0 691350 430007

69-13-50-43
(123.12)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Шишкина Кирилла Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

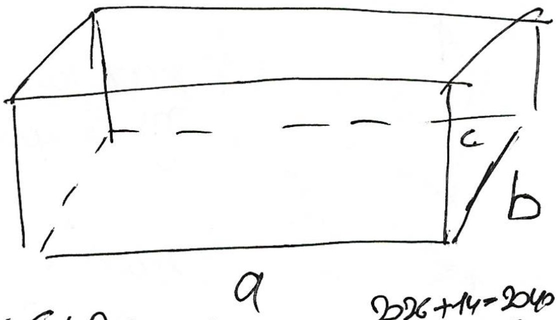
Шишкин

50 (Пятьдесят)

69-13-50-43
(123.12)

Черновик - 1.

№1.



a - дл
b - шир
c - выс

$a \neq b \neq c$
$a; b; c \in \mathbb{N}$.

$2026+14=2040$
$2\cdot c+2+c+2c+12+4c=\cancel{1013}$ $7c=999$; $c=\cancel{3}\ 37\cdot\cancel{3}$

$V_{пр}+S_{пов}+$ сумма длин ребер $=2026$

$V \to \min$ - ? $V=a\cdot b\cdot c$; $S_{пов}=2ab+2cb+2ac$

$S_{дл.р}=\cancel{2a+2}\ 4a+4b+4c$

$\Rightarrow abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)=2026$.

$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$

~~Пусть~~

$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

$\underbrace{(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2}_{\text{Как вариант}}$

~~$a(4-a)$~~

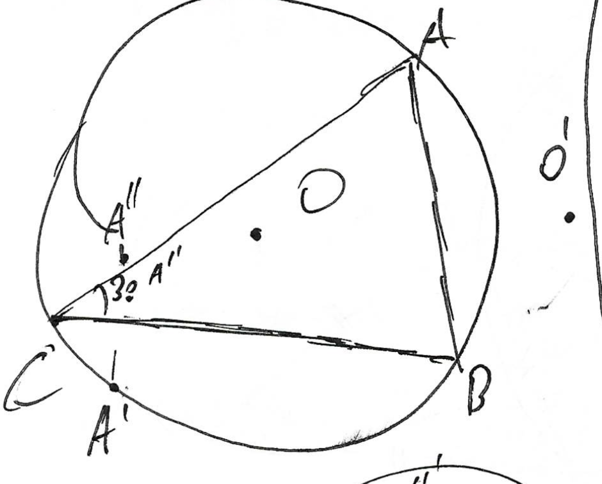
$2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)$

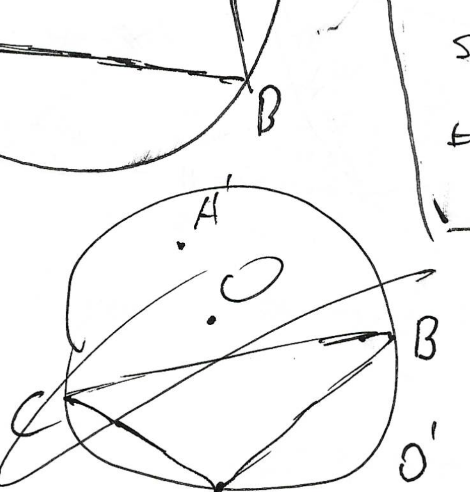
$=2(ab+bc+ac+2a+2b+2c)=$

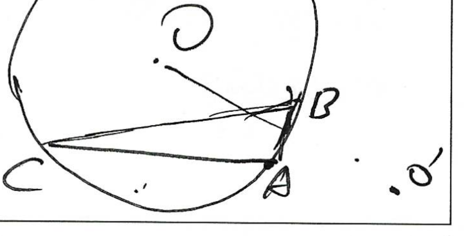
$=2(a(b+2)+b(c+2)+c(a+2))$

$=2(1013-2(a(b+2)-b(c+2)-c(a+2))$

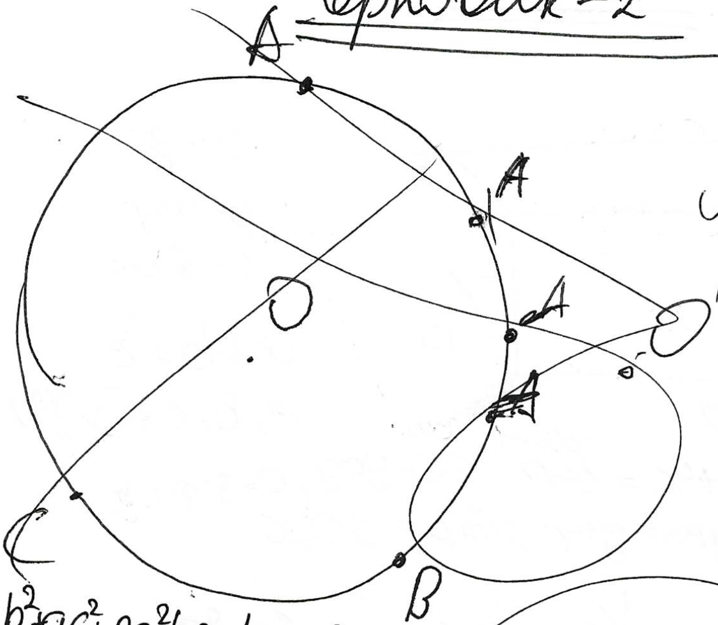
№3







Черновик-2



$\angle B$ - ?

Лежат на одной прямой...

$(a+b+c)^3 =$

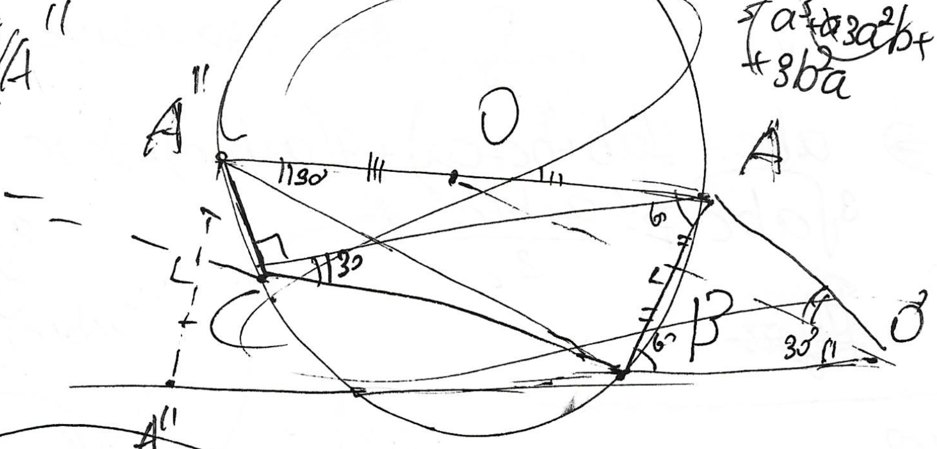
$=((a+b)+c)^3 =$

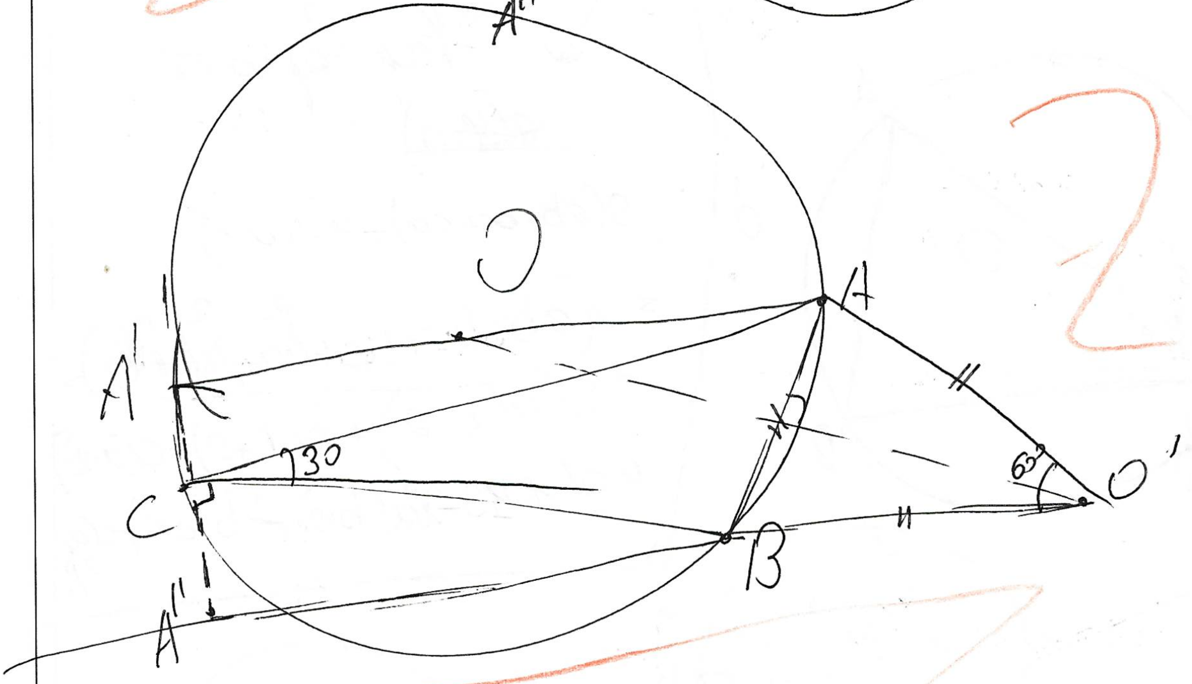
$=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)(a+b+c)=$

$=a^3+a3a^2b+$
$+3b^2a$

$=a^3+ab^2+ac^2+2a^2b+2abc+2a^2c$

$b^3+a^2b+bc^2+2abc+$





Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

69-13-50-43
(123.12)

Черновик-3

$abc + 2(ab+bc+ac)+4(a+b+c)=2026.$

$abc+(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2$

$+4(a+b+c)=2026.$

$2(ab+bc+ac)=$

$=(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2$

$abc+(a+b+c)^2-(a-4)^2-(b-4)^2-(c-4)^2=2014.$

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^{2}}{\log_2 a}\geq 0.$$

~~$a\geq 0$~~ $a>0.$

$$\frac{(a^2)^x-3a^x\cdot a+2a^2}{\log_2 a}\geq 0 \Rightarrow$$

a^2 ~~a~~ Относительно a^x

$D=$ ~~$+3a$~~ $9a^2-8a^2=$

$=a^2 \neq$

$$\left[\begin{array}{l} a^x=\frac{3a-a}{2}=a \\ a^x=\frac{3a+a}{2}=2a \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^x=a \Rightarrow x=1 \\ a^x=2a \Rightarrow x=1+\log_a 2= \end{array}\right.$

$=1+$ ~~$\log$~~ $\frac{1}{\log_2 a}$

По факту, $\log_2 a$ – это просто число; опр знак н-ва.

Т.к отрезок 2026 пол $\Rightarrow \log_2 a<0.$

$\Rightarrow 1+$~~$\log_2 2a$~~$+2026=1+\frac{1}{\log_2 a}$

$\log_2 a+2026=\frac{1}{\log_2 a}$

$t=\log_2 a$

$t^2+2026t-1=0$

$1=1+2026+\frac{1}{\log_2 a}$

~~$D=2026^2+4$~~

$\frac{2026+\sqrt{2026^2+4}}{2}=$

$\log_2 a=\frac{1}{-2026}$

$a=2^{-\frac{1}{2026}}=$

$(2000+26)^2=$

$=4000000+$

$+52000\cdot 2+$

$+676=$

$=4104676$

$(25+1)^2=$

$=625+50+1=$

$=6$

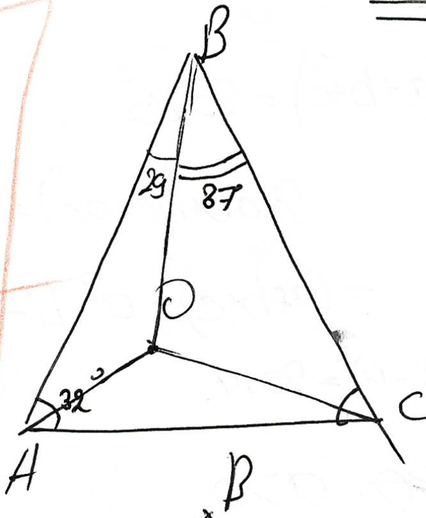
$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=\frac{\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z}{\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z}=$$

$$=\sqrt[3]{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z}\leq\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}{3}$$

$\Rightarrow$ макс зн при $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}z$

$\frac{\sqrt{3}}{3}=$ ~~$\frac{1}{3}$~~ $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

Черновик-4

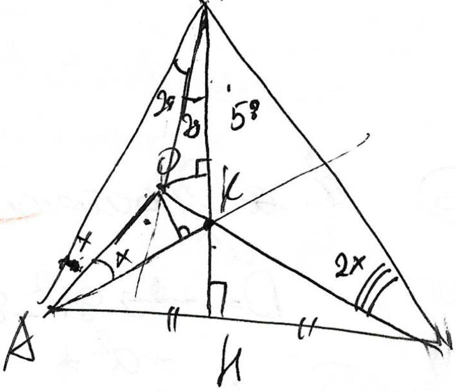


∠BCO=2∠BAO

∠OBC=3∠ABO

$\frac{\angle BOA}{\angle BAO}$-?

$\frac{180-64=116}{4}$=29°



18 122-2x-~~180~~=

=~~6~~58+2x

432-2x

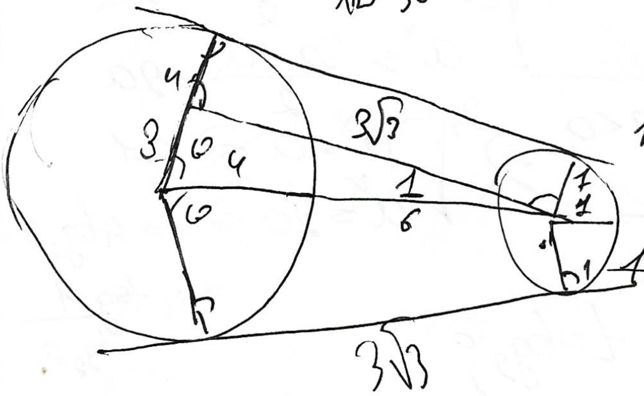
12·360=2140

~~28-x~~ 180-28-x=

=152-x

152-x+~~122-2~~x+~~2x~~=3

58+2x

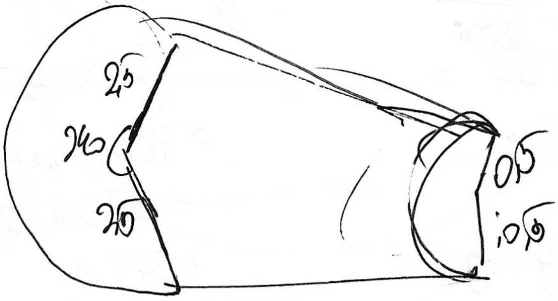


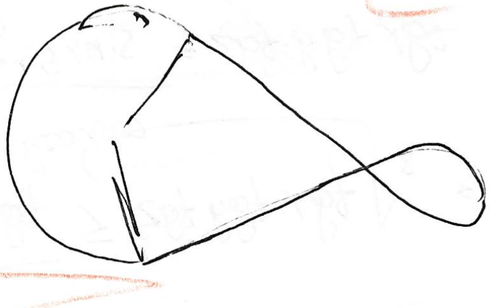
~~152-x~~

90-29=61

61+90-x+

$2/3\cdot x4\cdot\pi+2/3\cdot1\cdot\pi+6\sqrt{3}$





Чистовик.

лист 1

№1. Пусть a-длина; b-ширина; c-высота.

Для прямого прямоугольного призмы верны след. формулы:

$V = a \cdot b \cdot c$

$S_{пов} = 2(ab+bc+ca)$

$S_{ребер} = 4(a+b+c)$

⇒ ~~Тогда~~; условие можно переписать след образом:

$a \cdot b \cdot c + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) = 2026.$

Рассмотрим это уравнение подробнее:

Т.к $2026 : 2 \Rightarrow abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) : 2.$

Т.к $2(ab+bc+ac)$, и $4(a+b+c) : 2$; то остается что и $a \cdot bc : 2.$

⇒ в $a \cdot b \cdot c$ должно быть хоть одно четное число.

Не умаляя общности, пусть $a \vdots 2$, ~~и пол~~ . -

При делении всего уравнения на 2, получается

$$\frac{abc}{2} + \cancel{2}\, ab+bc+ca+2(a+b+c) = 1013.$$

Для того, чтобы все это ~~стороны~~ давало 1013, сумма в $\frac{abc}{2}+ab+bc+ca$ должна быть нечет, т.к $2(a+b+c)$ четное в независимости от переменных ~~В эт~~

В $\frac{abc}{2}+ab+bc+ca$; ab и ac будут четными, т.к $a:2$.

Значит:

Либо $\frac{abc}{2}$, либо bc должны быть нечетными.

(Если оба выражения нечетные ⇒ сумма их будет четная, что противоречит сумме.)

Тогда:

1) $a:4$, и b, c - нечетные

или

2) $a \not{:} 4$; либо b; либо c - нечетные, когда другая из переменных будет четной.

Пойдем с наименьших значений. Пусть одна из переменных будет равняться 1, (b), тогда $a:4$ ⇒ нам нужно найти c

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик

лист 2

$4\cdot c + 2\cdot(4+c+4c) + 4(\overset{c+5}{\cancel{5c}}) = 2026$

~~$2c+7c+10c=1013$~~ $\quad$ ~~$11c=$~~ $\quad 2c+5c+\overset{4}{\cancel{8}}+2c+10=\cancel{2026}\,1013$

~~$19c=1013$~~ $\quad$ ~~$9c=995$. Такого быть не может, т.к $a;b;c\in N$.~~

$9c=999 \Rightarrow c=111$.

~~Проверим мин зн во 2 варианте:~~

~~$a=2;\ b=1$~~ Второй вариант невозможен, т.к если $a⋮4$; a b и c - нечетные - сумма $\frac{abc}{2}+bc$ будет нечетной. А если b - четная, а $a⋮4$; то сумма все-равно четная

Из этого следует, что

мин $V = 111\cdot 2\cdot 1 = \cancel{222}\ 222$.

Это по-настоящему мин. объем, т.к ~~бу~~ были взяты мин. ~~дню~~ числа для выполнение усл. четности, хоть есть и другие ~~кот~~ длины сторон

Ответ: 222

№ 34 $\dfrac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0$. Длина от x_0 до x_{2026} - 2026 клеток

При рассмотрении усл. данной задачи, и "длины" решений неравенства, очевидно то, что никакие промежутки в бесконечность не должны быть включены в ответ. ~~Относительно~~

Решения н-ва вида $ax^2+bx+c\geq 0$ при $a>0$, и $D\geq 0$, выглядит так:

$x\in(-\infty;x_0]\cup[x_1;+\infty)$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

лист 3

№4 (продолж)

Из этого следует, что длина отрезка решений — тоже бесконечна. Следовательно такого не должно получиться.

В исх. н-ве: $\frac{(a^x)^2-3\cdot a\cdot a^x+2a^2}{\log_2 a} \geq 0$, если $\log_2 a>0$, получается решение вида $(-\infty; x_0]\cup[x_1;+\infty)$.

$\Rightarrow \log_2 a < 0$; Также $a>0$
$\log_2 a \neq 0$.

$\Rightarrow a\in(0;1)$

~~Получается ур-е/неравенство: (−1)~~

~~Если в~~ Умножая все н-во на $\log_2 a$, который отр,

получается $(a^x)^2-3\cdot a\cdot a^x+2a^2\leq 0$.

Решаем отн.: a^x

~~a^x~~

$$D=9a^2-8a^2=a^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^x_{\cancel{1}}=\frac{3a-a}{2} \\ a^x_{\cancel{2}}=\frac{3a+a}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^x=a \\ a^x=2a\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1+\log_a 2= \\ =1+\frac{1}{\log_2 a}.\end{array}\right.$$

Решением этого неравенства будет явл промежуток $\left[1+\frac{1}{\log_2 a}; 1\right]$.

$\Rightarrow$, чтобы получился отрезок длиной 2026:

$$1+\frac{1}{\log_2 a}+2026=1. \Rightarrow \log_2 a=-\frac{1}{2026} \Rightarrow a=2^{-\frac{1}{2026}}.$$

Ответ: $a=2^{-\frac{1}{2026}}$

Чистовик

лист 4

№5. $tgx\cdot tgy\cdot tgz \to max.$

Используя н-во о средних:

$$\sqrt[3]{tgx\cdot tgy\cdot tgz} \le \frac{tgx+tgy+tgz}{3}$$

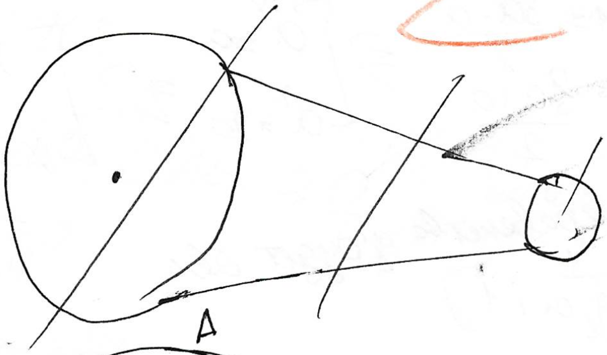
Макс. зн. произведения тангенсов будет достигаться если $tgx=tgy=tgz$. Т.к по условию $x+y+z=\frac{\pi}{2}$

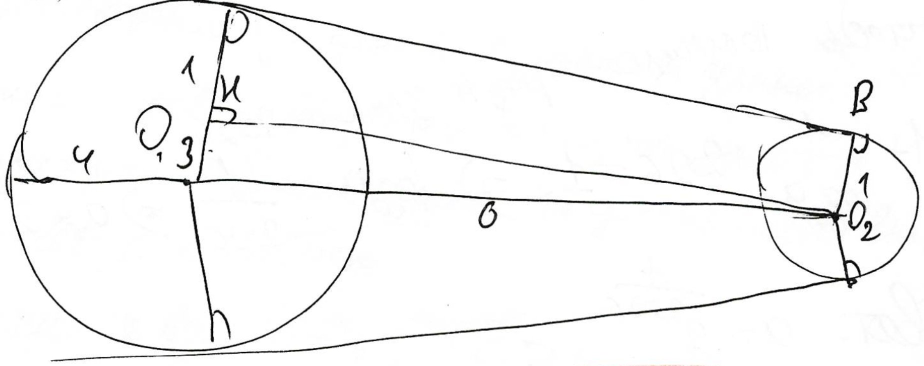
То $x=y=z=\frac{\pi}{6}.$ и $0<x;y;z\le\pi/2$

$$\Rightarrow tg\frac{\pi}{6}\cdot tg\frac{\pi}{6}\cdot tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{9}.$

№7.





Чистовик

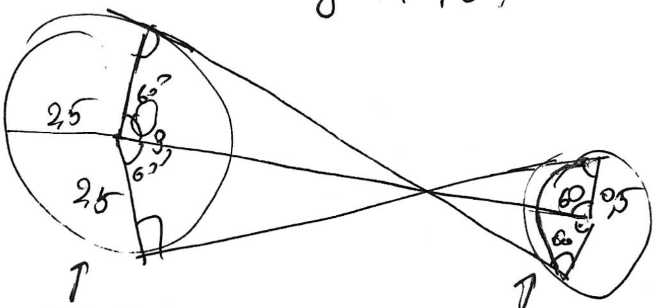
лист 5

№7 (продолж)

По условию: $R_0 = 4$ (большая окр); $r = 1$ (меньшая окр); а расстояние между окр $= 6$

Проведем перпендикуляр из O_2 в O_1A; $O_2H = AB$, т.к ABO_2O_1 - прямоугольник. (три угла $= 90°$ ⇒ 4 угол $= 90°$)
⇒ $O_1H = 3$; $O_1O_2 = 6$. По т. Пифагора $O_2H = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$.

Газонокосилка изменила бы путь движения на 1,5 внутрь. Из этого:



тут считается внеш. сторона

тут считается внут сторона

Расстояние между окружностями все еще 6.

~~В~~ Изначальная траектория движения была 240° для каждого круга; т.к $tg\frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$; ⇒ угол $= 60°$.
Из этого $360 - 120 = 240$:

Однако, длина касательных, в отличие от окр; не изменится; т.к газонокосилка движется по прямой.

⇒ Весь путь будет: $\frac{240}{360}\cdot\pi\cdot2\cdot2{,}5 + \frac{120}{360}\cdot\pi\cdot2\cdot0{,}5 + 6\sqrt{3} =$
$= \frac{2}{3}\pi\cdot5 + \frac{1}{3}\pi + 6\sqrt{3} = \frac{11}{3}\pi + 6\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{11}{3}\pi + 6\sqrt{3}$