



0 774417 860006

77-44-17-86

(122.2)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант _____

дешифр

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Щербаковой Анны Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Анна

77-44-17-86
(122.2)

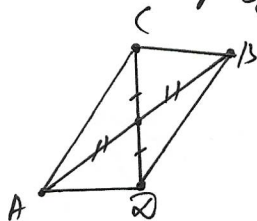
№1 Чистовик. 1

Решение:

1) ~~Даны~~ ~~два~~ ~~данных~~ ~~для~~ ~~того~~ ~~чтобы~~ ~~доказать~~

Докажем, что данные две хорды, которые делятся точкой пересечения пополам вл. диаметрами данного круга:

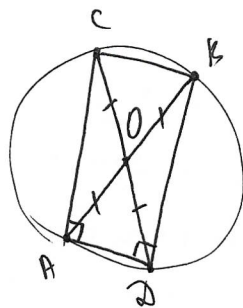
т.к. два отрезка делятся т. пересечения пополам, то они образуют параллелограмм:



т.к. ABCD вписан в окружность, то $\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$ (по св-ву четырехуг., впис. в окружность)
при этом $\angle ACB = \angle ADB$ (по св-ву параллелогра. о равных противоположных углах.)
значит $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$.

Аналогично $\angle CBD = \angle CAD = 90^\circ$

\Rightarrow ABCD - прямоугольник, значит т. пересечения CD и AB это центр ^(данной) окр-ти, значит AB и CD - диам. данного круга.



Тогда, т.к. по усл. все три хорды пересекаются в одной ~~той~~ точке, то третья хорда пройдет через центр круга, т.е. третья хорда - это диаметр, значит её длина соот. 2 радиуса:
 $5 \cdot 2 = 10$. - это и будет намн. возм. длина третьей хорды.

Ответ: 10.

№2.

Решение:

1) Пусть данное число это \overline{abcd} (считая сверху означает, что это число, а не произведение $a \cdot b \cdot c \cdot d$, т.е. в данном числе a тысяч, b сотен, c десятков и d единиц.)

$$\begin{aligned} 2) \text{ тогда } \overline{abcd}^2 &= (1000a + 100b + 10c + d)(1000a + 100b + 10c + d) = \\ &= 1000a(1000a + 100b + 10c + d) + 100b(1000a + 100b + 10c + d) + \\ &+ 10c(1000a + 100b + 10c + d) + d(1000a + 100b + 10c + d) = \\ &= 1000a(1000a + 100b + 10c + d) + 1000a \cdot 100b + 100b(100b + 10c + d) + \end{aligned}$$

$+ 1000a \cdot 10c + 10c(100b + 10c + d) + 1000a \cdot d + d(100b + 10c + d) =$ Числовик 2

$= 1000a(1000a + 200b + 20c + 2d) + (100b + 10c + d)^2$

При этом $\overline{abcd}^2 = \overline{abcd} \dots$

т.е. это $a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + c \cdot 10^{n-2} + d \cdot 10^{n-3} + \dots$

тогда $a \cdot 1000(1000a + 200b + 20c + 2d) = a \cdot 10^n$

т.к. $a \in \mathbb{N}$ можно сократить на $1000a$,

$2000a + 200b + 20c + 2d - 1000a = 10^{n-3}$

$2\overline{abcd} - 1000a = 10^{n-3}$

значит $\overline{abcd} : 1000$

т.е. $b=c=d=0$.

Если $a=1$, то $1000^2 = \underline{1000000}$ - подходит

Если $a=2$, то $2000^2 = \underline{4000000}$ - не подх.

Если $a=3$, то $3000^2 = \underline{9000000}$ - не подх.

Если $a=4$, то $4000^2 = \underline{16000000}$ - не подх.

Если $a=5$, то $5000^2 = \underline{25000000}$ - не подх.

Если $a=6$, то $6000^2 = \underline{36000000}$ - не подх.

Если $a=7$, то $7000^2 = \underline{49000000}$ - не подх.

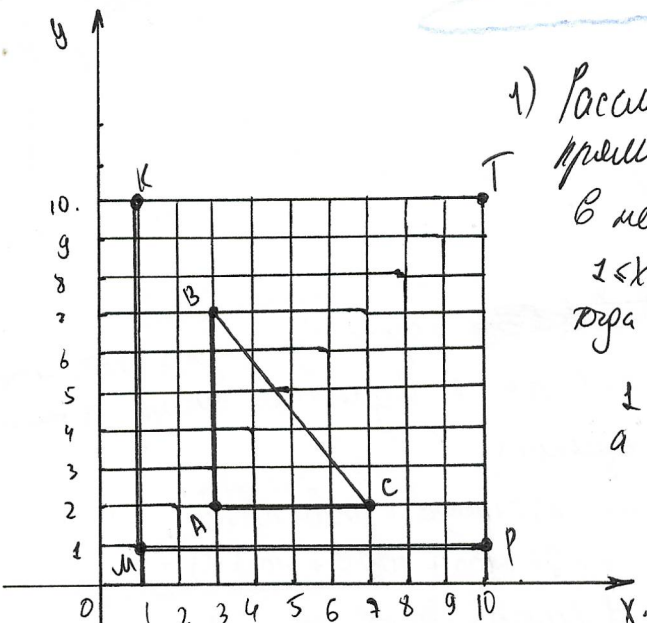
Если $a=8$, то $8000^2 = \underline{64000000}$ - не подх.

Если $a=9$, то $9000^2 = \underline{81000000}$ - не подх.

Итого получается т.е. такое число одно и это 1000.

Ответ: 1000.

№3.



1) Рассмотрим подходящий нам крестообразный граф. ABC.

В нем у вершины A координаты $1 \leq x \leq 10$ и $1 \leq y \leq 10$, где $x \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{N}$ тогда у вершин B и C будут коорд.

$1 \leq x_1 \leq 10$ где $x_1 \neq x$, $x_1 \in \mathbb{N}$ и y . а у т.к. B и C находятся, x и $y_1 \leq 10$, где $y_1 \neq y$, $y_1 \in \mathbb{N}$.

2) Кол-во способов выбрать т. A это кол-во узлов в графе. МКТР, т.е. 100.

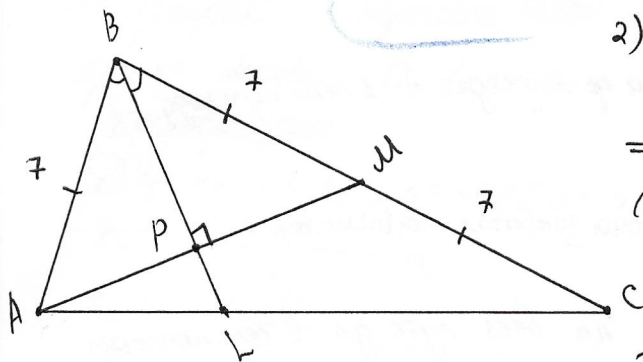
77-44-17-86
(12.2)

Чистовик 3

кол-во способов выбрать г. С, когда уже выбрали А это $10 - 1 = 9$.
 кол-во способов выбрать г. В, когда уже выбрали А это $10 - 1 = 9$.
 т.е. всего тригольников (подх. по условию это $100 \cdot 9 \cdot 9 = 8100$.
 Ответ: 8100.

№ 4.

Решение:



1) Пусть $BL \cap AM = P$

2) $\triangle ABM$: BP - бисс. $\angle A \hat{=} \angle M$.
 $BP \perp AM \Rightarrow BP$ - выс. } \Rightarrow

$\Rightarrow \triangle ABM$ - р/б с осн. AM

(по признаку р/б треуг. по совп.

бисс. и выс. , пров. к основанию)

тогда по отр. р/б треуг. $AB = BM$.

т.е. $AB = BM$ (бисс. = 7.
 (по отр. межд. треуг.))

3) $BC \hat{=} BM + MC = 7 + 7 = 14$.
 по акс. измер. отр.

4) По неравенству треуг.: ~~BC~~ $BC - AB < AC < AB + BC$, т.е.

$$14 - 7 < AC < 14 + 7$$

$$7 < AC < 21$$

5) BL - бисс. $\Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

т.е. $AC = 3AL$. т.к. AC - целое число, то оно делится на 3.

$\Rightarrow AC = \{9; 12; 15; 18\}$

6) т.е. возможные значения периметра:

1. $7 + 14 + 9 = 21 + 9 = 30$.

2. $21 + 12 = 33$

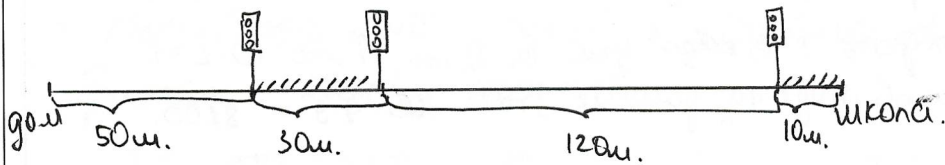
3. $21 + 15 = 36$

4. $21 + 18 = 39$.

Ответ: 30; 33; 36; 39.

№5.

Чистовик 4



Решение:

1). Первый светофор загорается красным для пешеходов на 30с, значит ей надо ~~проехать~~ проехать 50м не быстрее 30с, т.е. ее скорость не больше $\frac{50\text{м}}{30\text{с}} = 1\frac{2}{3}\text{ м/с}$.

2) Если ее скорость $1\frac{2}{3}\text{ м/с}$, то

1. первые 50м: $\frac{50}{1\frac{2}{3}} = 30\text{с}$, она не успеет к 1 пеш. переходу как только загорится зеленый.

2. первый пеш. переход: $\frac{30}{\frac{5}{3}} = 18\text{с}$ она затратит на 1 пеш. пер.

3. 120м: $\frac{120\text{м}}{\frac{5}{3}\text{ м/с}} = 72\text{с}$, т.е. на весь путь до II пеш. перехода она потратит $30+18+72 = 120\text{с}$.

Значит когда ей оставалось ехать 110с на II пеш. пер. загор. красный

$110-50 = 60\text{с}$ на II пеш. пер. загор. зел.

$60-50 = 10\text{с}$ на III пеш. пер. загор. кр.

Значит ей придется поехать на красный.

Т.к. скорость увеличить мы не можем мы должны ее уменьшить так чтобы она прибыла ко II пеш. переходу.

Включению зел. света, т.е. на $50-10 = 40\text{с}$ позже, чем ее скорость когда она ехала со скоростью $1\frac{2}{3}\text{ м/с}$.

Значит на весь путь она потратит $120+40 = 160\text{с}$.
(до III пеш. перехода.)

Т.е. ее скорость будет составлять

$$\frac{50+30+120}{160} = \frac{200}{160} = \frac{5}{4}\text{ м/с} = 1\frac{1}{4}\text{ м/с}$$

Проверим:

1. Первые 50м: $\frac{50}{\frac{5}{4}} = 40\text{с}$, приедет когда зел. горит уже 10с.

2. пер. пер. (I): $\frac{30}{\frac{5}{4}} = 24\text{с}$, она успеет проехать, не попав на красный.

3. 120м: $\frac{120}{\frac{5}{4}} = 96\text{с}$, как мы уже посчитали она ко II пеш. пер. приедет именно тогда, когда зел. включится, т.е. ~~максимум~~ ее макс. скорость составляет $1\frac{1}{4}\text{ м/с}$. **Ответ: $1\frac{1}{4}\text{ м/с}$.**

№6.

$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0.$$

$a \neq 0$
Решение:

① $a > 0$, тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0 \cdot a^3 > 0 \\ a > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x^2 + 2ax + a^2 \leq 0 \\ a > 0 \end{array} \right.$$

квар.
рассм. функцию $y = -3x^2 + 2ax + a^2$

ей график - парабола, ветви которой направлены вниз, т.к. коэффициент при x^2 меньше 0 ($-3 < 0$)

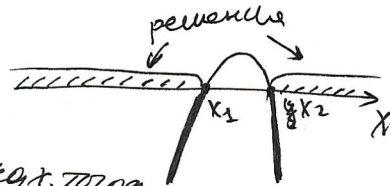
~~все случаи~~

$D = 4a^2 - 4 \cdot (-3) \cdot a^2 = 16a^2 > 0$, 2 разл. рец. x_1 и x_2 : $x_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{16a^2}}{-6}$

$$x_1 = \frac{-2a - 4a}{-6} = a$$

$$x_2 = \frac{-2a + 4a}{-6} = \frac{2a}{-6} = -\frac{1}{3}a.$$

т.е. график пересекает ось Ox в двух точках, тогда множеством решений будут не «отрезок», а два пучка, т.е. $a > 0$ нам не подходит



② $a < 0$, тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0 \cdot a^3 < 0 \\ a < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x^2 + 2ax + a^2 \geq 0 \\ a < 0 \end{array} \right.$$

квар.
рассм. функцию $y_1 = -3x^2 + 2ax + a^2$

ей график - парабола, ветви которой направлены вниз, т.к. коэффициент при x^2 меньше 0 ($-3 < 0$)

$D = 4a^2 - 4(-3)a^2 = 16a^2 > 0$, 2 разл. рец. x_1 и x_2 , $x_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{16a^2}}{-6}$

$$x_1 = a$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}a.$$

В данном случае

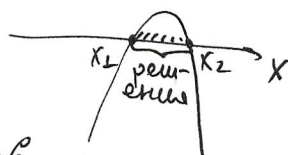
множеством реш. является отрезок.

Т.к. $a < 0$, то

$a < -\frac{1}{3}a$, т.е. длина отрезка x_1, x_2 это

$-\frac{1}{3}a - a$. Т.к. по усл. это 2026, то решим ур-е $-\frac{1}{3}a - a = 2026$:
 $-\frac{1}{3}a - a = 2026 \Leftrightarrow -4a = 6078 \Leftrightarrow a = -1519,5$.

Ответ: $-1519,5$.



Черновик.

№6.

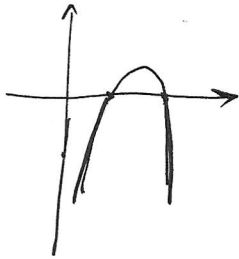
$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0$$

1) $a > 0$, тогда

$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0 \quad | \cdot a^3 > 0.$$

$$-3x^2 + 2xa + a^2 \leq 0.$$

График - парабола, ветви вниз, раз ≤ 0 , то реш. будет не отр., а 2 нуля.



2) $a < 0$, тогда

$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0 \quad | \cdot a^3 < 0$$

$$-3x^2 + 2ax + a^2 \geq 0.$$

График, парабола, ветви вниз, раз ≥ 0 , то реш. отрезок между нулями

$$D = 4a^2 - 4 \cdot (-3) \cdot a^2 = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2 > 0, \text{ урезн. реш.}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2a \pm 4a}{-6} =$$

$$x_1 = \frac{-2a + 4a}{-6} = \frac{2a}{-6} = -\frac{1}{3}a$$

$$x_2 = \frac{-2a - 4a}{-6} = \frac{-6a}{-6} = a.$$

$a < 0$, значит $-\frac{1}{3}a > a$, т.е. отрезок это $-\frac{1}{3}a - a = \text{что}$

$$-a - 3a = 6078 \Rightarrow a = -$$

$$\begin{array}{r} 2026 \\ 3 \\ \hline 6078 \end{array}$$

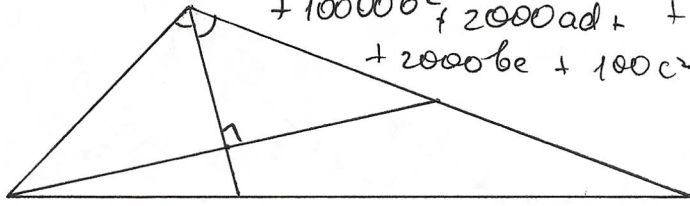
$$\begin{array}{r} 6078 \\ 4 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 7 \\ 4 \\ \hline 38 \\ 36 \\ \hline 2 \end{array}$$

Черновик

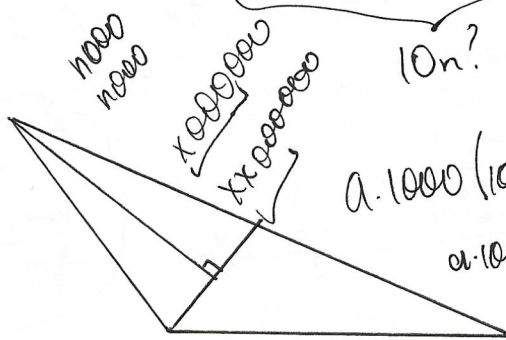
$$(1000a + 100b + 10c + d)(1000a + 100b + 10c + d) =$$

$$= 1000000a^2 + 1000000ba + 100000ca + 1000ad + 1000000ab + 100000b^2 + 10000bc + 1000bd +$$

$$1000000a^2 + 2000000ab + 200000ca + 10000ca + 10000bc + 1000c^2 + 10cd + 100000b^2 + 20000ad + 10000da + 1000bd + 10cd + d^2 + 20000bc + 100c^2 + 2000bd + 2000d^2 =$$



$$= a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + c \cdot 10^{n-2} + d \cdot 10^{n-3} + \dots$$



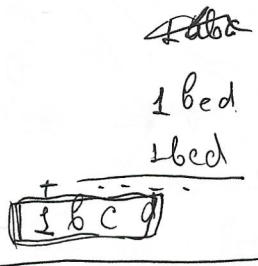
$$a \cdot 10000 (1000a + 100b + 10c + d)$$

$$a \cdot 10000 (2abcd - 1000a)$$

$$(1000 + 100b + 10c + d) \cdot (abcd = 10^n)$$

т.е. $abcd = 10000$.

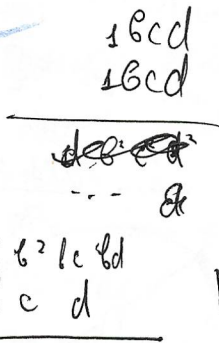
если



если первая не 1, то тогда первая цифра в произв. не будет совп. с первой.

знают 1 - 1.

при этом, если остальные это числа больше 0, то



тогда получим те же, там нуль, тогда $b=0$ или $b+b=0$

$$[b+b=0]$$

$$[b+b=10]$$

$b=10$ - не возм. $b=0$ чк или при $b=10$ тогда 10

получаются не те числа, которые

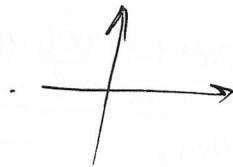
т.е. единств. и наим. возм. это 1000

$$1000 \cdot 1000 = 1000000$$

№6, Черновик

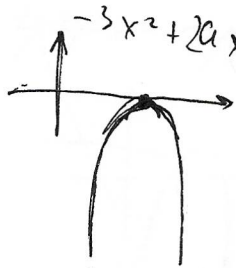
$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0.$$

$$-\frac{3}{a^3}x^2 + \frac{2}{a^2}x + \frac{1}{a} \leq 0.$$



Если $a > 0$, тогда

$$-\frac{3}{a^3}x^2 + \frac{2}{a^2}x + \frac{1}{a} \leq 0 \quad | \cdot a^3 > 0$$



$$D = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-2a \pm 4a}{-6} =$$

$$x_1 = \frac{-2a - 4a}{-6} = a$$

$$x_2 = \frac{-2a + 4a}{-6} = \frac{2a}{-6} = -\frac{1}{3}a.$$

Т.к. м.в. 1 т. пересек с Ox , то

$D = 0$
т.е. $a = 0$
нет, реш при $a > 0$

Если $a < 0$, тогда

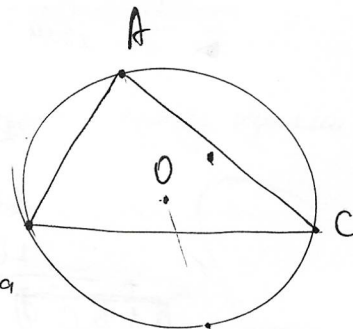
$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0 \quad | \cdot a^3 < 0.$$

$$a^2 + 2xa - 3x^2 \geq 0.$$

$$-3x^2 + 2ax + a^2 \geq 0.$$

$$D = 4a^2 - 4 \cdot (-3) \cdot a^2 = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{16a^2}}{-6} = \begin{matrix} 1) \frac{-2a + 4a}{-6} = \frac{2a}{-6} = -\frac{1}{3}a \\ 2) \frac{-2a - 4a}{-6} = \frac{-6a}{-6} = a. \end{matrix}$$

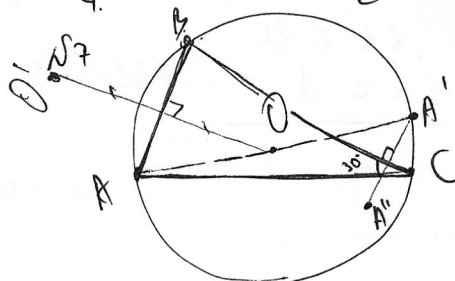
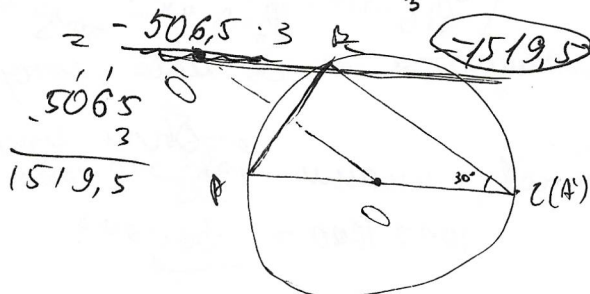


$a < 0$, т.е. скачала a , потом $-\frac{1}{3}a$.

тогда это отрезок решений x :

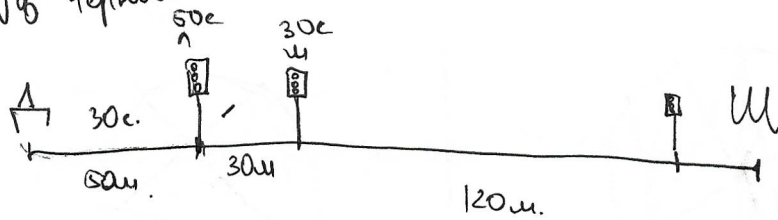
$$-\frac{1}{3}a - a = -\frac{1}{3}a = 2026.$$

$$a = -\frac{2026 \cdot 3}{\frac{4}{3}} = -\frac{2026 \cdot 3}{4} = -\frac{1013 \cdot 3}{2}$$



дешифр

№15 Черновик.



$$50 + 30 + 120 + 10 = 210$$

$$= 130 + 80 = 210$$

вызнает

1 загорается красным для пешеходов, значит ей надо ехать

$$\frac{1}{4} \text{ м/с}$$

$$x \leq \frac{50}{30} = 1\frac{2}{3} \text{ м/с}$$

$$x \geq \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\frac{3}{5} \leq x \leq 1\frac{2}{3} \rightarrow 1 \leq x \leq 1\frac{2}{3}$$

Если её скорость $1\frac{2}{3}$ м/с.
 первые 50м: $\frac{50}{\frac{5}{3}} = 30c$, ~~это~~ в момент, когда она подвернет к пеш. переходу ~~он~~ он переключится на зеленый.

$$\frac{30c}{1\frac{2}{3}} = \frac{30 \cdot 3}{5} = 6 \cdot 3 = 18c \text{ на первом пешеходном переходе.}$$

48c она потратила на 80м.

~~Всего~~

$$\frac{120}{1\frac{2}{3}} = \frac{120 \cdot 3}{5} = 72c$$

- 160c
- 150c кр
- 100c з
- 50 кр
- 3

$$72 + 48 = 80 + 40 = 120c \text{ она всего потратила}$$

- 110c кр
- 60c з
- 10c кр

Мужик такая скорость, значит она весь путь проехала быстрее, чем за $120 + 40 = 160c$.

$$\frac{160}{160} \cdot \frac{200}{160} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

Надо уменьшить скорость так, чтобы она проехала на зел.

1 м/с

$\frac{50}{1} = 50c$ на первые 50м.
 уже 20c как горит зел.

$\frac{30}{1} = 30c$ она проезжает ровно и пер. на красный.

- 80+120 = 200c.
- 190c - красный
- 140c - зел.
- 90c - красный
- 40c - зел.

на последние 10c она успеет.

быстрее, чем за 120c, тогда весь путь она проедет < 200c, т.е. 200-x.

$$200 - x - 10 = 190 - x - \text{кр.}$$

$$140 - x - \text{зел.}$$

$$90 - x - \text{кр.}$$

$$40 - x - \text{зел.}$$

значит уже ост. 10+к на пеш. переход

$1\frac{1}{4}$ м/с

1) первые 50м: $\frac{50 \cdot 4}{5} = 40c$ уже 10c как зеленый.

2) $\frac{30}{1\frac{1}{4}} = \frac{30 \cdot 4}{5} = 6 \cdot 4 = 24c$

3) $\frac{120 \cdot 4}{5} = 24 \cdot 4 = 80 + 16 = 96c$

Если она будет ехать быстрее, то первые 50м она проедет меньше чем за 50c, т.е. уже будет больше 30c чтобы проехать светофор, она проедет быстрее 30c, 120м она проедет

