0 380289 290003

38-02-89-29
(124.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 5

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Черченко Ярослава Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

 100 (сто)

38-02-89-29 (124.4)

Черновик

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$ | ^2 $abc-(a+b+c)+(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2$

$(a+1)(b+1)(c+1)$

$6(1-tg^2x)=16\sin^2x$

$6-6tg^2x=16\sin^2x$

$tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$r=\frac{a+b+c}{4R}$

$tg\frac{\pi}{2}=9$

$tg\frac{\pi}{2}=0$

$1+1=2$

$6-6\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=16(1-\cos^2x)$

$6(1-tg^2x)=16(1-\cos^2x)$ |:2

$3(1-tg^2x)=8(1-\cos^2x)$

$1-tg^2=\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\cos^2$

$3x=8y$ $2=\frac{8}{3}:?$

$x=\frac{8}{3}y$

$(1-tg^2x)=\frac{8}{3}(1-\cos^2x)$

$\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

$\frac{358}{384}$

$(1-x^2)$

$\begin{array}{r} 297 \\ \times\ 210 \\ \hline 2970 \\ 594 \\ \hline 62370 \end{array}$

594 ↑ гем cos

400 + 184

112/4

90 и 18 80 и 32 $4\sin x$ 111/3

20 и 18

90 и 21

$1980 / 2$ 28/9

30 7

$\sin^2x=(1-\cos^2x)$

37/9

101/2 не делится

102/3 = 90 и 12 ⇒ 30 4

34 не делится на 9

103/4 — не делится

104/5 — не делится 4 ОТТ

105/6 — не дел $\sin^2+\cos^2=1$

106/7 — 70 и 36 — не дел

107/8 — 80 и 27 — не дел

108/9 — 90 и 18 12/9 — не дел

109/10 — не дел

110/2 = 55 — не дел

384/9 — не дел.

$\begin{array}{r} 5184 \\ \times\ 27 \\ \hline 36288 \\ 10368 \\ \hline 139968 \end{array}$

$\begin{array}{r} 243 \\ +603 \\ +909 \\ \hline 1655 \end{array}$

Теорема Чевы: три чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются, тогда и только тогда, когда произведения отношений, на которые они делят стороны равно единице

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

111 — не дел

112 — не дел

113/5 — не дел

114 — 60 и 54

115/7 — 70 и 45 — не дел

116/8 — 80 и 36

117/9 90 и 27 — 13 — не дел

$\begin{array}{r} 14 \\ \times 19 \\ \hline \end{array}$

19 — не дел

207/9 — 180 и 27 — 23

252/9 — 180 и 72 — 28

243/9 — 180 и 63 — 27

306/9 — 270 и 36? — 34

324/9 — 270 и 54

118/10 — не дел

119/11 — не дел

120/3 — 40 — не дел

121/4 3810

122/5 — не дел

123/6

124/7

125/8

405/9 — 360 и 45 — 45

504/9

450 и 54 — 56

126/9 → 90 и 36

135/9 → 90 и 45 — 15

144/9 — 90 и 54 — 16

153/9 — 90 и 63 — 17

162/9 = 90 и 72 — 18/9 = 2

$t-(1-t)=\frac{8}{3}(1-t)$ | ·3

$\frac{8}{3}t^2-\frac{2}{3}t-1=0$ | ·3

$8t^2-2t-3=0$

$D=100=10^2$

$t_1=\frac{2+10}{16}=\frac{3}{4}$

$t_2=\frac{2-10}{16}=-0{,}5$

$\begin{cases}\cos^2x=\frac{3}{4} \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} & x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ \cos^2x=-0{,}5 - \varnothing & x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\end{cases}$

Чистовик

1) Дано:

$$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$$

Решение: $\sin x \geq 0$

$6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x$

$6(1-tg^2x) = 16(1-\cos^2x)$

$3(1-tg^2x) = 8(1-\cos^2x)$

$(1-tg^2x) = \frac{8}{3}(1-\cos^2x)$

$1-\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x} = \frac{8}{3}(\cancel{1-\cos^2x})(1-\cos^2x)$

Пусть ~~$x = (1-tg^2x)$, $g =$~~ $(t=\cos^2x)$,

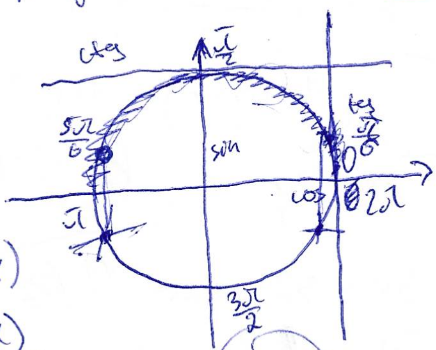
тогда: $8t^2-2t-3=0 \Rightarrow$ $\cos^2x = -0{,}5$ — $\varnothing$; $\cos^2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k \end{array}\right.$

$x = \frac{8}{3}y$

Можно возвести в квадрат

$\sin^2x = (1-\cos^2x)$

поделим на 2



~~Ответ: $\frac{\pi}{2}+\frac{8\pi}{3}+2\pi k$~~

2)

A
$S⋮9$
число $⋮9$
сумма $⋮9$

Решение:
то есть число 162 с суммой цифр 9 при делении $162/9 = 18 \Rightarrow 18/9$, таким образом можно понять что каждое число ~~дающее~~ кратное 9 возможно подходит.

Дано: числа натуральные, при делении на сумму своих цифр кратны 9.

Первое число в последовательности 162, в сотне всего 1 подходящее число

т.е. подбором: 162, 243, ~~270~~ 324, 405, после 405 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972

нужно делить не на 9 а на 18

т.к. сумма цифр ≥9. Чистовик

$S = 243 + 648 + 972 = 1863$

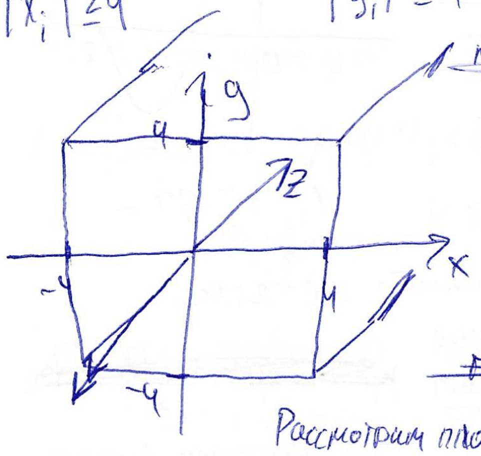
Ответ: ~~1863~~
1863

3) Дано: F – мн. т. ≤|4| Решение:

~~Получается что у нас объем фигуры равен 8^3 = 729 в этом пространстве мы должны найти треуголь.~~

F
≤|4|
(-4; -4) подходит

$|x_i| \le 4$ $|y_i| \le 4$ – ~~наши ровны можно представить как векторы.~~



~~параллелепипед~~
~~нам подходит квадрат со стороной 8.~~

~~по факту нужны треугольники~~

Рассмотрим плоскости $\parallel z = 0 \Rightarrow$ 9 верт + 9 гориз прямых

~~это векторы, которые коллинеарны осям x y z, когда $\vec{a} \parallel \vec{b}$, и если векторы $a(x_1; y_1)$, и $b(x_2; y_2) \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$~~

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$C(9^2) = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot1\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$

~~где вектор a – это катет треугольника а вектор b – это катет ось~~

$(C(9^2))^2 = 36^2 = (35+1)^2 = 1225 + 1 + 70 = 1296$

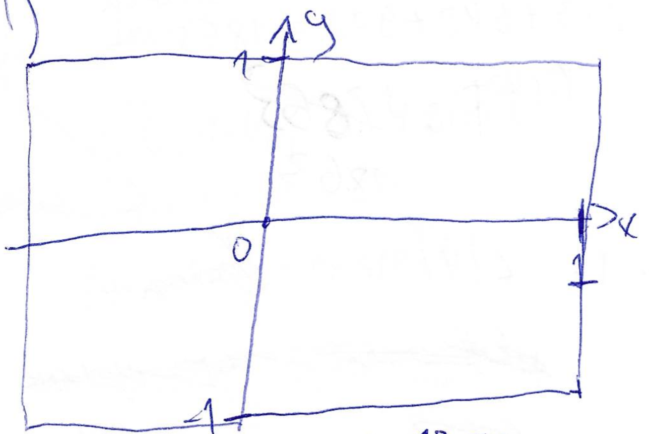
$1296 \cdot 4 = 4000 + 800 + 360 + 24 = 5184$

~~Далее треугольников ...~~

Ответ: 139968

Чистовик

4)



Дано: $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, график $y = \sin k\pi x$ для $k \in \{11; 15; 17\}$

1) $\sin 11\pi x = \sin 17\pi x$
2) $\sin 15\pi x = \sin 17\pi x$
3) $\sin 11\pi x = \sin 15\pi x$

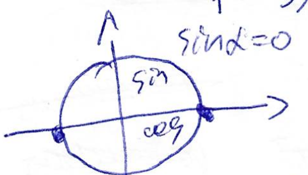
Решение:

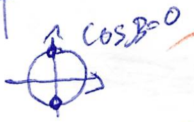
~~график... в ... форме~~

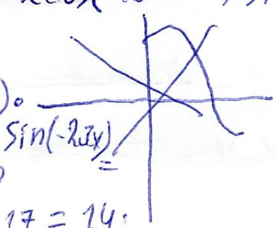
1) $2\cos(14\pi x)\sin(-3\pi x) = 0$ 2) $2\cos(16\pi x)\sin(-\pi x) = 0$

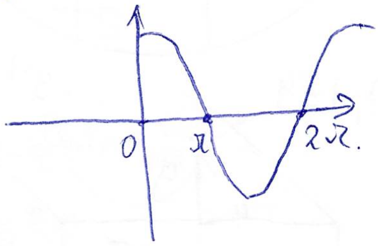
~~выходит так~~

3) $2\cos(13\pi x)\cdot \sin(-2\pi x) = 0$









Тогда $n_{11,17} = 14$; $n_{11,15} = 13$; $n_{15,17} = 16$

$y = \sin k\pi x$ 11, 15, 17 –

43 внутр. пересечений: нечетны.

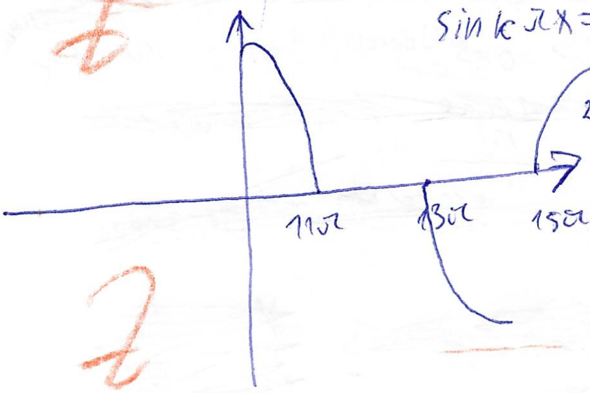
т.е каждые

$\sin k\pi x = 1$ $x = \frac{4m+1}{2k}$

~~...~~

$\sin k\pi x = -1$ аналогично вычисляем 19

$23 \begin{cases} k = 11 \Rightarrow 6 \\ k = 17 \Rightarrow 9 \\ k = 15 \Rightarrow 8 \end{cases}$

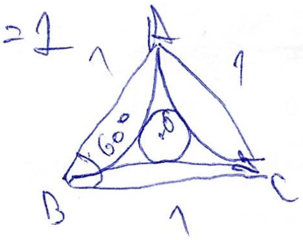


Ответ: 91 частей.

5) Дано: треугольник со параболл и расстояние от вершины до вершины

Решение:

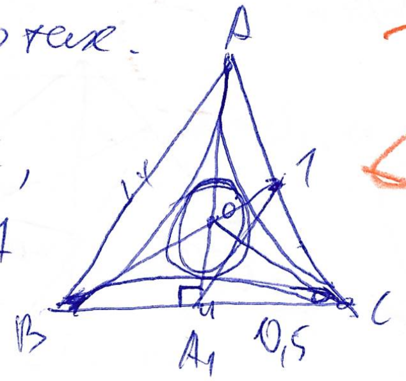
Если соединить все вершины мы получим равносторонний треугольник ABC с $\angle 60°$



38-02-89-29
(124.4)

Точки касания окружности и ~~пре~~ четовки парабул это вершины парабул. Если представить что стороны и треугольники это дуги $\breve{AC}$; $\breve{BC}$; $\breve{BC}$, то маленькая окружность касается 3 больших с равными радиусами.

можно представить треугольник ABC, как 3 стягивающие хорды. точка O лежит в центре треугольника ABC, т.е на его бисс. медианах и высотах.



~~Е~~ по т.е. о медианах, они делятся как 2 к 1 от точки начала =>

$AO = 2x$ $OA_1 = x$

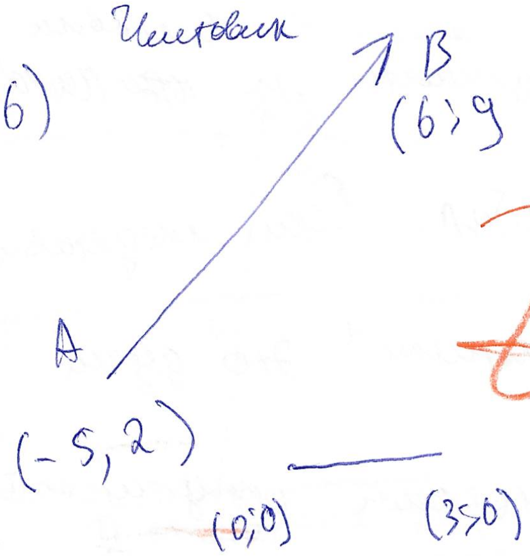
~~по т.е. чевы~~ AA_1 BB_1 CC_1

$r = x$

Ответ: $\frac{1}{3}$

Черновик

б)



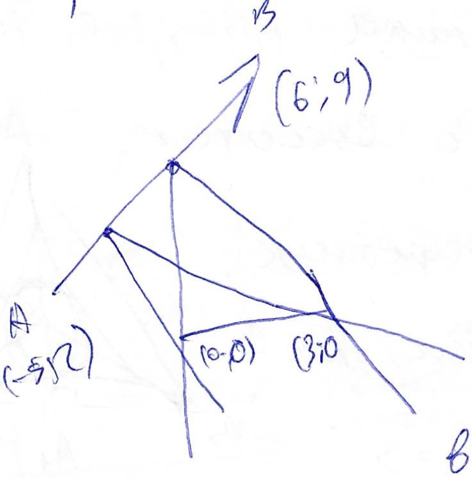
Дано: траектория полета светлячка, 2 метра забор

Решение: можно вычислить длину полета светлячка

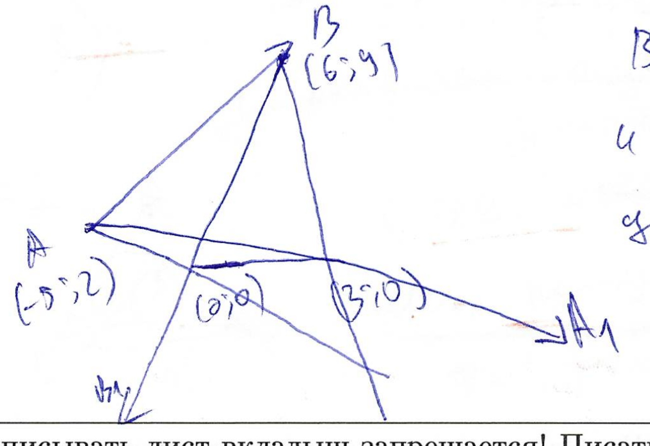
$|\vec{AB}| = \sqrt{11^2+7^2}$

$\vec{AB} = (11;7)$

$|\vec{aB}| = \sqrt{121+49} = \sqrt{170}$, т.е длина $\sqrt{170} \approx 13,1$, т.к. $\sqrt{169} = 13$ $\sqrt{170} > \sqrt{169}$, но $< \sqrt{196}$



Нам нужно найти max площадь затемнения = => это будет в начальной точке и в конечной светлячка, т.к. все что между этими границами точно было в тени.



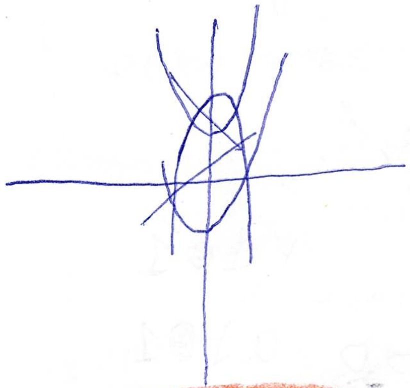
Векторы AA_1 и BB_1 и будут ограничивающими прямыми.

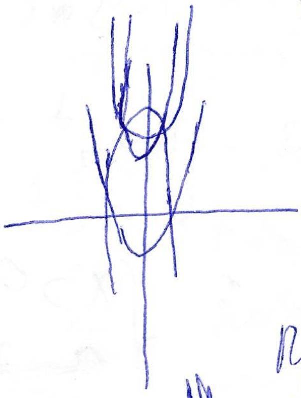
Ответ: 82.

Чистовик

7) Дано: параболы в полную и от единичных $0,5x^2+c$ $c\in Z$ · ограничение плоскости 210×297 мм.

Решение:





Примерно так выглядят четвертовы

Логично предположить, что максимальная площадь будет достигнута при самой низкой точке параболы по y и пересечение её ветвей с такой же но с - пер а, тогда это будет равно $\frac{1}{2}$ от всего листа

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=1-\frac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2=1-\frac{1}{2}x^2 \quad x^2=1 \quad x=\pm1 \quad S_4=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{210\cdot297}{2}=\frac{61570}{2}=30785\text{ мм}}$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=-\frac{1}{2}x^2+1+c \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x^2+1+c \quad x^2=c+1 \quad x_1=\sqrt{c+1}$$

$$2\ x_1-y_2=\sqrt{c+1}-\sqrt{c+1}\xrightarrow[c\to\infty]{}0$$

Значит, $S_{max}=1$

Ответ ~~30785мм~~ 1

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2+1 \\ y=-\frac{1}{2}x^2+c \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2+1=-\frac{1}{2}x^2+c \Rightarrow x^2=c-1 \quad x_2=\sqrt{c-1}$$

Черновик

№8) Дано:

$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

Решение:

$\log_a b \cdot \log_c d = \log_{ac} b \cdot \log_a d$

$\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b.$

Ограничения: $\begin{cases} x > 0 \\ \cancel{a - 2x \geq 0} \\ a > 0 \end{cases}$ $x \neq 1$ $a \neq 1$

$\log_x a = \frac{1}{t}$ $8a^{2t} \cdot t - \frac{1}{t} - 2a^t \geq 0$

~~Нам нужен~~ ~~$[x;y) \cup \{z\}$ или $(y;x] \cup \{z\}$~~

при $t>0$ $8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1 \geq 0$

при $t<0$ $8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1 \leq 0$

~~Неравенство~~ ~~КБШ~~ ~~в x^2 будет z~~

~~$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$~~

$8u^2 - 2u - 1 = 0$

$u = \frac{2 \pm 6}{16} \nearrow \frac{1}{2} \searrow -\frac{1}{4}$

$+ \quad - \quad +$

$-\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2}$

~~Если нам нужно 1 решение можно представить выражение как 2 вектора, и найти обособленную точку, при единственно решение достижения при равенстве.~~

$t > 0$ $u \geq \frac{1}{2}$ $a^t t \geq \frac{1}{2}$ $\exists!$ корень $t_1 > 0$ ⇒ ~~...~~

$u > 0$ $a^t t = \frac{1}{2}$

$f(t) \geq 0$

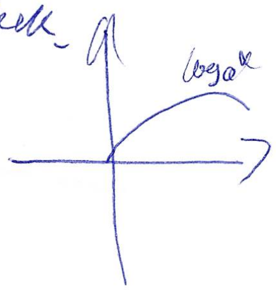
~~Можно попробовать $D \geq 0$ - единственное решение~~ ~~$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x - 0 \geq 0$~~

~~$D = (\log_x a)^2$~~

~~$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$~~

~~$8x^2 \log_a x - \left(\frac{\log_x a}{\log_x - 2x}\right) \geq 0$~~

Школовик –



~~если $a \in (0;1)$ и $x \in (0;1)$ у нас~~

~~[illegible] знака~~

$t < 0$ $\quad n \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$

$a^t t \geq -\frac{1}{4}$

максимум равен $-\frac{1}{e \ln a}$

при $a = e^{-\frac{2}{e}}$

~~Представим график логарифма – он или монотонно убывающий или возрастающий.~~

$a^{\log_b c} = b^{\log_a c}$

Ответ: ~~$a \in (3; \to)$~~ $a = e^{-\frac{2}{e}}$