909098 710009

90-90-98-71

(129.13)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 4

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносова
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Эдни-Горлеевой Дари Лавровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«23» марта 2026 года

Подпись участника

черновик

№1. $\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$, $\cos x \geq 0$, $\sin x \neq 0$

$ctg^2x = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} \Rightarrow \sqrt{6\left(1-\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right)} = 4\cos x$

I $\cos x = t \geq 0$, $t \neq \pm 1$

$\sqrt{6\left(1-\frac{t^2}{1-t^2}\right)} = 4t$

$1-\frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1-2t^2}{1-t^2}$

$\sqrt{6\cdot\frac{1-2t^2}{1-t^2}} = 4t$

$6\cdot\frac{1-2t^2}{1-t^2} = 16t^2$

$\frac{6-12t^2-16t^2(1-t^2)}{1-t^2} = 0$

$6-12t^2-16t^2\cancel{(1}+16\cdot t^4 = 0$

$16t^4-28t^2+6=0$

$8\cdot t^4-14\cdot t^2+3=0$

$t^2 = u$

$8u^2-14u+3=0$

$D = 14^2-4\cdot 8\cdot 3 = 14^2-4\cdot 24 = 100$

$u_{1,2} = \frac{14\pm 10}{16} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{2}$; $u_2 = \frac{14-10}{16} = \frac{1}{4}$

$u = \frac{3}{2}$ — не подход., т.к. $\cos x = t \leq 1$

$u = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \pm\frac{1}{2}$; $t = -\frac{1}{2}$ — не подходит,

т.к. $t \geq 0$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in z \\ x = -\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in z \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3}+2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3}+2\pi k \end{array}\right.$

№5. ∡ A – угол квадрата, в нем угол м/у параболами = 0 ⟹ их касательные совпадают. Картинка симметрична ⟹ ⟹ их касательная — биссектриса ∠BAB.

∃ O – вершина параболы и начала координат, парабола задается $y = Cx^2$ ⟹ тогда $y' = x_A = tg\,45° = 2 \cdot C \cdot x_A$

$x_A = \frac{1}{2C} \Rightarrow y_A = C\left(\frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C}$

Аналогично для других парабол ⟹ ⟹ $AB = BC = CD = DA = \frac{1}{C}$

M – сер. квадрата (и центр. впис. окр.)

$M: \left(0; -\frac{1}{4C}\right)$

в точке O производная параболы = 0 ⟹ эта точка касания ⟹ $r = \frac{1}{4C}$

$AB + BC + CD + DA = \frac{4}{C} = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4} \Rightarrow r = 1$

$C = 4 \Rightarrow r = \frac{1}{16}$

чистовик 4.3

$-1 \le \sin k\pi x \le 1$, при этом экстремумы будут касаться границ для графиков это происходит в $x = \frac{2n+1}{22}$, $n \in Z$, т.е. $x = \frac{2n+1}{26}$, $x = \frac{2n+1}{34}$, $n \in Z$

и всего точек 11, 13, 17 соответственно при этом единственное пересечение в $x = \frac{1}{2}$ для $k = 13; 17$ $(y = 1) \Rightarrow$

Всего точек $11 + 13 + 17 - 1 = 40$

и областей $47 + 40 = 87$

Ответ: 87

строим $y = \sin(17\pi x)$ чистовик 4.2.

$\sin(11\pi x) - \sin(17\pi x) = 0$

$2 \cdot \cos(14\pi x) \cdot \sin(3\pi x) = 0$

$\sin(3\pi x) = 0$ — $x = \frac{1}{3}; \frac{2}{3}$

$\cos(14\pi x) = 0$ — 14 точек (пересечений нет)

$14 + 2 = 16$

$\sin(13\pi x) - \sin(17\pi x) = 0$

$2 \cdot \cos(15\pi x) \cdot \sin(2\pi x) = 0$

$\cos(15\pi x)$ дает 15 точек

$\sin(2\pi x) = 0$ дает $x = \frac{1}{2}$, но косинус $\cos$

$(15\pi \cdot \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow$ всего точек 15

И проверим ~~грубые~~ тройные пересечения:

$\sin(11\pi x) = \sin(13\pi x) = \sin(17\pi x)$.

$$\begin{cases} \sin(11\pi x) = \sin(13\pi x) — x = \frac{2k+1}{24}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin(13\pi x) = \sin(17\pi x) — x = \frac{2m+1}{30}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\frac{2k+1}{24} = \frac{2m+1}{30}$$

$60k - 48m = -6$

$5k - 4m = -\frac{1}{2}$

$(5k - 4m) \in \mathbb{Z}, \ -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$!!!

Тогда всего областей $12 + 16 + 15 + 3 + 1 =$ $= 47$.

Но также надо учитывать касание границ.

Когда кривая касается верхней границы, она разбивает себя на 2 части

№4. $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ $y = \sin k\pi x$ чистовик 4.1

~~Докажем вс~~ Докажем вспомогательное утверждение: I ~~у нас~~ у нас есть кривая на плоскости, и новая кривая пересечет ~~уже~~ уже проведенную в x точках.

Тогда количество областей увеличится на $x+1$.

Точки пересечения разбивают новую кривую на $x+1$ ~~точек~~ часть, причем каждая такая часть не имеет пересечений с уже провед. кривыми, поэтому лежит в 1 области. проведение 1 такой части увеличивает кол-во областей на 1, т.к. делит область на 2.

Тогда все $(x+1)$ частей увеличит количество областей на $(x+1)$. По очереди будем строить графики $y=\sin(11\pi x)$, $y=\sin(13\pi x)$, $y=\sin(17\pi x)$

Заметим, все графики идут из $(0;0)$ в $(1;0)$.

$y=\sin(11x)$ разделит полоску на 2 области. Строим $y=\sin(13\pi x)$:

$\sin(11\pi x) = \sin(13\pi x)$

$\sin(11\pi x) - \sin(13\pi x) = 0$

$2\cos(13\pi x) \cdot \sin(-\pi x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} 12\pi x = 0 \\ \sin(-\pi x) = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 12\pi x = 0 \\ -\pi x = 0 \end{array}\right.$

$-\pi x = 0$ на $0 \le x \le 1$ дает $x = 0, 1$, ~~$\cos 13\pi x$~~

~~$x=0$~~ дает 12 точек, но 0,1 — общ. точка

всего 12 пересечений, $12+1=13$

Обл. ~~точка~~ добавится. Строим $y=\sin(17\pi x)$

$11\pi x$

№3. F – множ-во точек в простр-ве чистовик

1) 2 катета $\parallel$ 2 из 3х осей, эти случаи симметричны и не пересекаются таких 3 варианта

а) $\measuredangle$ случай, когда касательные $\parallel Ox, Oy$

$\exists$ AC и BC — катеты,

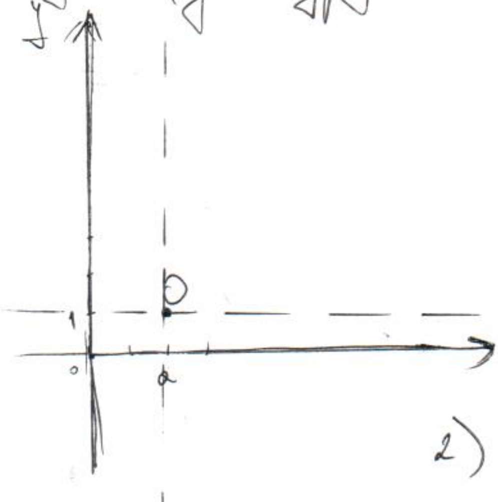
α – (Ox, Oy) — плоскость

не умаляя общности.

$\left.\begin{matrix} AC \parallel Ox \Rightarrow AC \parallel \alpha \\ BC \parallel Oy \Rightarrow BC \parallel \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ABC) \parallel \alpha \Rightarrow$ все точки имеют одинак. коо-ту z

$z: \{-3; -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ — семь вариантов

3) $\measuredangle$ 1 случай (для других аналогично)



1. вычислим координаты C: тех точек

$7 \cdot 7 = 49$

Для каждой точки C есть:

1) 6 вариантов для A, чтобы $A_x = C_x$

2) 6 вариантов для B, чтобы $C_y = B_y$

Итого в первом случае $49 \cdot 6 \cdot 6$ треугольник., а в тех случ. $7 \cdot 3$.

$7 \cdot 3 \cdot 49 \cdot 6 \cdot 6 = 37044$

Ответ: 37044

10	810	9
11	891	18 } др. случ.
12	972	18

$\ast$ $a+b+c=18$, тогда $\overline{abc}=162\cdot k \Rightarrow$
$\Rightarrow k\in\{1,2,3,4,5,6\}$

k	$\overline{abc}$	$a+b+c$
1	162	9 } др. случ.
2	324	9
3	486	18
4	648	18
5	810	9 } др. случ.
6	972	18

$\ast$ $a+b+c=27$, тогда $\overline{abc}=243\cdot k \Rightarrow$ ~~$k\in\{$~~
$k=\{1,2,3,4\}$

k	$\overline{abc}$	$a+b+c$
1	243	9
2	486	18 } первые два случ.
3	729	18
4	972	18

Итого все 3х значные числа из множ-ва
A: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972

$324+486+810=1620$

Ответ: 1620

чистовик
2.2

~~Черновик~~ Чистовик $0 \le x \le 1$ $-1 \le y \le 1$

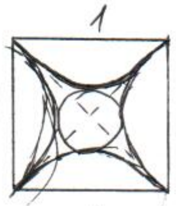
2. 1 $y = \sin \pi k x$

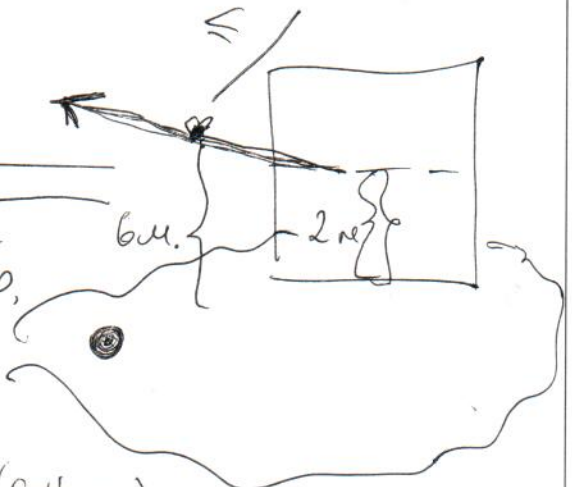
(−1;4) (7,5) $\overline{abc}$

(0;0) (3;0)

A B

(−1;4) (7;5)





пусть $\overline{abc}$ такое 3х значное число,

тогда $\dfrac{\overline{abc}}{a+b+c} = 9k$, где $k \in Z$

$\Rightarrow \overline{abc} = 9k(a+b+c)$.

Это значит, что $\overline{abc}$ кратно 9, поэтому по признаку делимости на 9 $(a+b+c)$ тоже кратно 9.

Максимально возможное ~~сумма~~ сумма цифр 3х значн. числа $9+9+9=27$.

$(a+b+c) \vdots 9$ и $a+b+c \le 27 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=9 \\ a+b+c=18 \\ a+b+c=27 \end{array}\right.$ все возможные варианты,

тогда $a+b+c=9$

$\overline{abc} = 81 \cdot k \Rightarrow k \in \{2; 3, 4, \dots, 11, 12\}$

k	$\overline{abc}$	$a+b+c$
2	162	9
3	243	9
4	324	9
5	405	9
6	486	18
7	567	18
8	648	18
9	729	18

— [illegible] случ.

$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$ черновик $16 \mid \frac{2}{8}$

$6(1-ctg^2x) = 16\cos^2 x$

$6 - 6ctg^2x = 16\cos^2 x$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$6 - 6\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 16\cos^2 x$ $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

$6 - \frac{6\cos^2 x}{\sin^2 x} - 16\cos^2 x = 0$ $\sin^2 x \neq 0$

$6 - \frac{6\cos^2 x}{\sin^2 x} - 16\cos^2 x = 0$

$\cancel{6}\ 3\ 6\sin^2 x - 6\cos^2 x - 16\cos^2 x \sin^2 x = 0$

$\cancel{6\sin^2 x}\ \cancel{6(\sin^2 x - \cos^2 x) - 16\cos^2 x\sin^2 x}$

$6(\sin^2 x - \cos^2 x) - 16\cos x\cos x\sin x\sin x = 0$

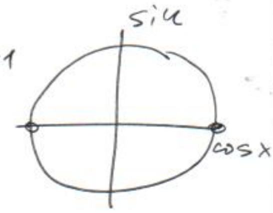
$6(\sin^2 x - \cos^2 x) - 2\cdot 2\cdot 4\cos x\sin x\cdot\cos x\sin x = 0$

$6(1-\cos^2 x - \cos^2 x) - \cancel{2}\cdot 2\sin^2 2x\cdot 4$

$6(1-2\cos^2 x) - 4\sin^2 2x = 0$ $\cos 2$

$2\sin^2 x - 1$

$6\cos 2x - 4\sin^2 2x = 0$



$2(3\cos 2x - 2\sin^2 2x) = 0$

$2(3\cdot(2\sin^2 x - 1) - 2\sin^2 2x) = 0$

$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$ $\sin^2 x \neq 0$

$x \neq \pi k$

$6(1-ctg^2x) = 16\cos^2 x$

$6 - 6ctg^2x = 16\cos^2 x$ $\cos^2 x = \frac{3}{14}$

$6 - 6\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 16\cos^2 x = 0$ $\cos x = \pm\sqrt{\frac{3}{14}}$

$6\sin^2 x - 6\cos^2 x - 16\cos^2 x = 0$ $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{14}}\right) \\ x = \arcsin\left(-\sqrt{\frac{3}{14}}\right)\end{array}\right.$

$2(3\sin^2 x - 3\cos^2 x - 8\cos^2 x) = 0$

$3\sin^2 x - 3\cos^2 x - 8\cos^2 x = 0$

$3\sin^2 x - 11\cos^2 x = 0$

$3(1-\cos^2 x) - 11\cos^2 x = 0$ $\cos x = \pm\sqrt{\frac{3}{14}}$

$3 - 3\cos^2 x - 11\cos^2 x = 0$

$3 - 14\cos^2 x = 0$

$-14\cos^2 x = -3$ $\cos^2 x = \frac{3}{14}$