0 316819 260000

31-68-19-26
(128.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс +1 лист Зайц

Место проведения г. Ульяновск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ягудиной Айгуль Марселевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

31-68-19-26
(128.2)

Олимпиада школьников «Ломоносов»

Заключительный этап 2025/26 учебного года по математике

10 классы

Задача 1. Длина, ширина и высота прямой прямоугольной призмы выражаются тремя попарно различными натуральными числами. Сумма числовых значений объема призмы, площади ее полной поверхности и суммы длин всех ее ребер равна 2026. Найдите наименьшее возможное значение объема такой призмы.

Задача 2. Дан клетчатый квадрат 101×101 с занумерованными клетками. Из него нужно вырезать клетчатый прямоугольник меньшего размера так, чтобы квадрат не распался на две части и у оставшейся фигуры не было дырки внутри. Разрезы можно проводить только по линиям сетки. Сколькими способами можно это сделать?

Задача 3. Дан треугольник ABC, вписанный в окружность с центром в точке O. Угол $\angle C = 30°$. Центр окружности симметрично отразили относительно прямой, содержащей сторону AB — получилась точка O'. Точку, диаметрально противоположную точке A, симметрично отразили относительно прямой, содержащей сторону BC. Получилась точка A''. Оказалось, что точки O', B, A'' лежат на одной прямой. Найдите угол $\angle B$.

Задача 4. При каких значениях параметра a множество решений неравенства

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geqslant 0$$

(относительно неизвестной x) представляет собой отрезок длиной 2026?

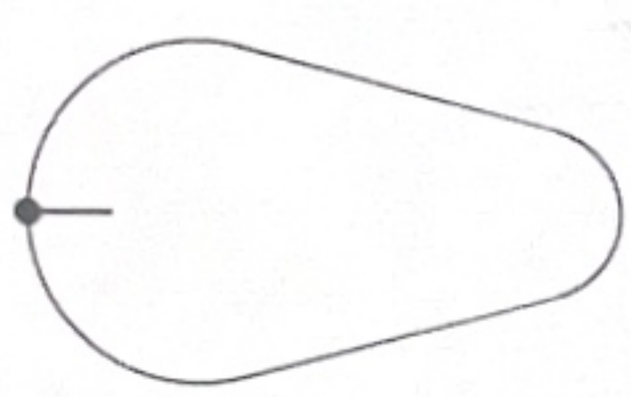
Задача 5. Найдите наибольшее значение произведения

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z,$$

где $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}, \quad x + y + z = \frac{\pi}{2}$.

Задача 6. В треугольнике ABC равны углы $\angle A = \angle C = 32°$. Внутри треугольника выбрана такая точка O, что угол BCO в 2 раза больше угла BAO, а угол OBC в 3 раза больше угла ABO. Во сколько раз угол BOA больше, чем угол BAO?

Задача 7.



Газонокосильщик участвует в гонке по трассе указанной формы (состоит из двух дуг окружностей и касающихся их прямых, радиусы окружностей 4 и 1, расстояние между центрами окружностей равно 6). Саму косилку можно считать маленькой, точкой. Скошенную траву она отбрасывает на расстояние 1.5 в сторону, направо, перпендикулярно направлению своего движения. Косилка ездит по часовой стрелке, соответственно, скошенная трава окажется внутри трассы. После того, как газонокосильщик завершил круг, внутри трассы вырисовалась замкнутая дорожка из скошенной травы. Найдите её длину.

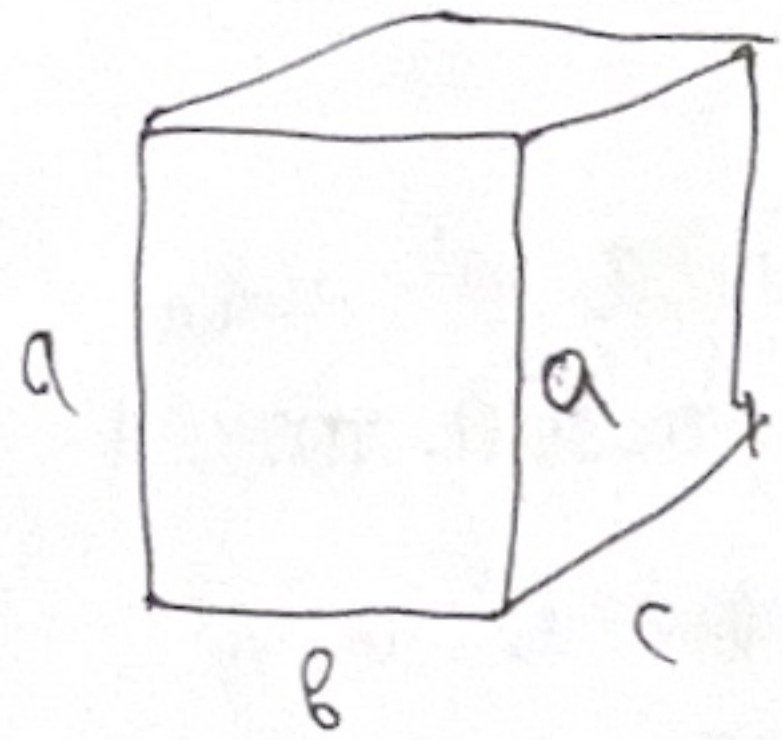
Задача 8. Робот Казимир решил создать шедевр. На неограниченном клетчатом поле он закрашивает клетку чёрным, а потом поочерёдно красит ещё 8 квадратиков, каждый раз выбирая клетку под покраску наугад из соседних к уже закрашенным (соседство по диагонали не подходит, нужна как минимум одна общая сторона).

С какой вероятностью своим последним штрихом он превратит «кольцо» в чёрный квадрат (размерами 3 на 3)?

 70 (семьдесят)

Чистовик.

Задача 1.



Пусть длины рёбер равны a, b, c. Тогда по условию:

$$V = abc$$
$$S = 2ab + 2bc + 2ac$$
$$l = 4a + 4b + 4c$$

Тогда $abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 2026$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$$

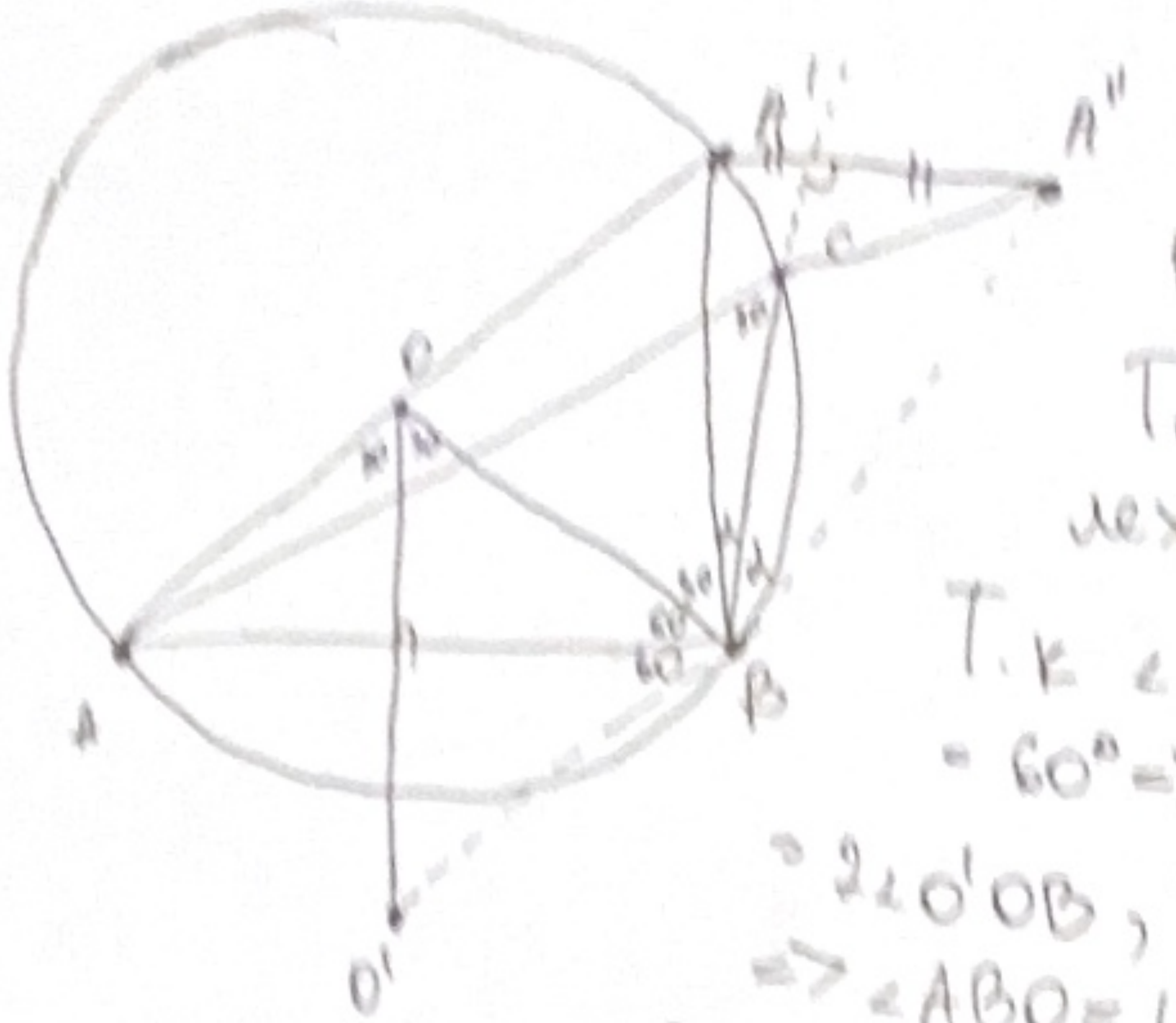
Все скобки должны быть натуральными и они ≥ 3 каждая. Понятно, что какая-то скобка ≥ 113. ~~Пусть это $a+2 \geq$~~. Какие есть варианты:

1) 113 в одиночку! Тогда останется $2 \cdot 3^2$ и однозначно $b+2 = 3$ и $c+2 = 6$ без огранич. общности. $a+2 = 113$. $V = 1 \cdot 4 \cdot 111 = 444$
2) 113 не в одиночку. Если $a+2 = 113 \cdot 2$, остаётся 3^2, тогда $b+2 = 3$ и $c+2 = 3 \Rightarrow b = c$, плохо. Если $a+2 = 113 \cdot 3$, то останется $2 \cdot 3 \Rightarrow$ какая-то скобка будет 2. Если $a+2 = 113 \cdot$ (комбинация 2 и 3, то аналогично нельзя). Тогда осталось только 444.

Ответ: 444

Чистовик.

Задача 3.



Пусть A' - диам. противоп. точке A.

Точки O', B, A'' лежат на 1 прямой.

Т.к $\angle C = 30^\circ$, то $\angle AOB = 60^\circ \Rightarrow$ т.к $\angle AOB = 2\angle O'OB$, то $\angle O'OB = 30^\circ \Rightarrow \angle ABO = 180 - 90 - 30 = 60^\circ$

Т.к O' отражение O, то $\angle ABO = 60^\circ = \angle O'BA$. Т.к AA' - диаметр, то $\angle ABA' = 90^\circ \Rightarrow \angle OBA' = 30^\circ$, Пусть $\angle A'BC = \alpha = \angle CBA''$. Тогда получ. $60+60+30+\alpha+\alpha = 180^\circ$, т.к O', B, A'' - 1 прямая $\Rightarrow \alpha = 15^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60+30+\alpha = 105^\circ$. Ответ: 105°

Задача 5.

Найти $\max(tgx \cdot tgy \cdot tgz)$ - ? , если $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ и $x+y+z = \frac{\pi}{2}$.

Можно заметить, что при соответствующих ограничениях $tg > 0$. Тогда можно применить н-во о средних. $\sqrt[3]{tgx \cdot tgy \cdot tgz} \le \frac{tgx+tgy+tgz}{3}$

$tgx \cdot tgy \cdot tgz \le \left(\frac{tgx+tgy+tgz}{3}\right)^3$

Тогда наше произведение в принципе не может быть больше правой части.

31-03-19-26

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

чистовик

Равенство достигается, когда $tgx = tgy = tgz$.

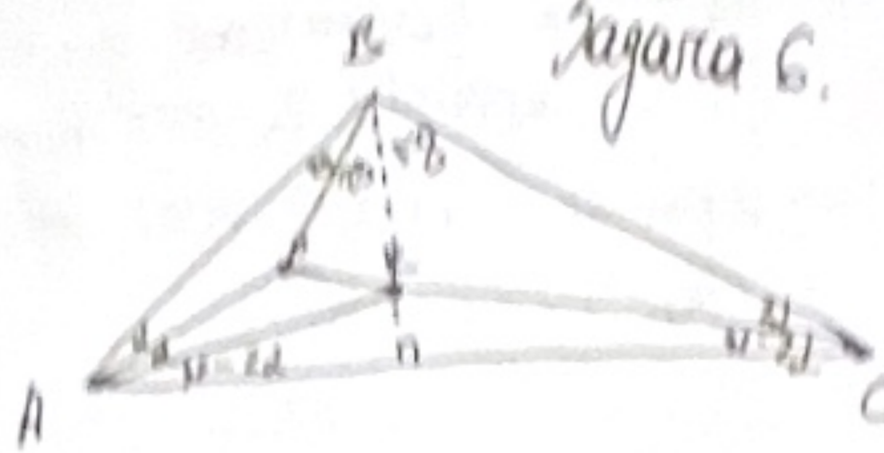
Т.к все углы находятся в 1 четверти, то такое бывает при $x = y = z = 30^\circ$

$tg(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Тогда произведение $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Ответ: $\boxed{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$

Задача 6.



Пусть $\angle BAO = \alpha \Rightarrow \angle BCO = 2\alpha$

Давайте проведем от луча AO ещё угол α.

Пусть с OC будет пересечение в точке K. $\Rightarrow$ Тогда $\angle BAK = \angle KCB = 2\alpha$. Т.к $\triangle ABC$ равнобед., то K и B лежат на серпере к AC. $\angle ABC = 180^\circ - 32 \cdot 2 = 116^\circ$

$\angle OBC = 3\beta$, если $\angle ABO = \beta \Rightarrow 4\beta = 116^\circ \Rightarrow \beta = 29^\circ$

Но $\angle ABK = \frac{116}{2} = 58^\circ \Rightarrow \angle OBK = 29^\circ$ тоже $\Rightarrow$ в $\triangle ABK$ AO и OB - бисс. $\Rightarrow OK$ тоже бисс. $\angle OKA = (32-2\alpha)\cdot 2 = 64-4\alpha = \angle OKB \Rightarrow \angle OKB = 58+2\alpha$ (из $\triangle BKC$) $\Rightarrow 58+2\alpha = 64-4\alpha \Rightarrow \alpha = 1^\circ \Rightarrow \angle BOA = 180 - 1 - 29 = 150^\circ$ и $\angle BAO = 1^\circ \Rightarrow \frac{\angle BOA}{\angle BAO} = 150$

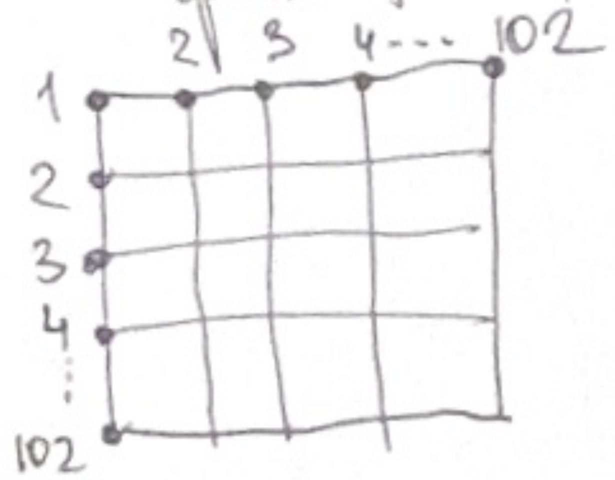
Ответ: 150 раз

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

Задача 2.

Если клетки занумерованы, то прямоугольники, которые отличаются поворотом считаем разными. Поймем, ~~так~~ что один прямоугольник определяется 4 границами, где граница – линия сетки. Пронумеруем горизонт. и вертикальные



$\overset{a}{\underset{b}{}}$ – прямоуг.

Разберем случаи горизонтальных границ:

1) Обе лежат на краях (т.е они 1 и 102).

- Если обе вертик. не на краях, то доска распадётся. Плохо.
- Если обе на краях, то это прoсто наша доска
- ~~А~~ более левая на краю: вариантов для правой 100 (т.е кроме 1 и 102 верт.) нет
- более правая на краю: тоже 100. (*)

Всего 200 вар.

2) Обе лежат не на краях:

(как-то так)

- Если обе верт. не на краях, то будет дырка. Плохо.
- Если обе верт на краях, то будет 2 куска. Плохо.
- Если левая на краю ~~(2)~~ или правая, то аналогично (*) 100+100 располож. левой или правой вертикалей.

Всего вар. выбора горизонталей: C_{100}^2 Всего вар: $C_{100}^2 \cdot 200$

31-68-19-26 (128.2)

Чистовик

3) Одна лежит на краю:
Пусть верхняя на краю. Тогда вариантов нижней $102-2=100$ (т.к не учитываем 1 и 102)

Получается так:

Вертикали можно выбирать как угодно. Дырок не будет, доска целая.

Всего C_{102}^2. Всего $100 \cdot C_{102}^2$ и $100 \cdot C_{102}^2$ (когда верх. и нижн. на краю)

Всего: $200 + C_{100}^2 \cdot 200 + C_{100}^2 \cdot 200$

$C_{100}^2 = \frac{100!}{2!\,98!} = \frac{99 \cdot 100}{2}$. $\quad 200 \cdot (1 + \cancel{2}\, 2 \cdot C_{100}^2) =$

$= 200 \cdot (1 + 9900) =$

$= 200 \cdot 9901 = 1980200$

Ответ: 1980200

Задача 4.

$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \Rightarrow$ ОДЗ: $a > 0$
$\log_2 a \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$

$\frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{\log_2 a} \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2 \cdot (a^{x-1} - 1) \cdot (a^{x-1} - 2)}{\log_2 a} \geq 0$

$\frac{(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)}{\log_2 a} \geq 0$. ~~Разберём варианты:~~

~~1) $\log_2 a > 0 = \log_2 1 \Rightarrow a > 1 \Rightarrow a^{x-1} \geq 1 \Rightarrow$~~

~~2) $\log_2 a < 0 = \log_2 1 \Rightarrow a < 1$~~

$a^{x-1} - 1^{x-1} = (a-1)(a^{x-2} + a^{x-3} + \ldots + 1^{x-2})$. Большая скобка точно > 0 при $a > 0 \Rightarrow$ влияет только $(a-1)$

$a^{x-1} - (2^{\frac{1}{x-1}})^{x-1} = (a - 2^{\frac{1}{x-1}})(\ldots)$ Аналогично тут вылет только $a - 2^{\frac{1}{x-1}}$

Чистовик.

В итоге осталось:

$\frac{(a-1)(a-2^{\frac{1}{x-1}})}{\log_2 a} \geq 0$. Сразу скажу, что при $\boxed{x=1}$:

$\frac{a^2 - 3a^2 + 2a^2}{\log_2 a} = 0$, что подходит

1) $a \geq 2 \Rightarrow a - 1 > 0$ $\Rightarrow a - 2^{\frac{1}{x-1}} \geq 0$

$\log_2 a \geq \log_2 2 = 1$ $\quad a \geq 2^{\frac{1}{x-1}}$

При $x > 1$: $2 \geq 2^{\frac{1}{t}}$

Тогда при $a \geq 2$ н-во верно всегда, это не подходит

При $x < 1$: $2 \geq 2^{-t}$, где $t = \frac{1}{1-x}$

$2^{t+1} \geq 1$, это правда

2) $1 < a < 2$

$a - 1 > 0$

$\log_2 a > \log_2 1 > 0 \Rightarrow$ Аналогично

$a - 2^{\frac{1}{x-1}} \geq 0$

$a \geq 2^{\frac{1}{x-1}}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик.

$a \geq 2^{\frac{1}{x-1}}$

$a \geq 2^{\frac{1}{-2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$

$\sqrt{2}$

$2^{\frac{1}{x-1}} \leq 1 = 2^{0}$

$\frac{1}{x-1} \leq 0$

$x \leq 1$

$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$

45

$A = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} + \frac{\sin z}{\cos z}$

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$

$x = 60$

$y = 60$

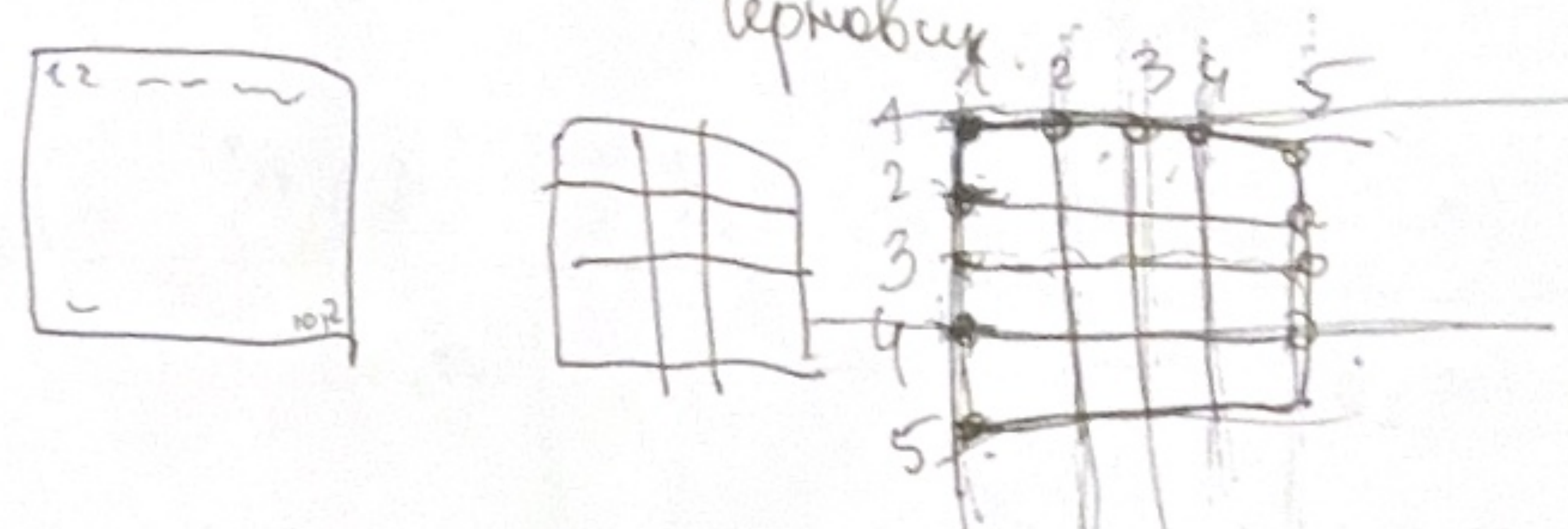
$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(1 + (-0{,}5)\right) =$

$\frac{\sin(x+y)}{2 \cdot \cos x \cdot \cos y}$

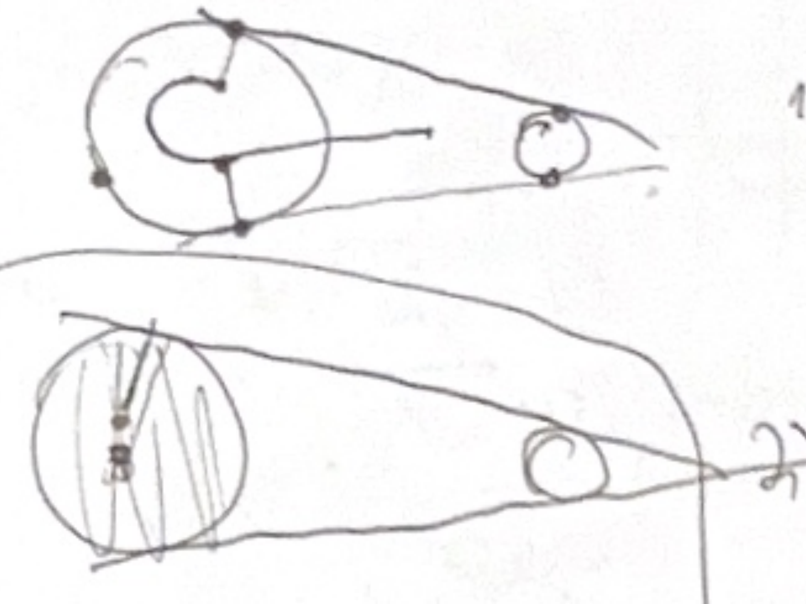
$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} + \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin(x+y) \cdot \cos z + \sin z \cos x \cdot \cos y}{\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z}$

$=$

Черновик



102, $C_{102}^{2} - 1$.



1) 2 края, то $\geq$ 1 край

2) 0 краёв, то = 1 край.

3) 1 край.

$a^{x-1} - 2 \geq 0$

a^{x-1}

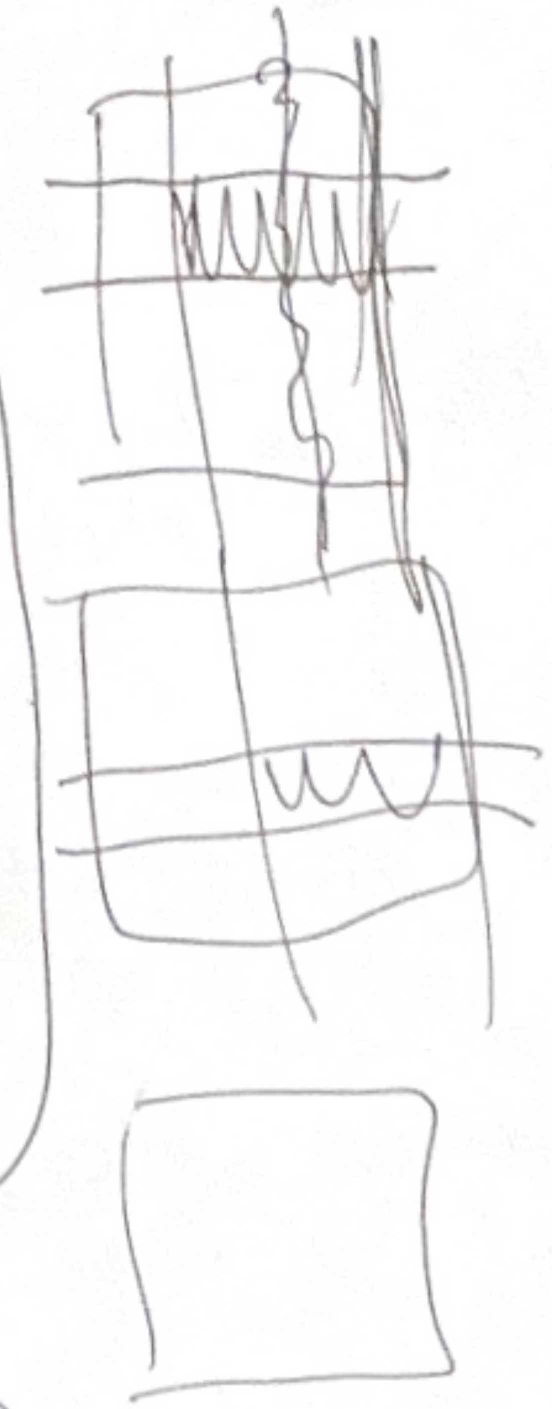
$5^{-\frac{3}{2}} =$

$a^{x-1} - \left(2^{\frac{1}{x-1}}\right)^{x-1}$

$= (5^{-4} - \sqrt[3]{2}$

$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2}$ 1,5

$9901 \times 2 = 19802$



Черновик.

$$\frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{\log_2 a} \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2 \cdot (a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)}{\log_2 a} \geq 0$$

$a > 0$

$a \neq 1$

$(a-1)(a^{x-2} + \dots + 1) \geq 0$

$(a - \sqrt[x-1]{2})(a^{x-2} \dots + 1)$

$$\frac{(a-1)(a - \sqrt[x-1]{2})}{\log_2 a} \geq 0$$

1) $\log_2 a > 0 \Rightarrow$

$\log_2 a > \log_2 1$ $\quad a > 1$

$\log_2 a > 0$

$a - 1 > 0$

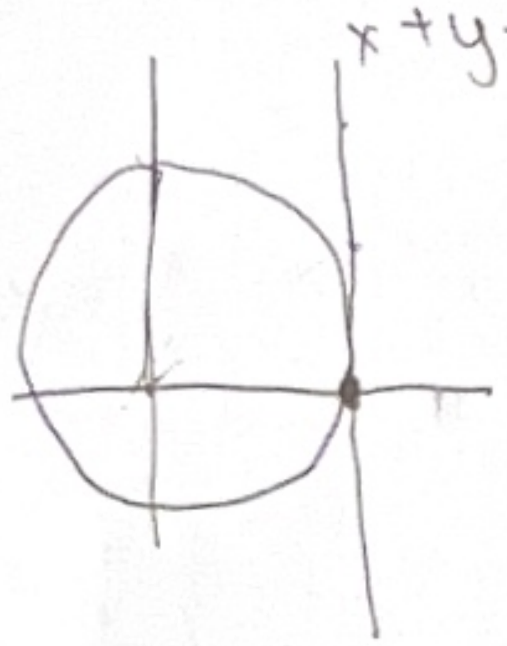
$a \geq \sqrt[x-1]{2}$

$\leq$

$tg x \cdot tg y \cdot tg z \to max$?

$0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$

$x + y + z = \frac{\pi}{2}$



90.

~~tgx+tg~~ $\quad tg x \cdot tg y \cdot tg z \leq \left(\frac{tg x + tg y + tg z}{3}\right)^3$

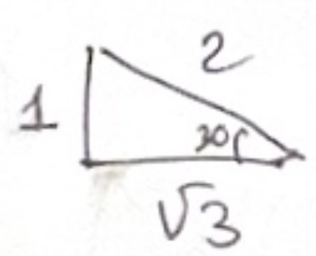
$tg x = tg y = tg z$.

$x = y = z$. $\quad 30, 30$ и 30.

$tg x \cdot tg y \leq \left(\frac{tg x + tg y}{2}\right)^2$

$$tg x + tg y + tg z = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} + \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} + \frac{\sin z}{\cos z} \leq$$



$tg 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

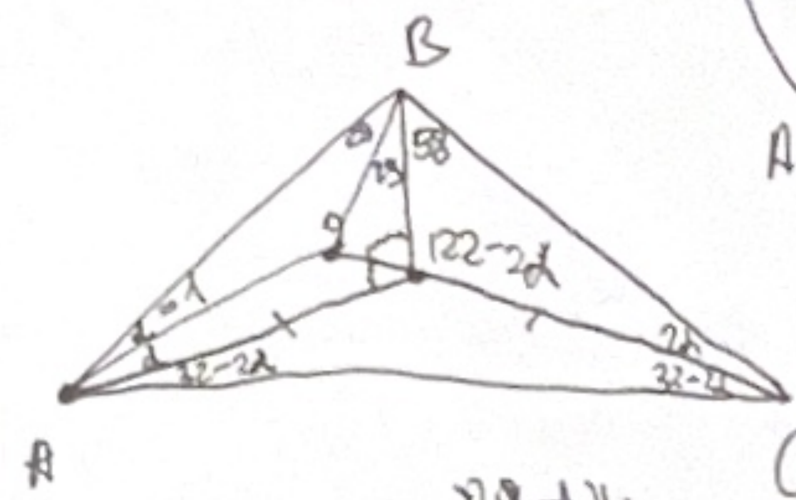
$\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}}{3}$

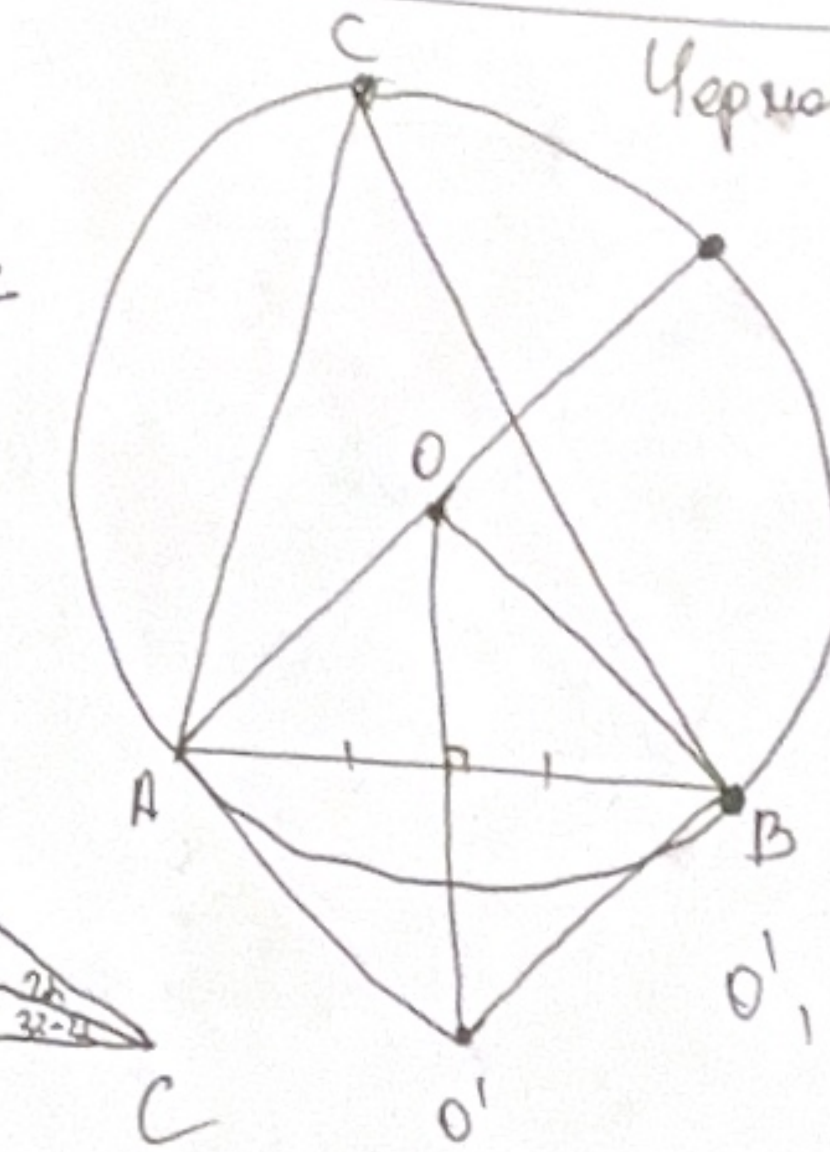
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}$

Черновик.

$180 - 58 = 122$





$\angle BOA$ и α

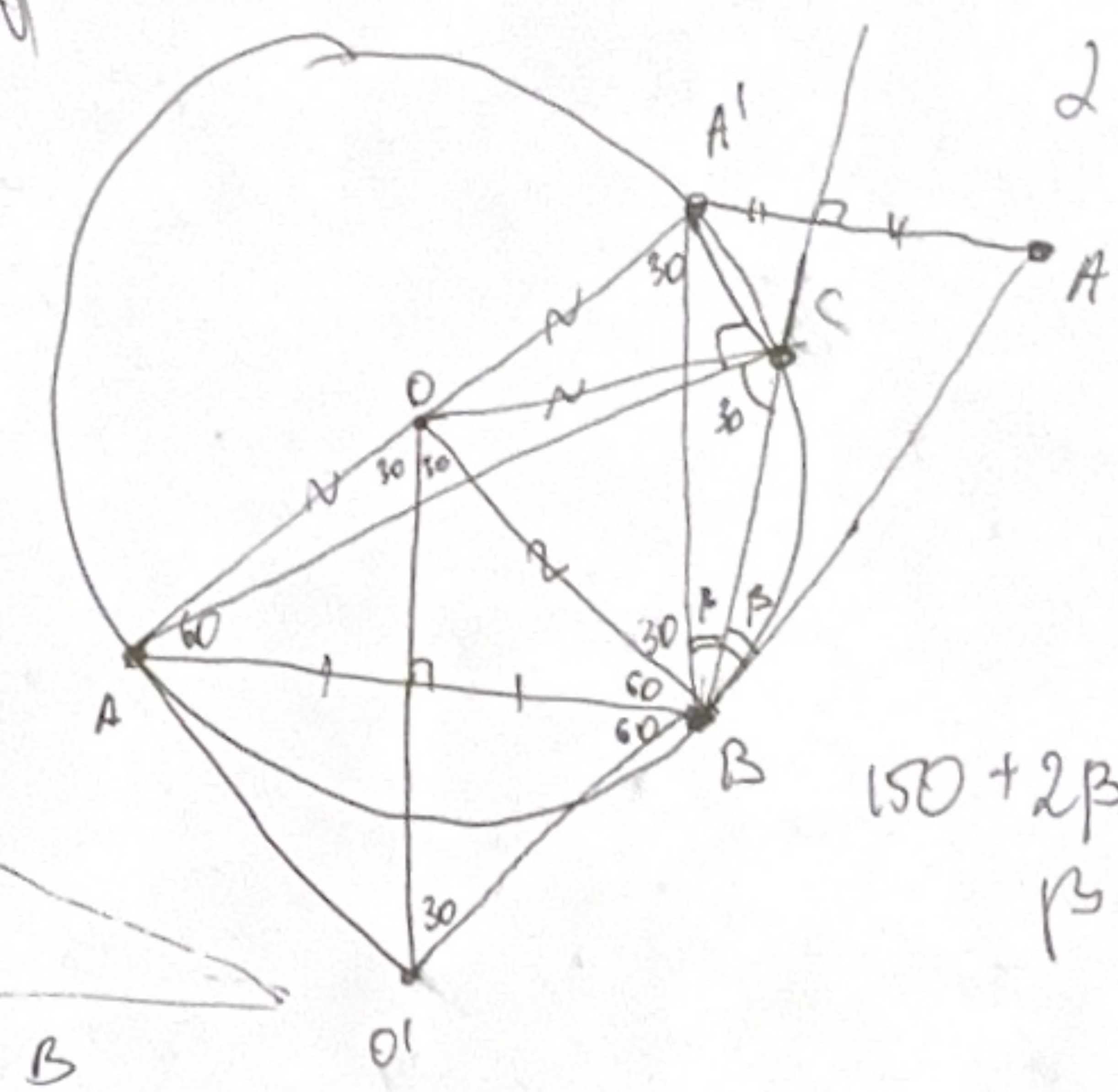
$64 - 4\alpha$

$128 - 8\alpha = 122 - 2\alpha$

$6 = 6\alpha$

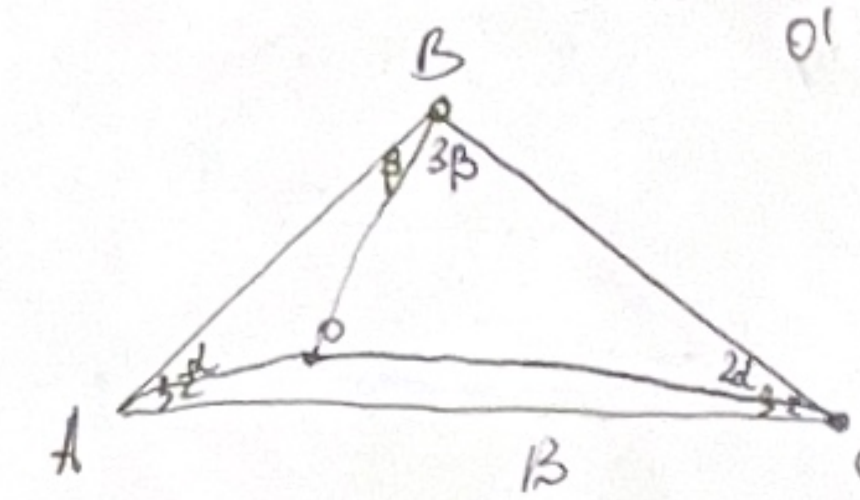
$\alpha = 1$

O', B



$150 + 2\beta = 180$

$\beta = 15$

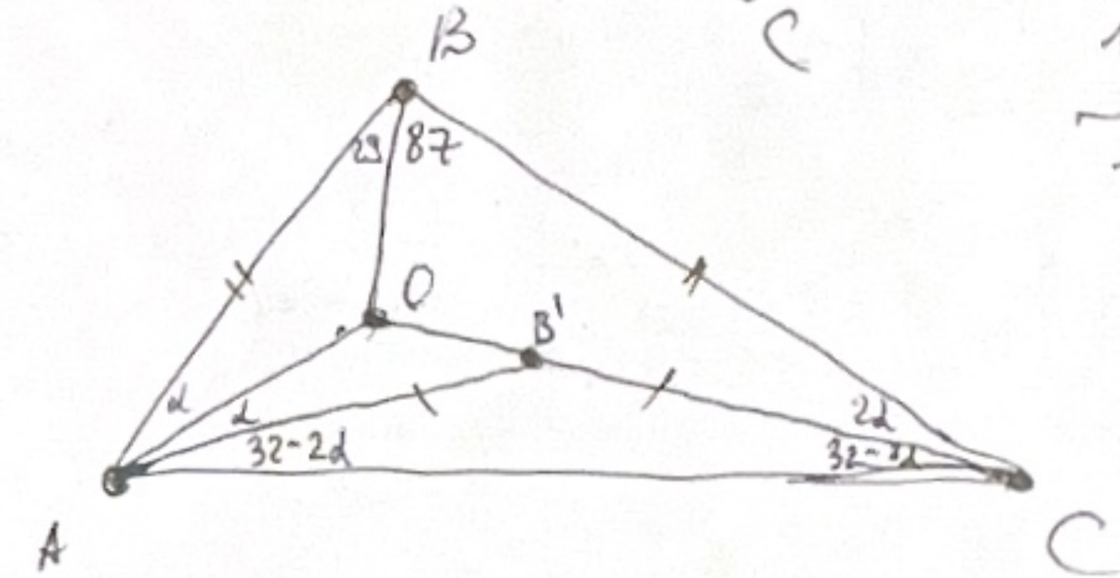


$\angle BOA$ и $\angle BAO$

$180 - 64 = 116$

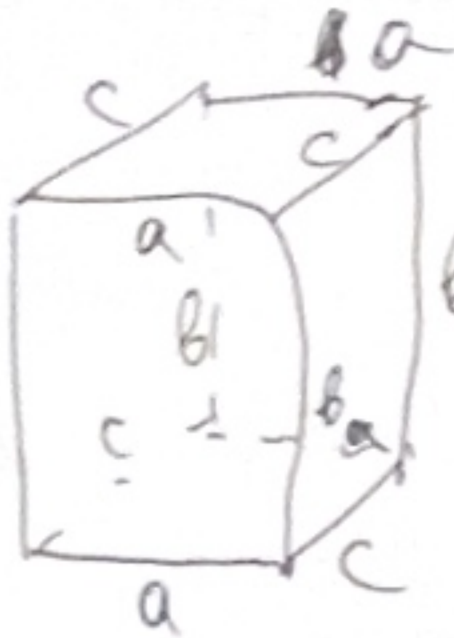
$116 : 4 = 29$

$29 \cdot 3 = 87$



$\angle BOA$ и α

Черновик.



$a, b, c \in N$.

$abc + 2ab + 2bc + 2ac +$
$+ 4b + 4c + 4a = 2026$.

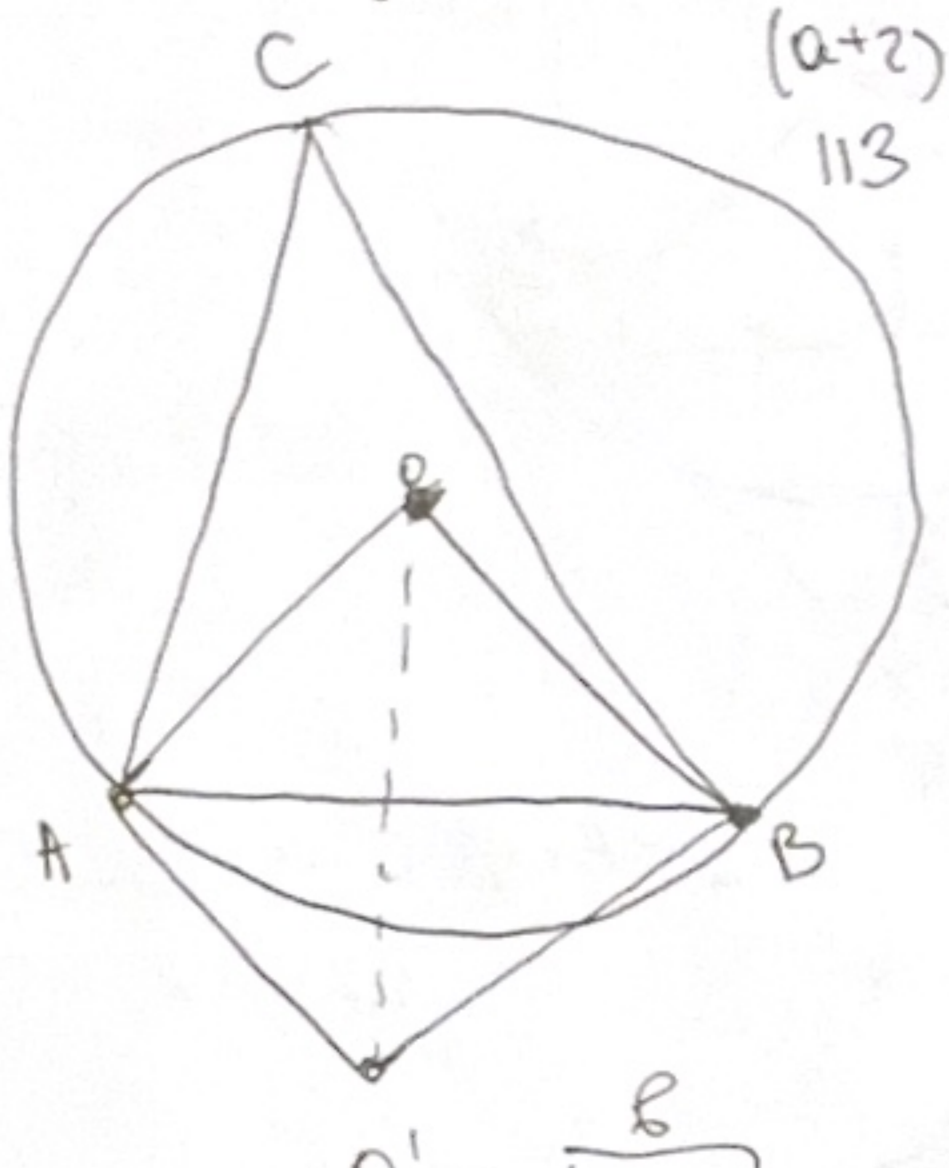
$\min abc$ — ?

a, b, c – разные.

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2026$

$$\begin{array}{r|l} 2034 & 2 \\ 1017 & 3 \\ 339 & 3 \\ 113 & \end{array}$$

$2034 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$.

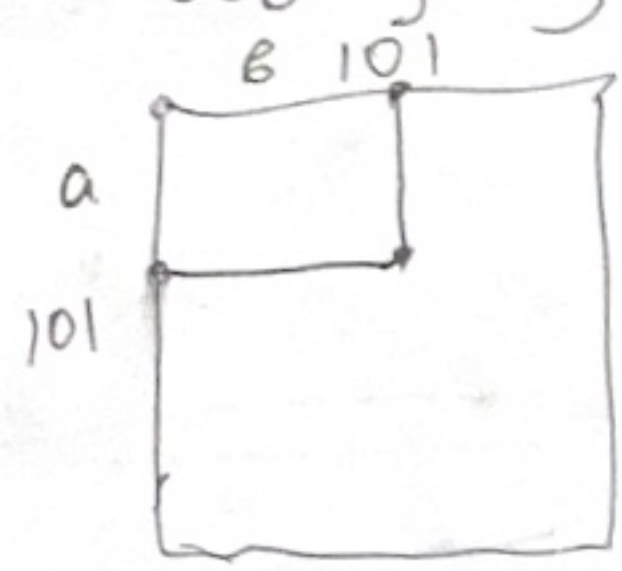


$(a+2)(b+2)(c+2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$.

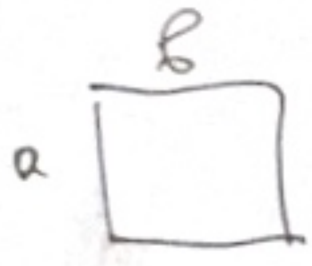
113 3 6

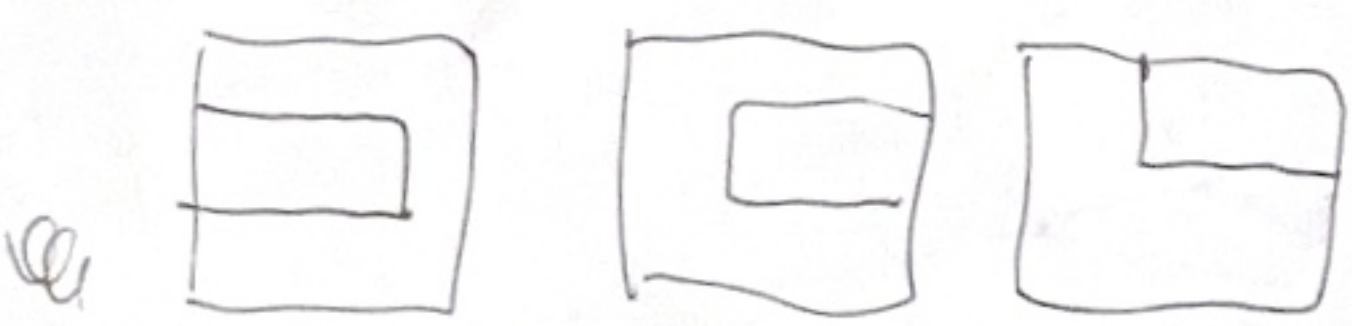
$113 \times 2 = 226$

$226 \cdot 3 \cdot 3$



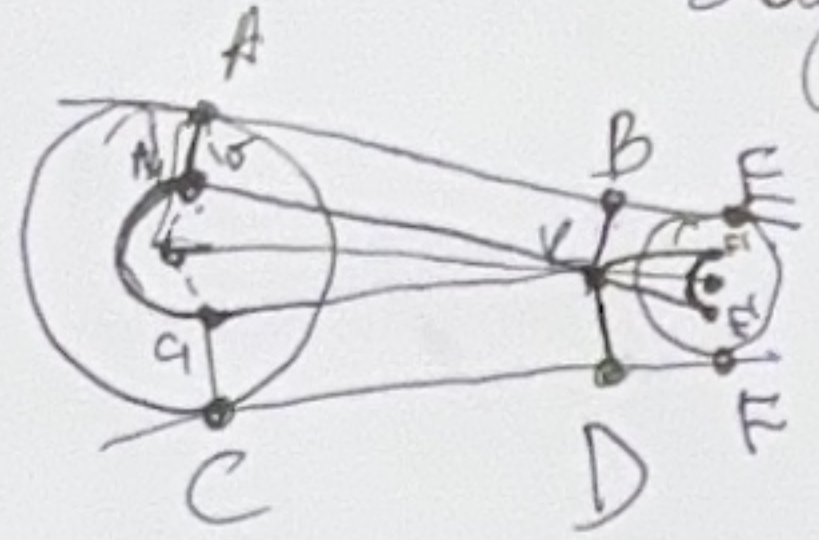
без дырки.
$a < b$





Чистовик.

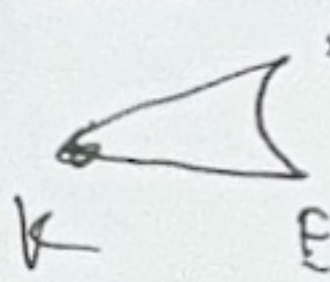
Задача 7.



Отбрасывает в сторону на расстояние. 1,5

Понятно, что когда он катается по дуге AC, то образуется дужка поменьше. Потом пусть B такая точка, что если восстан. из неё перпен, который пересечет лин. центров в т. K и $BK=1{,}5$, то на катании по AB будет просто отрезок. Аналогично с катанием по CD и DK. Тогда $A'K = AB$ и $C'K = CD$.

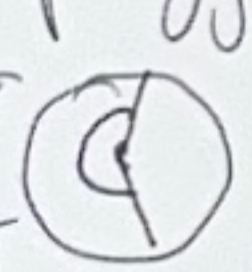
Далее во время катания по BE и DF и дуге EF образуется



вот такая фигура

~~3π~~ Длина окр: $2\pi \cdot 4 = 8\pi$

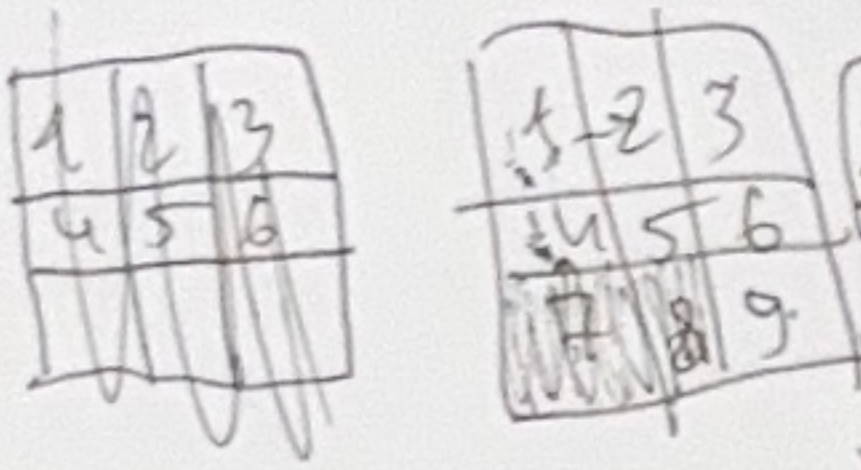
маленькой окр: $2\pi \cdot 1 = 2\pi$



$\smile A'C' =$

Ответ: $3\pi + 5$

Черновик.



$\frac{1}{16}$.

$\frac{1}{4}$