2 = \overline{abcd\,xy}$ X

1000

$n = 1000a + 100b + 10c + d$ $\qquad 2000^2 = 4000000$

~~$n^2 = 10^5 a + 10^4 b + 10^3 c + 10^2 d + 10x + y$~~

$a = 1$

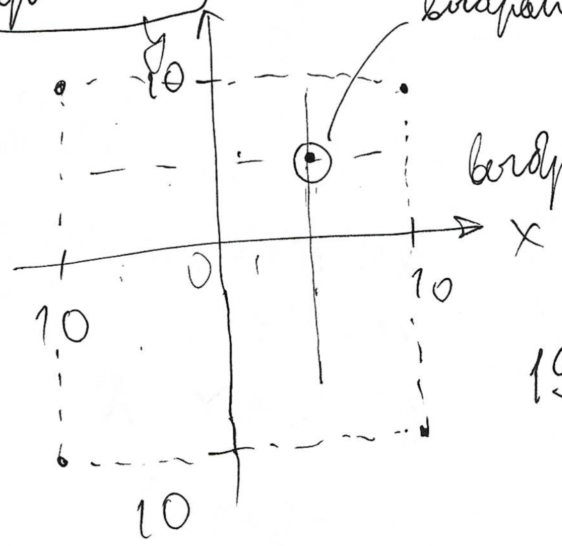
$n^2 = 10^3 n + X$ - трёхзначное

$n^2 = (1000a + 100b + 10c + d)^2 = 10^6 a^2 + 2 \cdot 10^5 ab + \ldots$

$n^2 = 10^3 n + X \qquad n(n - 10^3) = X$

$n = 10^3$

3. черновик



выбрать первый катет: 19 способов

выбрать второй катет: 19 способов

$19 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 20 = 20^2(20-1)^2 =$

кол-во точек

$= 20^4 - 2 \cdot 20^3 + 20^2 =$

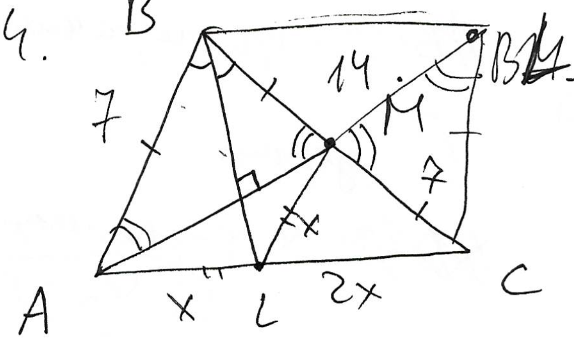
$= 160000 - 16000 +$

$+ 400 =$

$= 16 \cdot 10^3 (10-1) + 400 = 16 \cdot 9 \cdot 10^3 + 400 = 144400$

$160 - 16 = 144$

4.



$BH \perp AM$

$x^2 = 2x^2 + 49 - 2 \cdot 2x \cdot 7 \cdot \cos\gamma$

$x^2 = 2x^2 + 49 - 28x\cos\gamma$

$x^2 + 49 - 28x\cos\gamma = 0$

$x_1 + x_2 = 28\cos\gamma$

$x_1 x_2 = 49$

$\frac{D}{4} = 14^2 \cos^2\gamma - 49 = 49(4\cos^2\gamma - 1)$

$x \in \mathbb{Z},\ x > 0$

$x_{1,2} = 14\cos\gamma \pm 7\sqrt{4\cos^2\gamma - 1} =$

$28\cos\gamma \in \mathbb{Z}$

$= 7\left(2\cos\gamma \pm \sqrt{4\cos^2\gamma - 1}\right)$

$\geq 2 \quad \in \mathbb{Z} \quad \sqrt{3}$

$\cos\gamma = 1$

$\cos\gamma = \frac{1}{2}$

$\cos\gamma = \frac{1}{4} \quad \cos\gamma = \frac{1}{14}$

$\cos\gamma = \frac{1}{7} \quad \cos\gamma = \frac{1}{28}$

Черновик

5. 30с 50с → 50с 50с →

50м 30м 120м 10м

V м/с $V \geq \frac{50м}{30с}$ $\frac{80м}{10с} \geq V$

$V \geq \frac{120м}{50с}$

$V < \frac{50м}{50с}$ $V > \frac{30м}{50с}$ $V > \frac{10м}{50с}$

200м за $\frac{200}{V}$ с.

$\frac{200}{V} > 10 + 50(k-1)$ $\frac{200}{-40+100k} > V$

$\frac{200}{V} < 10 + 50(k-1)$ $\frac{200}{10+100k} < V$

max V - ? $\frac{3}{5} \leq V \leq 1$

$\frac{10}{15k-2} \geq V \geq \frac{20}{10k+1}$

V = 1

$200с = 10 + 50 + 50 + 50 + 40$

$\frac{1}{V} \times V \times V$

6. $\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\le 0$ черновик 1) $a=0$ $\varnothing$ не опр.

~~2) $a\ne 0$~~

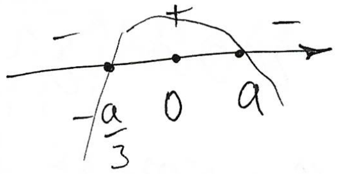
$$\frac{a^2+2ax-3x^2}{a^3}\le 0$$

2) $a>0$

$-3x^2+2ax+a^2\le 0$

$x=a$ - корень $-3a^2+2a^2+a^2=0$

$x=-\frac{a}{3}$ - корень $-\frac{a^2}{3}-\frac{2a^2}{3}+a^2=0$

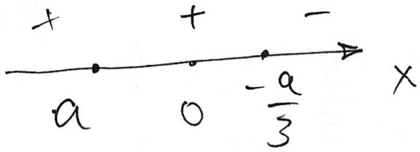


$x\in\left(-\infty;-\frac{a}{3}\right]\cup$

$\cup[a;+\infty)$ - два луча

3) $a<0$

$-3x^2+2ax+a^2\ge 0$



$x\in\left[a;-\frac{a}{3}\right]$

длина = 2026

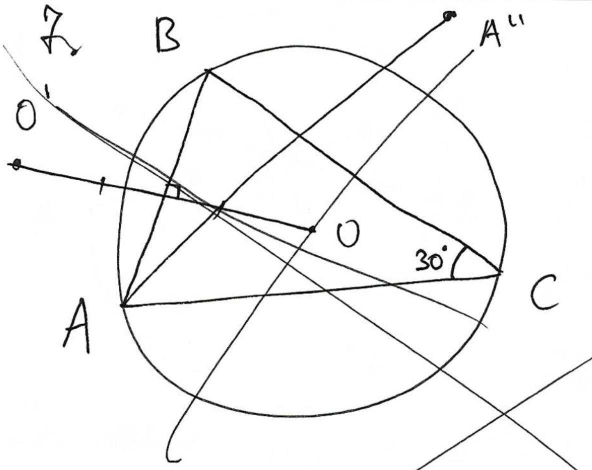
$-\frac{a}{3}-a=2026$

$-\frac{4a}{3}=2026$ $\frac{a}{3}=-\frac{2026}{4}=-\frac{1013}{2}$

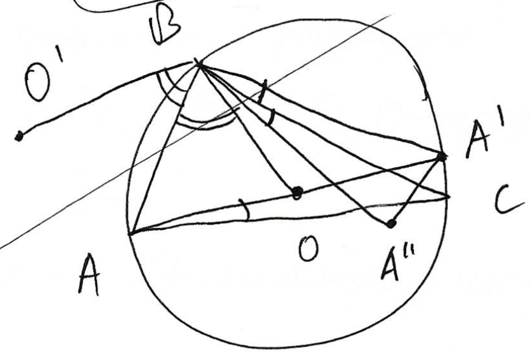
$a=-\frac{3039}{2}$

79-97-46-82
(122.1)

7



черновик



(2) $90^\circ - 2\angle A + \cancel{4\,90}\ 60^\circ = 180^\circ$

т.к. $\angle = 30^\circ$

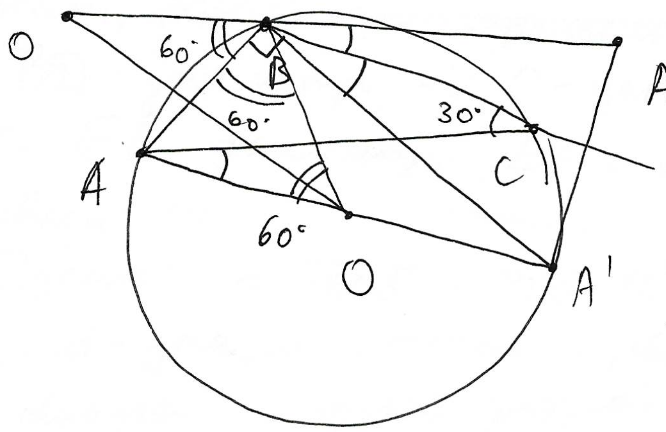
$\angle ABA' = 90^\circ$

$\angle O'BA'' = 90^\circ - 2\angle A'BC$

$\angle O'BA$ O

$+ \angle O'BA$ O

$-2\angle A = 30^\circ$



$\angle A''BO =$

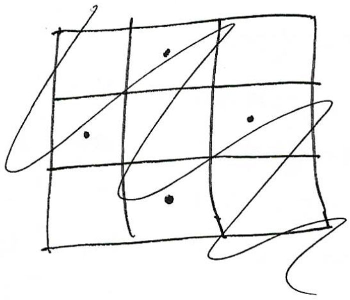
$= 90^\circ + 2\angle A + 60^\circ = 180^\circ$

$2\angle A = 30^\circ$

$\angle A = 15^\circ$

$\angle B = 180^\circ - 30^\circ - 15^\circ =$

$= 135^\circ$



$20^2 \cdot 21^2 = \cancel{4\cdot 4}\ 400 \cdot 400 +$

$+ 40 + 1 = 400 \cdot 4\cancel{6}41 =$

$= 441 \cdot 4 \cdot 100 =$

$= \begin{array}{r} \times\, 441 \\ 4 \\ \hline 1764 \end{array} = 176400$

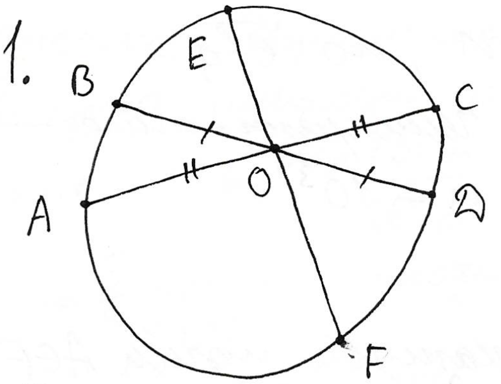
$V = \dfrac{5}{3}$

за 200м за $\dfrac{200}{V} = 120c$

$120c = 10c + 50c + 50c + 10c$

X V X V

1.



Дано: AC, BD, EF – хорды окружности с радиусом 5, $AC \cap BD \cap EF = O$, O – середина AC и BD

Найти: наименьшую длину EF

Решение: 1) т.к. $AO = OC$ и $BO = OD$, то $ABCD$ – пар-мм (по признаку) $\Rightarrow \angle BAD = \angle BCD$ (по св-ву)

2) $\angle BAD + \angle BCD = 180°$ (по св-ву вписанного четырёхугольника $ABCD$)

3) $\angle BAD + \angle BCD = 180°$, $\angle BAD = \angle BCD \Rightarrow \angle BAD = 90°$, значит, ~~ABCD – прямоугольник (по признаку) =>~~ $\Rightarrow$ BD – диаметр $\Rightarrow$ O – центр окружности, т.е. EF – диаметр, $EF = 2 \cdot 5 = 10$

Ответ: 10.

2. Пусть $n = \overline{abcd} = 10^3 a + 10^2 b + 10c + d$, где $a > 0$, a, b, c, d – цифры, тогда первая цифра числа n^2 совпадает с первой цифрой числа a^2 и, по условию, совпадает с a. Рассмотрим все возможные значения a:

$a = 1$ $a^2 = 1$ – подходит

$a = 2$ $a^2 = 4$ – не подходит

$a = 3$ $a^2 = 9$ – не подходит

$a = 4$ $a^2 = 16$ – не подходит

$a = 5$ $a^2 = 25$ – не подходит

$a = 6$ $a^2 = 36$ – не подходит

$a = 7$ $a^2 = 49$ – не подходит

$a = 8$ $a^2 = 64$ – не подходит

$a = 9$ $a^2 = 81$ – не подходит

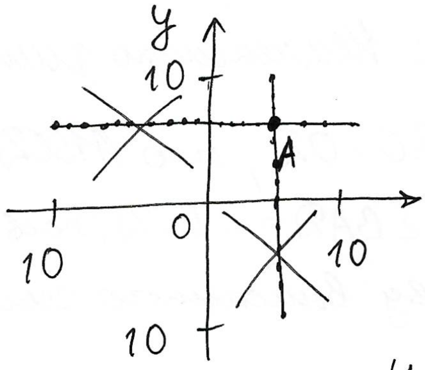
Чистовик 1

Итак, $a = 1$, $n \geq 10^3$, $n < 2 \cdot 10^3 \Rightarrow n^2 < 4 \cdot 10^6$, т.е. n^2 – семизначное число, $n^2 = \overline{abcdefg} = \overline{abcd} \cdot 10^3 + \overline{efg} = n \cdot 10^3 + \overline{efg}$ $\quad \overline{efg} = n(n - 10^3)$

если $n \neq 10^3$, то $\overline{efg} \geq n$, но $\overline{efg}$ — трёхзначное число, а n — четырёхзначное — противоречие, значит, $n = 10^3$

Ответ: 1000.

3.

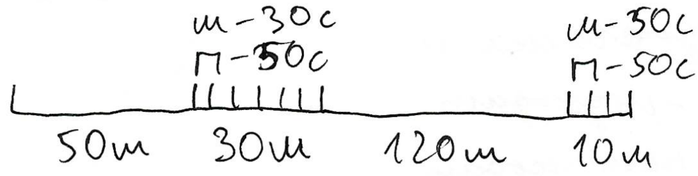


Для каждой точки AEF есть ~~20~~ 9 способов выбрать вершину горизонтального катета (параллельного Ox) и ~~20~~ 9 способов выбрать вершину вертикального катета, а таких точек A всего $\cancel{21\cdot 21}\ 10\cdot 10 = \cancel{21^2}\ 10^2$. Итак, каждой из $\cancel{21^2}\ 10^2$ точек F сопоставим $\cancel{20^2}\ 9^2$ треугольников, для которых она будет вершиной прямого угла, поэтому всего будет $\cancel{20^2\cdot 21^2}\ 9^2\cdot 10^2 = \cancel{176400}\ 8100$ треугольников

Ответ: ~~176400~~. 8100.

Черновик 2

5.



Пусть скорость Агриппины V ~~км/ч~~ м/с, тогда проехать 50 м она должна не менее, чем за 30 с, т.е. $V \leq \frac{50м}{30с} = \frac{5}{3}$ м/с. Если $V = \frac{5}{3}$ м/с, то первый переход она проедет за $\frac{30м}{\frac{5}{3}м/с} = 18с < 50с$, а доедет до второго перехода за $\frac{200м}{\frac{5}{3}м/с} = 120с = \underset{П}{10с} + \underset{М}{50с} + \underset{П}{50с} + \underset{М}{10с}$

к тому моменту будет гореть красный свет, значит, Ашинина должна ~~на~~ доехать до второго перехода не менее, чем за $120+40=160$ с, т.е. $V \le \frac{200\text{м}}{160\text{с}} = \frac{5}{4}$ м/с $< \frac{5}{3}$ м/с

$V = \frac{5}{4}$ м/с $= 1{,}25$ — подходит (первый переход она проедет за 24 с ~~за 8~~, а подъедет к нему за 40 с)

Ответ: 1,25 м/с.

Черновик 3

6. $\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \le 0$

Если $a=0$, выр-е не определено

1) $a>0$

$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} = \frac{-3x^2+2ax+a^2}{a^3} \le 0$

т.к. $a>0$, то $a^3>0$

$-3x^2+2ax+a^2 \le 0$

Заметим, что $x=a$ и $x=-\frac{a}{3}$ — корни $-3x^2+2ax+a^2=0$ (т.к. $-3a^2+2a^2+a^2=0$ и $-3\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)^2+2a\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)+a^2 = -\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + \frac{3a^2}{3} = 0$),

значит, $-3x^2+2ax+a^2 = -3(x-a)\left(x+\frac{a}{3}\right) \le 0$

$(x-a)\left(x+\frac{a}{3}\right) \ge 0 \qquad a>0>-\frac{a}{3}$

$+ \quad - \quad +$

$-\frac{a}{3} \quad a \quad x$

$x \in \left(-\infty; -\frac{a}{3}\right] \cup [a; +\infty)$

объединение двух лучей

2) $a<0$

$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} = \frac{-3x^2+2ax+a^2}{a^3} \le 0$

т.к. $a<0$, то $a^3<0$

$-3x^2+2ax+a^2 \ge 0 \qquad a<0<-\frac{a}{3}$

$-3x^2+2ax+a^2 = -3(x-a)\left(x+\frac{a}{3}\right) \ge 0$

$(x-a)\left(x+\frac{a}{3}\right) \le 0$

$+ \quad - \quad +$

$a \quad -\frac{a}{3} \quad x$

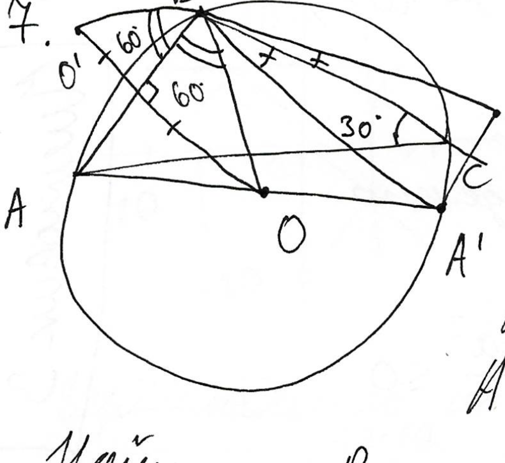
$x \in [a; -\frac{a}{3}]$ – отрезок длины 2026

$2026 = -\frac{a}{3} - a = -\frac{4a}{3}$ $\quad a = -\frac{3\cdot 2026}{4} = -\frac{3039}{2} = -1519{,}5$

Чистовик 4

Ответ: $-1519{,}5$.

7.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 30°$, O – центр (ABC), O' – симметрична O относительно AB, A' – диаметрально противоположная точке A, A'' – симметрична A' относительно BC, $\angle OBA'' = 180°$

Найти: $\angle B$

Решение: 1) т.к. $\angle BOA$ – центральный, $\angle AOB = 2\cdot\angle BCA = 2\cdot 30° = 60°$ (по теор. о впис. угле), т.к. $OA = OB$ – радиусы, то $\triangle OAB$ – р/б (по опр.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle OBA = \angle OAB = \frac{180° - \angle BOA}{2} = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$ (по св-ву р/б $\triangle$)

2) $180° = \angle O'BA'' = \angle O'BA + \angle ABA'' = \angle ABO + \angle ABA' +$
$+ 2\angle A'BA'' = 60° + 90° + 2\angle CBA' = 90° + 60° + 2\angle A'AC =$

(в силу симметрии) (как впис. углы, опирающ. на одну дугу)

$= 150° + 2\angle OAC$

$\angle OAC = 30°$, $OA = OC$ – радиусы $\Rightarrow \angle OCA =$
$= \angle OAC = 30°$, $\angle AOC = 120° = 360° - 2\angle ABC$
(по теор. о впис. угле)

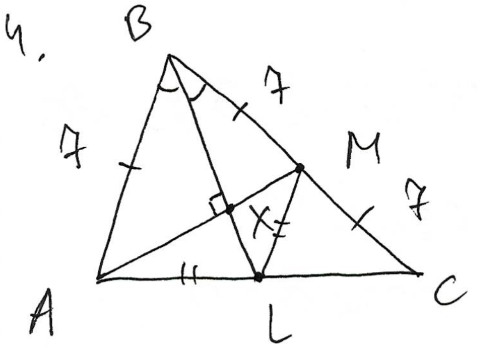
$\angle ABC = 120°$

($\angle ABA' = 90°$, как угол, опирающийся на диаметр)

Ответ: $120°$.

($\triangle ABC$ – тупоугольный, иначе A'' лежит CA'' и O в одной полуплоскости относительно BC, т.е. O', B и A'' не могут лежать на одной прямой)

4.



Дано: $\triangle ABC$, AM – медиана, BL – биссектриса, $AM \perp BL$, $AB=7$.

Найти: $P(\triangle ABC)$

Решение: 1) пусть $BL \cap AM = X$, тогда BX – биссектриса и медиана в $\triangle ABM$, значит, $\triangle ABM$ – р/б (по признаку), т.е. $AB=BM=MC$, $\underline{BC=2\cdot 7} = \underline{14}$.

$\boxed{\text{Чистовик 5}}$

2) по св-ву бисс. BL в $\triangle ABC$

$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, пусть $AL = a$, тогда $LC = 2a$
$a>0$

3) $AL = LM$ (т.к. BL – серединный перпендикуляр к AM), $\angle BAL = \angle BML$ (из симметрии),

$\angle ALM = 360° - \angle ABM - 2\angle BAL$ (по сумме углов $ABML$)

$\frac{LM}{ALC} = \frac{1}{2}$

$\angle ALM = 360° - 2\angle A - \angle B = (180° - \angle A - \angle B) + 180° - \angle A = \angle C - \angle A + 180°$, $\angle CLM = \angle A - \angle C$

4) $\angle LMC = 180° - \angle LMB = 180° - \angle A$

по теор. косинусов в $\triangle CLM$

$a^2 = 4a^2 + 49 - 2\cdot 2a\cdot 7\cdot \cos\angle C$

$3a^2 - 28a\cos\angle C + 49 = 0$

~~$\frac{D}{4} = \frac{14^2}{\cos^2\angle C} - 3\cdot 49 = 49(2^2 - 3) = 49$~~

~~$a = 14$~~

~~$\frac{D}{4} = 14^2\cos^2\angle C - 3\cdot 49 = 49(4\cos^2\angle C - 3)$~~

 дешифр

$\cancel{a_{1,2} = 14\cos\angle C \pm 7\sqrt{4\cos^2\angle C - 3}}$

$\frac{D}{4} = 14^2\cos^2\angle C - 3\cdot 49 \geq 0$

по теор. Виета

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \frac{28\cos\angle C}{3} \\ a_1 a_2 = \frac{49}{3} \end{cases}$$

$\cos\angle C \vdots 3$

$\cos\angle C = 0$

$\angle C = 90^\circ$

$a_1 + a_2 \in \mathbb{Z}$ т.к. $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Чистовик 6}}$

~~найдём a из теор. Пифагора в $\triangle LCM$~~