Выход Возвращение
13:28 — 13:30

0 130315 810008

13-03-15-81
(127.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Юрпик Максима Павловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

100(сто)

13-03-15-81
(27.1)

Черновик

$(1000+a)^2 = 1000000 + 2000a + a^2$

$1000 + 2a - 1 > 1000 + a$

$a > 1$

$1003^2 = 1000000 + 6000 + 9 = 1006009$

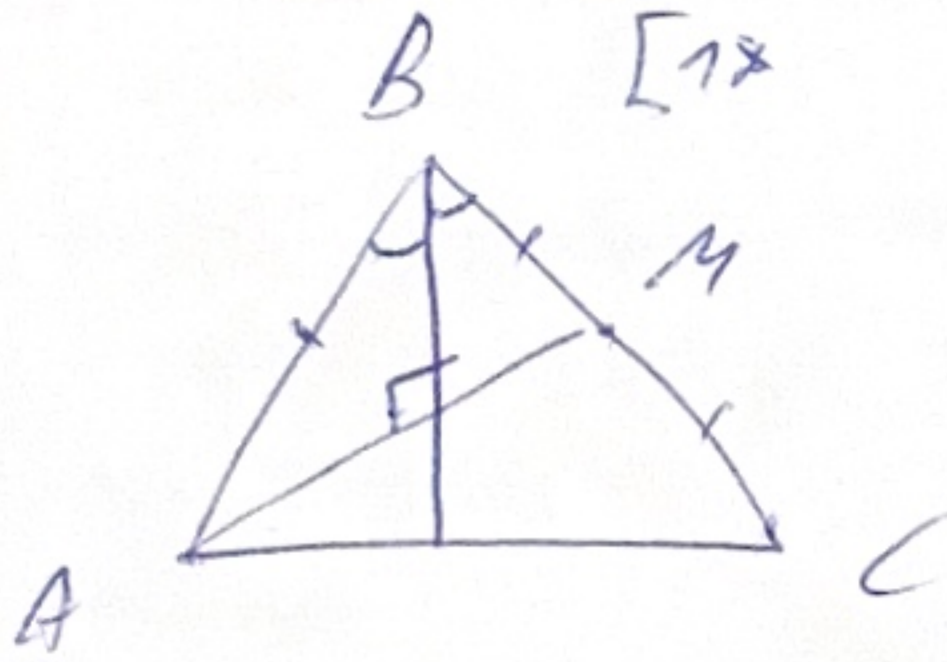
$1001^2 = 1002001$

$(1000a + 100b + 10c + d)^2 : 10^4 > 1000a + 100b + 10c + d$

$\cancel{1000000}a$

$1000a + 100b + 10c + d > 10^4$

$[1x \quad \frac{50}{30}]$



$8 - 20$

$14^2 + 7^2 - 7 \cdot 14 \cdot 2 = \frac{200м}{V} - 10 - 50$

$= 196 + 49 - \cancel{7 \cdot 28}\ 49 \cdot 4 = \quad \frac{200м}{V} = 160$

$= 196 - 147 = 49 = 7^2 \quad V = \frac{5}{4}$

$\frac{200}{50} \cdot 30 = 120$

160

$\cancel{a^3 + 2xa}$

$a^2 + 2ax - 3x^2 \leq 0$

$120 - 10 - 50 - 50 - 50 =$

$D_1 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = $

$x = \frac{-a \pm \sqrt{2a}}{3}$

$\left| \frac{-a - 2a}{3} - \frac{-a + 2a}{3} \right| = 2026$

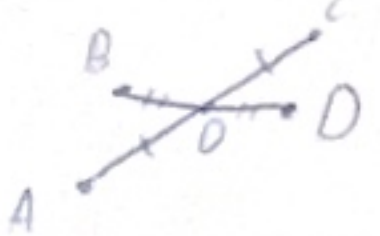
$\frac{-a + 2a + 3a}{3} = 2026 \quad \frac{4a}{3} = \frac{2026 \cdot 3}{4}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

№1

Рассмотрим те две хорды, которые делятся попо-
лам ~~сво~~ своей точкой пересечения.



1) $\angle BOC = \angle AOD$ - вертик. углы
$\triangle BOC = \triangle DOA$ (2 стороны и угол между)
$\angle OAD = \angle OCB$ => $BC \parallel AD$

2) $\angle BOA = \angle COD$
$\triangle BOA = \triangle DOC$ => $\angle OAB = \angle OCD$ => $BA \parallel CD$

3) Получается $ABCD$ - параллелограм, причем вписанный => противолежащие углы равны, а в сумме $180°$ =>
$ABCD$ - прямоугольник; $\angle BAD = 90°$ => BD - диаметр, $\angle ABC = 90°$ => AC - диаметр; диаметры пересека-
ются в центре окружности => O - центр окружности
Третья хорда пересекает точку O => она то-
же диаметр => её длина равна 2 двум радиусам
=> она равна $5 \cdot 2 = 10$

+

Ответ: 10

13-03-15-81
(127.1)

№2

Чистовик

~~Рассмотрим такие n, что $n^2 < 10^8$~~

Заметим, что при $n = 1000$ $n^2 = \underbrace{1000}_{\text{число } n}000$

$n = 1000$ подходит $a \in N$

Рассмотрим такие a, что $(1000+a)^2 < 10^7$

В таком случае, чтоб получить ~~первые 4~~ число, со-
стоящее из первых 4 цифр числа $(1000+a)^2$, нужно $(1000+a)^2$
нацело поделить на 1000 (округлить вниз)

$\lfloor (1000+a)^2 : 1000 \rfloor \geq 1000+a$

$\lfloor (1000000 + 2000a + a^2) : 1000 \rfloor > 1000 + a$

$\lfloor (1000000 + 2000a + a^2) : 1000 \rfloor \geq 1000 + 2a > 1000 + a$

Получается, что при $n \geq 1000$ и $n^2 < 10^7$ нам
подходит только $n = 1000$

Рассмотрим максимальный n, то есть $n = 9999$
тогда ~~$\lfloor \log$~~ n^2 ~~≥ 7~~, ~~то есть~~ состоит из 8 цифр; полу-
чается n^2 состоит или из 7 цифр (такой вариант уже
разобран) или из 8.

Тогда, чтоб получить ~~последние первые~~ число состо-
ящее из первых 4 цифр числа n^2, где $n^2 \geq 10^7$, нужно
поделить нацело на 10^4.

~~$\lfloor n^2 : 10^4 \rfloor = n$~~

$\lfloor n^2 : 10^4 \rfloor \leq n^2 : 10^4 < n$

$\Downarrow$

$n^2 < 10^4 n$

$n < 10^4$, что ~~очевидно~~ верно, т.к. n сос-
тоит из 4 цифр

$\lfloor n^2 : 10^4 \rfloor < n$

Получается, что нам подошел только $n = 1000$

Ответ: 1000

Чистовик

№3

Рассмотрим, на скольким способами мы можем выбрать 2 различные точки не лежащие на 1 вертикальной или горизонтальной линии. Пусть мы выбрали 1 точку с координатами $(x;y)$, тогда существует $10^2-10-9=81$ вариант выбрать вторую точку таким образом (чтоб не лежали на 1 вертикальной или горизонтальной прямой). Кол-во вариантов выбрать первую точку $=100$, вторую $=81$

Всего кол-во способов выбрать 2 такие точки

$\frac{81\cdot 100}{2}=4050$

делим на 2 так как варианты где точки имели координаты $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ и $(x_2;y_2)$, $(x_1;y_1)$ я посчитал за разные.

Выбрав 2 такие точки мы можем построить 2 различных прямоугольных треугольника

$4050\cdot 2=8100$

Ответ: 8100

P.S. точек всего 10^2, т.к. координат y всего 10 и x тоже 10

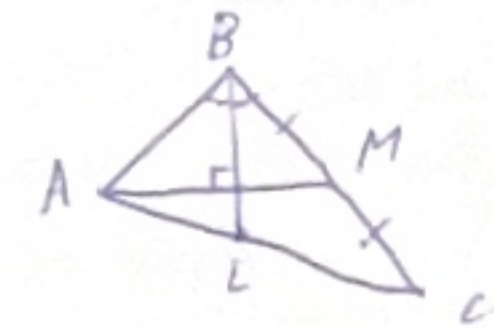
13-03-15-81

(127.1)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№4

Чистовик



Дано: $\triangle ABC$, AM - медиана, BL биссектр

$AM \perp BL$, $\triangle ABC$ - неравноб.

Заметим, что $\triangle ABM$ равнобедренный,

Пусть $AM \cap BL = O$; $\angle AOB = \angle MOB$, $\angle ABL = \angle MBL$, ~~BO~~ BO - общ. сторона

$AB = BM = MC = 7$

Давайте будем представлять различные ситуации делая рисунок следующим образом: строя п/т равнобедренный ~~$\triangle ABC$~~ $\triangle ABM$, $AB=BM$; продлевая BM за точку M до точки C, так что $BM=MC$, соединив C с A

Представим, что $\angle ABC$ стремится к 0°, тогда ~~точка A должна будет совпасть с M~~ во посчитаем длину стороны AC через теорему косинусов

~~AC~~ $\lim\limits_{\angle ABC \to 0}\left(\sqrt{AB^2+BC^2-2\cos\angle ABC\cdot AB\cdot BC}\right)=7$, заметим, что

чем больше $\angle ABC$ тем больше AC

Пусть $\angle ABC \to 180^\circ$, тогда

$\lim\limits_{\angle ABC \to 180^\circ}\left(\sqrt{AB^2+BC^2-2\cos\angle ABC\cdot AB\cdot BC}\right)=21$

Получается $AC \in (7;21)$, ~~причем $AC \neq 14$~~, но $AC \in N$

$AC \neq 14$ т.к. $BC=14$, а $\triangle ABC$ неравнобедр. $\Rightarrow$

AC ~~принимает~~ натуральный может быть только если равен 8, 9, 10..., 13, 15, 16, ... 19, 20

$AB+BC=14+7=21$

Периметр может быть равен: 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41

Ответ: 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№6 Чистовик

$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leqslant 0$$

$$\frac{a^2 + 2xa - 3x^2}{a^3} \leqslant 0$$

Найдём такие a, что $3x^2 - 2xa - a^2 = 0$ имеет 2 корня, модуль разницы которых равен 2026

$D_1 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$ (формула $D_1 = k^2 - ac$, $k = \frac{b}{2}$, $x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$)

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{D_1}}{3} = \frac{a \pm 2a}{3}$$

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{a + 2a}{3} - \frac{a - 2a}{3}\right| = \left|\frac{4a}{3}\right| = 2026$$

$$\frac{4|a|}{3} = 2026$$

$$|a| = \frac{2026 \cdot 3}{4} = 506{,}5 \cdot 3 = 1519{,}5$$

Пусть $a = 1519{,}5 = \frac{2026 \cdot 3}{4}$, тогда

$$x_1 = \frac{3a}{3} = \frac{2026 \cdot 3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-a}{3} = -\frac{2026}{4}$$

$$\frac{a^2 + 2xa - 3x^2}{a^3} \leqslant 0 \overset{\text{т.к. } a^3 > 0}{\Longleftrightarrow} a^2 + 2xa - 3x^2 \leqslant 0$$

$-$ $-\frac{2026}{4}$ $+$ $\frac{2026 \cdot 3}{4}$ $-$ x

$$x \in \left(-\infty; -\frac{2026}{4}\right] \cup \left[\frac{2026 \cdot 3}{4}; +\infty\right)$$

Не подходит.

Пусть $a = -1519{,}5$, тогда

$$x_1 = -\frac{2026 \cdot 3}{4}$$

$$x_2 = \frac{2026}{4}$$

$$\frac{a^2 + 2xa - 3x^2}{a^3} \leqslant 0 \overset{\text{т.к. } a^3 < 0}{\Longleftrightarrow} a^2 + 2xa - 3x^2 \geqslant 0$$

$-$ $-\frac{2026 \cdot 3}{4}$ $+$ $\frac{2026}{4}$ $-$ x

$$x \in \left[-\frac{2026 \cdot 3}{4}; \frac{2026}{4}\right]$$

Ответ: $a = -1519{,}5$

№5 Чистовик

Посмотрим какая скорость должна быть у девочки, чтоб она успела на первый зелёный ~~све~~светофор у первой дороги.

Максимальная скорость $\frac{\cancel{150м} + 50м}{30с} = \frac{5м}{3с}$

Минимальная $\frac{(50+30)м}{(30+50)с} = 1м/с$ (успеет перейти)

Посмотрим за сколько времени она сможет доехать до второго светофора с макс скоростью

$$\frac{(30м + 50м + 120м) 3с}{\cancel{5+3}\ 5м} = 120с$$

Теперь посмотрим когда появится первый зелёный ~~следует~~ светофор на второй дороге (на кот. она может проехать)

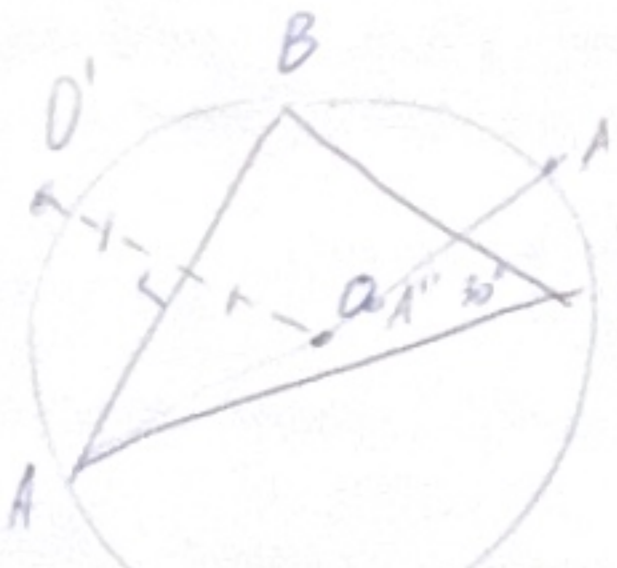
20с зел. | 30с кр. | 30 зел. | 60 кр. | зел.

160с

Пускай ~~двоч~~ девочка за 160с ~~про~~ доехала до 2го светофора (проехала 200м). Она ехала со скоростью $\frac{200м}{160с} = \frac{5м}{4с}$, с такой скоростью она успевает проехать первый светофор и подъехать к зелёному светофору на 2ой дороге. Его она успеет проехать (зайти... 50 секунд на 10 метров, она проедет быстрее)

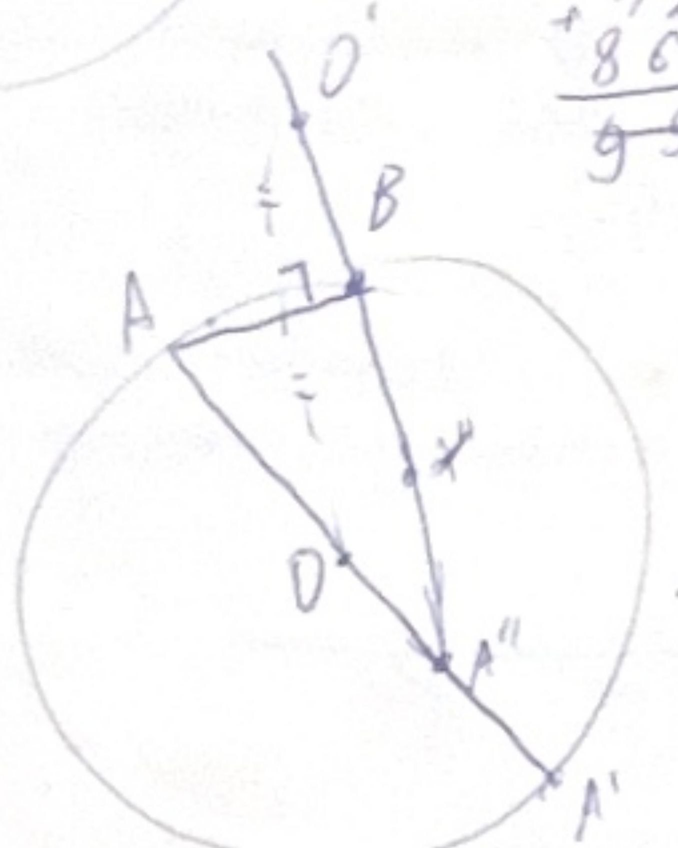
Ответ: 1,25 м/с

Черновик



$$\begin{array}{r} 1296 \\ 864 \\ 144 \\ \hline 24336 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 169 \\ \hline 1296 \\ +864 \\ \hline 9936 \end{array}$$



$9936 \cdot \cancel{666} =$

$$\begin{array}{r} 59\cancel{6} \\ 5\cancel{96} \\ \hline 655776 \end{array}$$

~~64·6 = 384~~

$\frac{5}{14}$

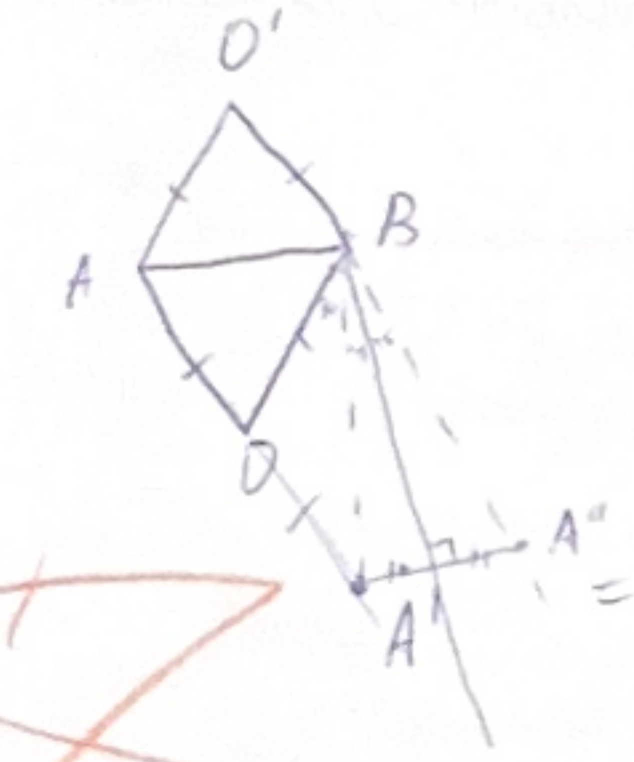
$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 169 \end{array}$$

$12 \cdot 13 = 156$

$156^2 = 24336$

$\left(\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}\right) =$

$= \frac{1}{6} + \frac{4}{21} = \frac{7}{42} + \frac{8}{42} = \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$



$= \frac{1}{63}$

$7 \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5}$

$24336 \cdot 6 = 146016$

$$\begin{array}{r} 146016 \\ 146016 \\ \hline \cancel{1166176} \\ 1606176 \end{array}$$

№8 Чистовик

Со сто процентной вероятностью в какой-то момент окажется это: , откуда вытекают 2 варианта:

и : (Как рисунки можно поворачивать)

шанс $\frac{2}{3}$ т.к. шесть мест, из них 4 подходящие,

шанс $\frac{1}{3}$ т.к. 2 подходящих из 6.

Рассмотрим , из него может получится только одна подходящая фигура: , остальные не подходят, шанс на нее $\frac{2}{7}$

Теперь рассмотрим , из него может получится тоже только одна подходящая фигура: , с шансом $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. ~~Но~~

Получается мы получили фигуру с нуля с шансом $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{21} + \frac{1}{6} = \frac{8}{42} + \frac{7}{42} = \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$

Отсюда мы можем сделать 2 разл. фигуры: (шанс $\frac{1}{9}$) и (шанс $\frac{1}{9}$). После чего следующим ходом мы обязательно получим ; шанс получить из равен $\frac{2}{11}$, из $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Шанс получить из (нуля) вот это $\left(\frac{5}{14} \cdot \frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{11}\right.$,

$\frac{5}{14} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{11} + \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} = \left(\frac{5}{14} \cdot \frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{11} + \frac{1}{5}\right) = \frac{5}{126} \cdot \frac{21}{55} =$

$= \frac{\cancel{1}}{11} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{66}$; ~~шанс получить с нуля равен~~

~~$\frac{1}{66} \cdot \frac{5}{14} = \frac{5}{66 \cdot 14}$~~

Из можно получить ($\frac{1}{12}$) или ($\frac{1}{12}$)

Из → шанс $\frac{1}{13}$

Из → шанс $\frac{1}{12}$

$\times$ Из →

$\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{12}\right) = \frac{25}{12^2 \cdot 13}$

Шанс сделать последнее действие (замкнуть кольцо $= \frac{1}{13}$) =>

Шанс сделать это все равен $\frac{25}{12^2 \cdot 13^2} \cdot \frac{1}{66 \cdot \cancel{14}} = \frac{25}{\cancel{655776}\ \cancel{1166176}\ 1606176}$

Ответ: ~~$\frac{25}{655776}$~~ ~~$\frac{25}{1160176}$~~ $\frac{25}{1606176}$

Чистовик

№ 7

Посмотрим на дугу AB, вписанный угол опирающийся на неё (угол C) равен 30° => $\angle AOB = 60°$ (центральный угол); $\angle OAB = \angle OBA = \frac{180° - \angle AOB}{2} = 60°$ т.к. $AO = OB$

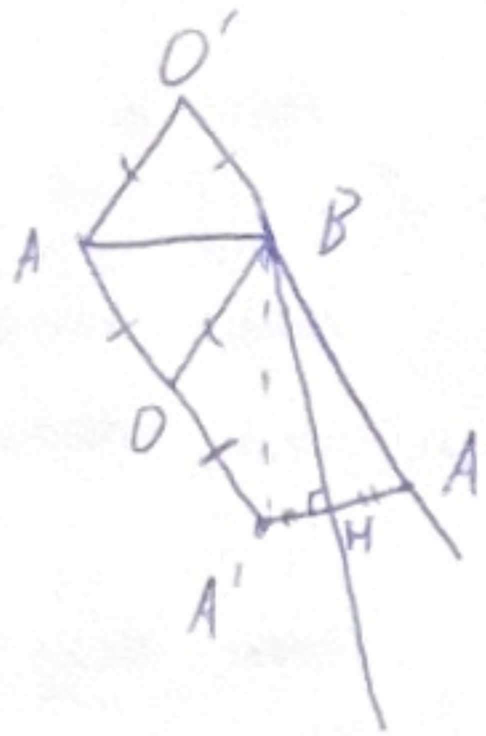
ΔAOB равносторонний; после отражения точки O относительно AB, мы получим точку O' такую, что $\Delta OAB = \Delta O'AB$. Пусть точка, диаметрально расположенная точке A будет A'; $\angle AOA' = 180°$

$AO' = O'B = AO = OB = OA'$

Пусть $BC \cap A'A'' = H$

$A'H = HA''$ и $\angle A'HB = \angle A''HB = 90°$

$\Delta A'HB = \Delta A''HB$



$AO'BO$ ромб => $O'B \parallel AO$ =>

=> $\angle OBA'' = 180° - \angle BOA' =$

$= 180° - (180° - \angle AOB) = \angle AOB = 60°$

$\angle BOA' = 180° - \angle AOB = 120°$

~~$\angle OB$~~ $\angle OBA' = \angle OA'B = \frac{180° - \angle AOB}{2} =$

$= 30°$

$\angle A'BA'' = \angle OBA'' - \angle OBA' = 30°$

$\angle A'BH = \angle A''BH = \angle A'BA'' : 2 = 15°$

$\angle OBH = \angle OBA' + \angle A'BH = 15° + 30° = 45°$

$\angle ABH = \angle ABO + \angle OBH = 45° + 60° = 105°$

$\angle B = \angle ABC = \angle ABH = 105°$

Ответ: 105°

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!