0 813598 210009

81-35-98-21
(124.28)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 6

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Шашкиной Марьи Владимировны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

75 ([illegible] нет) [illegible]

81-35-98-21
(124.28)

Чистовик:

№5 Решение:

$\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x$; $\sqrt{6\left(\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x}\right)}=4\cos x$

$\frac{\sqrt{6(-\cos 2x)}}{|\sin x|}=4\cos x \rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x>0\\ \sqrt{-6\cos 2x}=4\cos x\sin x\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0\\ \sqrt{-6\cos 2x}=-4\cos x\sin x\end{cases}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x>0\\ \sqrt{-6\cos 2x}=2\sin 2x\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0\\ \sqrt{-6\cos 2x}=-2\sin 2x\end{cases}\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x>0\\ \sin 2x\geq 0\\ -6\cos 2x=4\sin^2 2x\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0\\ -\sin 2x\geq 0\\ -6\cos 2x=4\sin^2 2x\end{cases}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x>0\\ \sin 2x\geq 0\\ 4\cos^2 2x-6\cos 2x-4=0 \quad (1)\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0\\ \sin 2x\leq 0\\ 4\cos^2 2x-6\cos 2x-4=0 \quad (1)\end{cases}\end{array}\right.$

$\cos 2x=t$

(1) $4t^2-6t-4=0$; $D/4=9+16=25=5^2$; $t=\frac{6}{8}\pm\frac{5}{4}$

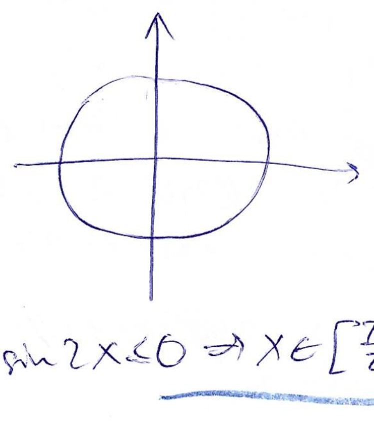
$t_1=2$; $t_2=-0,5$; $\left[\begin{array}{l}\cos 2x=2\\ \cos 2x=-0,5\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x>0\\ \sin 2x\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}\cos 2x=2 (\varnothing)\\ \cos 2x=-0,5\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0\\ \sin 2x\leq 0\\ \left[\begin{array}{l}\cos 2x=2 (\varnothing)\\ \cos 2x=-0,5\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$ $(|\cos x|\leq 1)$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x>0\\ \sin 2x\geq 0\\ \cos 2x=-0,5\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0\\ \sin 2x\leq 0\\ \cos 2x=-0,5\end{cases}\end{array}\right.$

$\cos 2x=-0,5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n\\ 2x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\end{array}\right.$ $n,k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{3}+\pi k\\ x=\frac{\pi}{3}+\pi n\end{array}\right.$ $n,k\in\mathbb{Z}$



$\sin x>0 \Rightarrow x\in(0+2\pi k;\pi+2\pi k)$ $k\in\mathbb{Z}$

$\sin x<0 \Rightarrow x\in(\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k)$ $k\in\mathbb{Z}$

$\sin 2x\geq 0 \Rightarrow x\in\left[0+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]\cup$

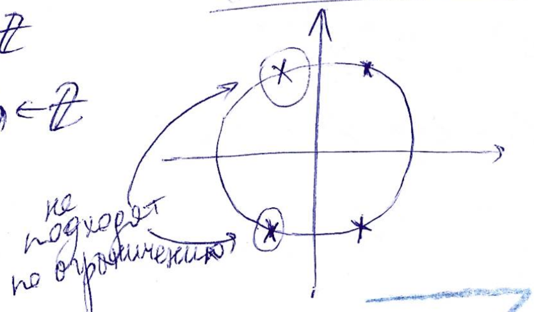
$\cup\left[\pi+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$ $k\in\mathbb{Z}$

$\sin 2x\leq 0 \Rightarrow x\in\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\pi+2\pi k\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2}+2\pi k;2\pi+2\pi k\right]$ $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \left[2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right] \quad k \in \mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + \cancel{2}\pi m \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi n \end{array}\right. \quad m, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi h; 2\pi + 2\pi h\right) \quad h \in \mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + \pi l; \ l \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi r; \ r \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

<u>чистовик:</u>



$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right. \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

ОДЗ: $\begin{cases} (1 - ctg^2 x) \geq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$ выполнено

$\Rightarrow$ <u>Ответ:</u> $x \in \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right\} \ k \in \mathbb{Z}$

№ 32

<u>Решение:</u>

пусть $\overline{abc}$ – такое число $\in \mathbb{N}$. (a, b, c – какие-то цифры) тогда $(\overline{abc} : (a+b+c)) \vdots 9$ признак делимости на 9: сумма цифр делится на 9. Тогда пусть

$\frac{\overline{abc}}{a+b+c} = \overline{def}$ (где $\overline{def} \in \mathbb{N}$ (число) и $(d+e+f) \vdots 9$).

$\Rightarrow \overline{abc} = \overline{def}\,(a+b+c)$; $\overline{def} \vdots 9 \Rightarrow \begin{cases} \overline{abc} \vdots 9 \\ \overline{abc} \vdots (a+b+c) \end{cases}$

$\overline{def} = k \cdot 9 \ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \overline{abc} = k \cdot 9 \cdot (a+b+c) \Rightarrow$ (т.к. $\overline{abc} \vdots 9$)

$\Rightarrow 108 \leq \overline{abc} \leq 999$ сумма цифр $(a+b+c)$ кратна 9, а $\frac{\overline{abc}}{a+b+c}$ тоже кратно 9 $\Rightarrow \overline{abc} \vdots 81 = 9 \cdot 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overset{81\cdot 2}{162} \leq \overline{abc} \leq \overset{81\cdot 12}{972} \Rightarrow$ какие-то из чисел

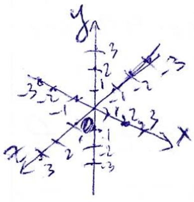
$81 \cdot k$, где $\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ k \in [2; 12) \end{cases}$ подходят под определение $\overline{abc}$ из условия это числа $162^{\vdots 9\cdot(1+6+2)}$, $243^{\vdots((2+4+3)\cdot 9)}$, $324^{\vdots 9\cdot(3+2+4)}$, $405^{\vdots 9\cdot(4+5)}$, $486^{\vdots 9\cdot(4+8+6)}$, $567^{\vdots 9(5+6+7)}$, $648^{\vdots(9\cdot(6+4+8))}$, $729^{\vdots(9\cdot(7+2+9))}$, $810^{\vdots 9\cdot(8+1)}$, $891^{\vdots 9\cdot(8+9+1)}$, $972^{\vdots 9\cdot(9+7+2)}$. Можно проверить, что все они подходят, кроме 567, 729, 891 $\Rightarrow A = \{162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972\}$. Искомая сумма равна: $162 + 648 + 972 = 810 + 972 = 1782 \Rightarrow$ <u>Ответ:</u> $A = \{162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972\}$ искомая сумма: 1782

81-35-98-21
(124,28)

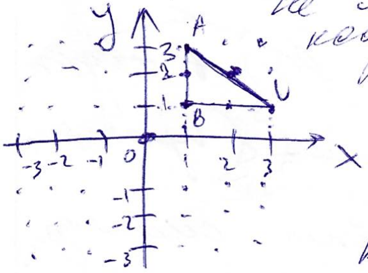
Чистовик:

№3 Решение:

если все координаты ≤ 3, а катеты параллельны координатным осям, то длина каждого из катетов ≤ 6; ~~все координаты целочисленные,~~ ~~длины сторон (в том числе~~



~~Рассмотрим~~ Найдём кол-во способов выбрать такой треугольник, катеты которого $\parallel$ осям Ox и Oy, а потом умножим это кол-во на 3 (т.к. катеты могут ещё быть $\parallel$ осям Ox и Oz или $\parallel$ осям Oy и Oz, и эти ситуации симметричны) (катеты не могут быть параллельны одной коорд. оси, т.к. они пересекаются под углом $90°$).



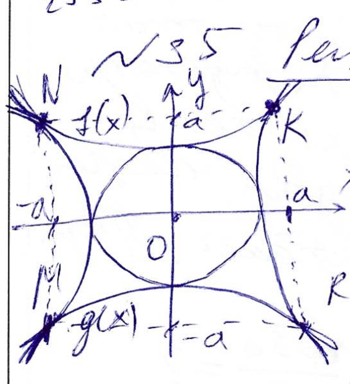
Пусть мы имеем $\triangle ABC$, $\angle ABC = 90°$. Всего мы имеем $7 \cdot 7$ целочисленных координат в XoY для A выбираем 1 из 49 точек, для C — одну из 48 ($C \neq A$). Точку B теперь можно выбрать 2 способами (если $AB \parallel Ox$ или $AB \parallel Oy$), но A и C симметричны, так что делим кол-во способов на 2. Итого, кол-во способов:

$49 \cdot 48 \cdot \cancel{2} : \cancel{2} = 49 \cdot 48 \Rightarrow$ Искомое кол-во прямоугольных треугольников равно: $48 \cdot 49 \cdot 3 = 7056$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 49 \\ \hline 432 \\ +192 \\ \hline 2352 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2352 \\ \times 3 \\ \hline 7056 \end{array}$$

Ответ: 7056.

№5 Решение: введём оси, как показано на рисунке (O — центр окружности)



~~в силу симметрии~~ т.к. углы у "квадрата" нулевые, то параболы касаются друг друга в углах "квадрата". В силу симметрии ~~сторо~~ парабол окружность касается в точках, лежащих на коорд. осях

пусть $f(x) = Cx^2 + B$; $g(x) = -Cx^2 - B$ (в т.ч. $f(x)$ симметрична $g(x)$ относительно оси Ox). K, N, M, R — точки касания парабол в силу симметрии

~~листовик~~ их координаты равны $K(a;a)$; $N(-a;a)$; $M(-a;-a)$; $R(a;-a)$ соответственно по условию: $NK=1$; $KR=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(a+a)^2+(a-a)^2}=1$ ~~$\sqrt{(a-a)^2+(a+a)^2}$~~ $\Rightarrow \sqrt{4a^2}=1=2a$ ~~...~~ $(a>0) \Rightarrow a=\frac{1}{2}$; $K(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; $N(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; $M(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$; $R(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$; $f(x)=Cx^2+b$; $g(x)=-Cx^2-b$; (без ограничения общности считаем $C>0$, $b>0$, $a>0$).

$N, K \in f(x)$; $\Rightarrow \frac{1}{2}=C\cdot\frac{1}{4}+b$; ~~...~~ $M, R \in g(x) \Rightarrow -\frac{1}{2}=-C\frac{1}{4}-b$

$b=\frac{1}{2}-\frac{C}{4}$; ~~...~~

$f(0)=y_{\text{вершины } f(x)}=b=\frac{1}{2}-\frac{C}{4}$; Радиус окружности равен $y_{\text{вершины } f(x)}=b=\frac{1}{2}-\frac{C}{4}$

$f'(x)=2Cx$; ур-е касательной к $f(x)$ в точке $K(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$: $y=(2\cdot C\cdot\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=Cx-\frac{C}{2}+\frac{1}{2}$ {проходит через точку ~~...~~ $(0;0)$ в силу симметрии}

$\Rightarrow 0=C\cdot 0-\frac{C}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{C}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow C=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Радиус окружности равен: $\frac{1}{2}-\frac{C}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=$

$=\frac{1}{4} \Rightarrow$ Ответ: $\frac{1}{4}$ — искомый радиус окружности.

№6 Решение:

Прямая AB задаётся уравнением: $y=kx+b$ в осях xOy

$\begin{cases} 4=-3k+b \\ 7=6k+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3k+4 \\ 3=9k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{3} \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+5$

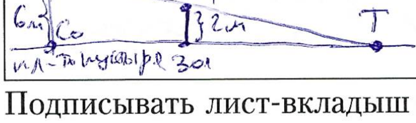
Пусть $C_0(x_c;y_c)$ — координата ортогональной проекции светлячка, летящего по прямой $y=\frac{1}{3}x+5$, на пл-ть пустыря

$\Rightarrow y_c=\frac{1}{3}x_c+5$; $З_{01}(0;0)$; $З_{02}(3;0)$ — координаты точек касания краёв секции забора пл-ти пустыря

$T_1(x_{T1};y_{T1})$; $T_2(x_{T2};y_{T2})$ — точки, где кончается тень, создаваемая левым и правым концом секции забора соотв. $T(x_T;y_T)$ — точка края тени. $З_1$ — по подобию:

$\frac{6м}{2м}=\frac{C_0T}{З_0T}=\frac{C_0З_0}{З_0T}+1 \Rightarrow \frac{C_0З_0}{З_0T}=2$

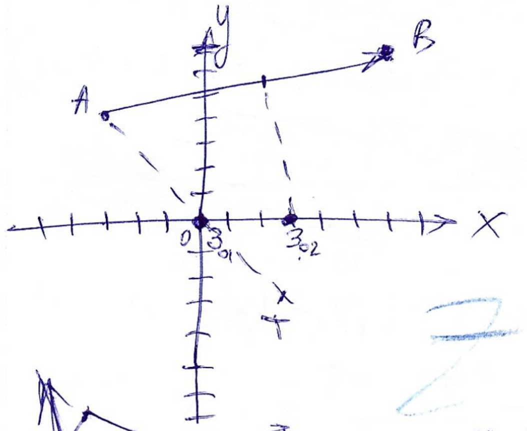
($З_0$ — проекция ~~любой~~ какой-то точки забора на пл-ть пустыря.)



81-35-98-21 (124.28)

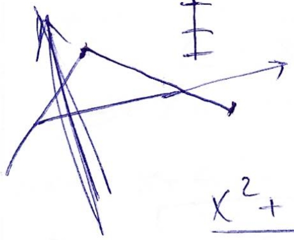
Черновик:

$$\frac{СС_0}{ЗВ_0} = \frac{6}{2} = \frac{C_0T}{З_0T} = \frac{C_0З_0}{З_0T} + 1$$



$C_0(x;y)$; $T_1(x_{T_1}; y_{T_1})$

$$\frac{\sqrt{(x^2 - \cancel{x_{T}})^2 + (y^2 - \cancel{y_{T}})^2}}{\sqrt{x_{T_1}^2 + y_{T_1}^2}} + 1 = \frac{6}{2}$$



$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x_{T_2}^2 + y_{T_2}^2}} + 1 = \frac{6}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x_T^2 + y_T^2}} = 2$$

$$\frac{x^2+y^2}{x_{T_1}^2 + y_{T_1}^2} = 4 \qquad \frac{(x-3)^2+y^2}{x_{T_2}^2 + y_{T_2}^2} = 4$$

$y = kx + b$; $y_З = kx_З + b$; $y_T = kx_T + b$

$\cancel{kx = y + kx_З - y_З}$ $y = kx + y_З - kx_З \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{y - y_З}{x - x_З}$$

$$y_T = \frac{y - y_З}{x - x_З} x_T + y_З - \frac{y - y_З}{x - x_З} x_З =$$

$$= \frac{y - y_З}{x - x_З}(x_T - x_З) + y_З$$

$$y_{T_1} = \frac{y}{x}(x_{T_1}) \qquad y_{T_2} = \frac{y}{x-3}(x_T - 3)$$

$$\frac{x^2+y^2}{x_{T_1}^2 + \frac{y^2}{x^2}x_{T_1}^2} = 4; \quad \frac{(x-3)^2+y^2}{x_{T_2}^2 + \frac{y^2}{(x-3)^2}(x_T-3)^2} = 4$$

$$2 = \frac{x^2 + (y - y_З)^2}{x_T^2 + (y_T - y_З)^2} = \frac{x^2 + (\frac{1}{3}x + 5 - y_З)^2}{x_T^2 + (}$$

Чистовик:

Точки $C(x_c;y_c)$; $З(x_з;0)$ и $T(x_T;y_T)$ лежат на одной прямой в пл-ти xOy; $y_з = k_1x+b_1$;

$0 = k_1x_з + b_1 \Rightarrow b_1 = -k_1x_з$; $y_c = \frac{1}{3}x_c + 5 = k_1x_c - k_1x_з \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 = \frac{\frac{1}{3}x_c+5}{x_c-x_з}$; $y_T = \frac{\frac{1}{3}x_c+5}{x_c-x_з}x_T - \frac{\frac{1}{3}x_c+5}{x_c-x_з}x_з \Rightarrow$

$\Rightarrow y_T = \frac{\frac{1}{3}x_c+5}{x_c-x_з}(x_T-x_з)$; $y_c = \frac{1}{3}x_c+5$; $y_з = 0$

$$2 = \frac{C_0З_0}{З_0T} = \sqrt{\frac{(x_c-x_з)^2+(y_c-y_з)^2}{(y_з-y_T)^2+(x_з-x_T)^2}} = \sqrt{\frac{(x_c-x_з)^2+y_c^2}{\left(\frac{\frac{1}{3}x_c+5}{x_c-x_з}(x_T-x_з)\right)^2+(x_з-x_T)^2}} = 2$$

$$4(x_T-x_з)^2\left(\left(\frac{\frac{1}{3}x_c+5}{x_c-x_з}\right)^2+1\right) = (x_c-x_з)^2 + \left(\frac{1}{3}x_c+5\right)^2$$

$(x_c-x_з)^2+(\frac{1}{3}x_c+5)^2 \neq 0 \Rightarrow 4(x_T-x_з)^2 = (x_c-x_з)^2$

$4x_T^2 - 8x_зx_T + 4x_з^2 - x_з^2 - x_c^2 + 2x_cx_з = 0$

$4x_T^2 - 8x_зx_T + 3x_з^2 + 2x_cx_з - x_c^2 = 0$

$x_c \in [-3;6]$; $x_з \in [0;3]$

$x_T^2 - 2x_зx_T + \frac{3x_з^2+2x_cx_з-x_c^2}{4} = 0$

$\frac{D}{4} = x_з^2 - \frac{3x_з^2+2x_cx_з-x_c^2}{4} = \frac{x_з^2-2x_cx_з+x_c^2}{4} = \frac{(x_з-x_c)^2}{4}$

$x_T = x_з \pm \frac{(x_з-x_c)}{2}$; $x_{T1} = \frac{3x_з-x_c}{2}$; $x_{T2} = \frac{x_з+x_c}{2}$; если $x_c \le x_з$ нам нужен больший (x_{T1}) корень, если $x_c > x_з$ — меньший (x_{T1})

$\Rightarrow$ в обоих случаях корень $x_T = \frac{3x_з-x_c}{2}$; для каждого x_T нужна min y_T;

$2x_T = 3x_з - x_c \Rightarrow x_c = 3x_з - 2x_T$

Чистовик:

$$y_т = \frac{x_з - \frac{2}{3}x_т + 5}{2x_з - 2x_т}(x_т - x_з) = -\frac{x_з}{2} + \frac{x_т}{3} - \frac{5}{2}$$

(для $x_з \ne x_т$, т.к. этого не может быть, для этого светлячок должен пролететь прямо под забором)

$x_з \in [0;3] \Rightarrow y_т$ min, когда $x_з = 3$: $y_т = -4 + \frac{x_т}{3}$

$x_c \in [-3;6]$; $x_т = \frac{2x_з \pm (x_з - x_c)}{2}$

$x_{т\,min} = -3$; $x_{т\,max} = 6$

при $x_з = 3$ $x_т = \frac{6 \pm (3 - x_c)}{2} \Rightarrow x_{т1} = \frac{9 - x_c}{2}$, $x_{т2} = \frac{3 + x_c}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_т \in [0;6] \Rightarrow$ при $x_т \ge 0$ $S_{участ1} = \frac{6}{2}\cdot(4+2) = 3\cdot 6 = 18$

при $x_т \in [-3;0]$: $-3 = \frac{3x_з - x_c}{2} \Rightarrow x_c = 6 \Rightarrow$

$x_з = \frac{2x_т + 6}{3} \Rightarrow y_т = -\frac{2x_т + 6}{6} + \frac{x_т}{3} - \frac{5}{2} = -\frac{7}{2}$ и при

$x \in [-3;0]$ $S_{участ2} = 3\cdot\frac{7}{2} = \frac{21}{2} \Rightarrow S = S_{участ1} + S_{участ2} =$

$= 18 + \frac{21}{2} = \frac{57}{2} \Rightarrow$ Ответ: площадь равна $\frac{57}{2}$.

№34 Решение:

$0 \le x \le 1$; $-1 \le y \le 1$; $y = \sin(k\pi x)$ $k \in \{11;13;15\}$

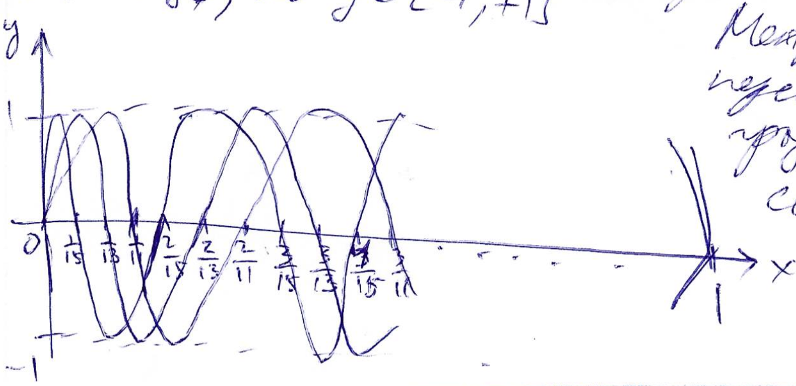
$y = \sin(11\pi x)$ пересекает Ox при $k\pi x = 11\pi x = \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ при $x = 0$; $x = \frac{1}{11}$; $x = \frac{2}{11}$; $x = \frac{3}{11}$ ... $x = \frac{11}{11}$

аналогично для $k = 13$: $x \in \{0; \frac{1}{13}; \frac{2}{13} \dots \frac{13}{13}\}$

и для $k = 15$: $x \in \{0; \frac{1}{15}; \frac{2}{15} \dots \frac{15}{15}\}$.

графики сжимаются и растягиваются к и от оси Oy, но $y \in [-1;+1]$



Между двумя соседними пересечениями оси Ox график 2 раза пересекает каждый из двух других графиков $y = \sin(k\pi x)$

Чистовик:

№8

$(a\neq1;\ x\neq1;\ a>0,\ x>0)$

$3x^2\log_a x-\log_x a-2x\le 0;\quad \dfrac{3x^2-\log_x^2 a}{\log_x a}\le 2x;$

$\dfrac{(\sqrt{3}x-\log_x a)(\sqrt{3}x+\log_x a)}{\log_x a}\le 2x$

$(x\neq1;\ a\neq1 \Rightarrow$ корни не пропали и не появились$)$
$(\log_x a\neq0$ и $\log_a x\neq0)$

$3x^2-\log_x^2 a\le 2x\log_x a$

$\dfrac{3x^2\log_a^2 x-2x\log_a x-1}{\log_a x}\le 0$

$x\log_a x=t$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3t^2-2t-1\le 0\\ \log_a x>0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_a x<0\\ 3t^2-2t-1\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$D=4+12=16=4^2;\quad 3t^2-2t-1=3(t\quad)(t\quad)$