0 216861 800004

21-68-61-80
(123.17)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Якуткина Михаила Владимировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

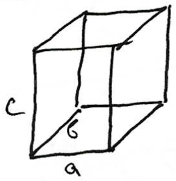
«29» марта 2026 года

Подпись участника

21-68-61-80 (123.17)

Чистовик.

Задача 1



обозначим ширину за a, длину за в, а высоту за с.

Тогда имеем уравнение:

$$\underbrace{abc}_{V}+\underbrace{2ab+2ac+2bc}_{\text{сумма площадей граней}}+\underbrace{4a+4b+4c}_{\text{сумма длин сторон}}=2026 \Leftrightarrow$$

Прибавим с обеих сторон 8.

Тогда выражение слева закроется в $(a+2)(b+2)(c+2)$. $\Leftrightarrow (a+2)(b+2)(c+2)=2034$

$a, b, c \in \mathbb{N}$ и они различны. $\Rightarrow a+2,\ b+2,\ c+2 \in \mathbb{N}$ и ≥ 3 каждое. $2034 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 113$

113 простое. Из нетривиальных делимостей только на 7, но $112=70+42 \,\vdots\, 7 \Rightarrow 113 \not\vdots\, 7$, а 11^2 уже больше чем 113 $(121>113)$

Тогда $a+2$, $b+2$, $c+2$ можно составлять только из этих четырех простых чисел. (ибо 1 использовать нельзя, иначе одно из чисел $(a,b,c)<0$)

Заметим, что по тем же причинам 2 обязательно идет с кем-то в пару, т.е. возможны 2 случая: 113, 3, 6 / 226, 3, 3.

Других нет, ибо после домножения на 2, остается ровно 3 числа. Но 226, 3, 3 отлетает, т.к. тогда $b=c=1$ (перестановка значений очевидно на результат, что объема, что общий не влияют)

Тогда остается лишь 113, 3, 6.

Тогда $a=111$, $b=1$, $c=4$ $\Rightarrow V=444$

Ответ: 444

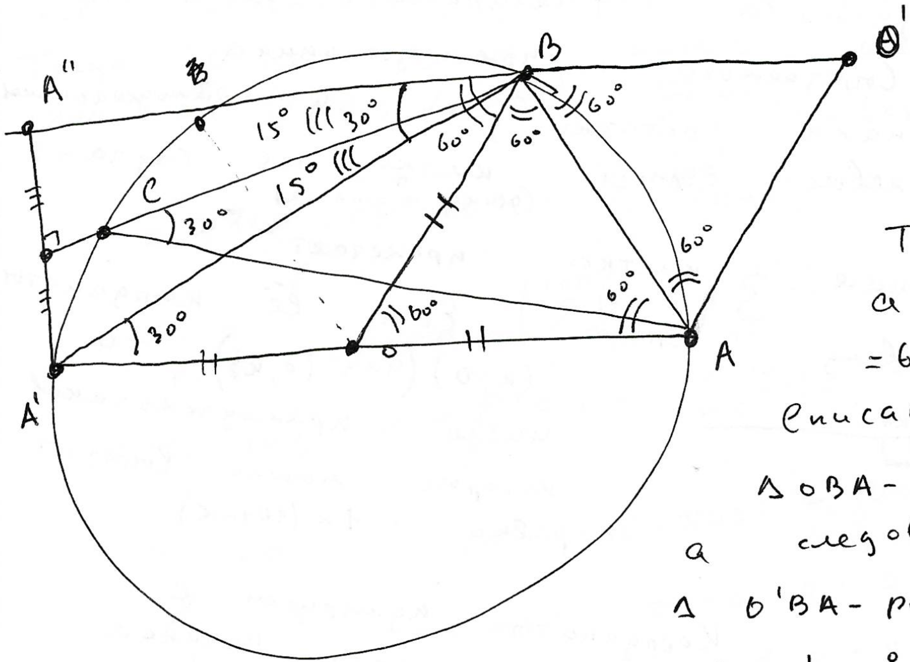
Задача 4 Чистовик

Заметим, что из ОДЗ $\log_2 a \Rightarrow a>0$.
Пусть $a>1$, тогда $\log_2 a>0$
$\Rightarrow$ неравенство $\Leftrightarrow a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2\geq 0$, но
это $\Leftrightarrow a^{2x-2}-3a^{x-1}+2\geq 0$, если $t=a^{x-1}$, то
$t^2-3t+2\geq 0 \Leftrightarrow t\in(-\infty;1]\cup[2;\infty)$ (1, 2 - корни по обратной теореме Виета.)
Но a^{x-1} (т.е. t) не ограничено сверху, т.е. из-за монотонного возрастания a^{x-1} (т.к. $a>1$) на $\mathbb{R}$, с какого-то момента a^{x-1} будет всегда >2, т.е. множество решений при $a>1$ $\supseteq$ луч (включает луч). Не подходит.
$a=1$ не подойдет из-за ОДЗ всего неравенства, т.к. тогда $\log_2 a=0$
При $a<1$ ситуация меняется не сильно, только в знаменателе отрицательное число. При аналогичной с $a>1$ замене, получим $t^2-3t+2\leq 0$, т.е. $t\in[1;2]$
$\Leftrightarrow a^{x-1}\in[1;2]$. Так как a^{x-1} монотонная (убывающая $\mathbb{R}$, т.к. $a<1$) и непрерывная функция, то min и max по теореме Вейерштрасса достигаются на концах отрезка, а именно $a^{x-1}=1$ при наибольшем x, $a^{x-1}=2$ - при наименьшем.
$a^{x-1}\in[1;2] \Leftrightarrow x-1\in[\log_a 2, \log_a 1]$ - отрезок длины 2026. Т.е. $[\log_a 2, 0]$ - отрезок длины 2026
т.е. $\log_a 2=-2026 \Leftrightarrow a^{-2026}=2 \Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}=\frac{\sqrt[2026]{2^{2025}}}{2}=a$

21-68-61-80 (123.17)

Задача 3 Чистовик



Так как $OB = OA$, а $\angle BOA = 2\angle BCA = 60°$ (по св-ву вписанного угла), $\triangle OBA$ – равносторонний, а следовательно и $\triangle O'BA$ – равносторонний

т.е. $\angle BOA = 60°$, $\angle ABO' = 60°$, $\angle OBA = 60°$

$\Rightarrow \angle A''BO = 180° - \angle OBA - \angle ABO' = 60°$. Тогда $BO' \parallel AO$ ($\angle A''BO = \angle BOA = 60°$). $\angle BA'A = 30° = \angle BCA$ как вписанные $\Rightarrow \angle A''BA' = \angle BA'A = 30°$ как накрест лежащие при $A''B \parallel AA'$.

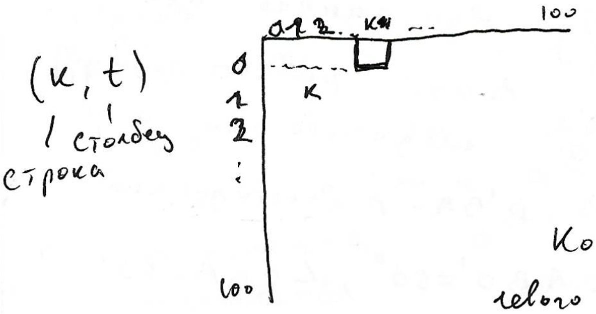
Т.е. $\angle CBA'' = \frac{1}{2}\angle A''BA' = 15°$ по св-ву симметрии (A' отн. BC) $\angle ABC = 180° - \angle O'BA - \angle A''BC = 180° - 60° - 15° = 105°$.

Ответ: $105°$

Задача 2 Чистовик.

Для удобства фиксируем левую верхнюю клетку вырезаемого прямоугольника. Если совпали остатки, то у прямоугольников совпали левые верхние клетки (длина и ширина), т.е. случаи одинаковы.

1° Левая верхняя клетка прилегает к верхнему / левому краю. Если её координаты $(k,0)$ (или $(0,k)$), то число прямоугольников, которые можно вырезать равно $101\times(101-k)$



Координаты нумеруем с левого верхнего угла, начиная с нуля. (см рис слева)

Только у варианта клетки $(0,0)$ нельзя вырезать квадрат 101×101 => у нее на 1 способ меньше. Итого таких способов: $\left(\sum_{k=1}^{100}(101\cdot(101-k))\right)+101\times101-1$ для $(0;0)$ отдельно.

$=101\times101-1+101\sum_{k=1}^{100}(101-k)$, а эта сумма равна сумме всех чисел от 1 до 101, т.е. $\frac{102\cdot101}{2}=51\times101$ => всего способов $101\times101-1+51\times101^2=101^2\cdot52-1$

Теперь если клетка не крайняя. Чтобы не было дыры, либо её нижний край либо её правый край соприкасается со стороной. Пусть точка имеет координаты (k,t). Тогда либо она до конца идет вправо, либо до конца вниз, т.е. всего возможно $101-k+101-t-1$ (2 раза посчитан способ с захватом правой нижней клетки)

Задача 2 Продолжение Чистовик

т.е. $201-(k+t)$ (что верно даже для клетки $(100, 100)$)

Тогда всего способов, когда клетка не крайняя (сверху / слева)

$$\sum_{k=1}^{100}\sum_{t=1}^{100}(201-(k+t)) =$$

$$= 100\cdot100\cdot201 - \sum_{k=1}^{100}\sum_{t=1}^{100}(k+t) =$$

$$= 100\cdot100\cdot201 - \left(\sum_{k=1}^{100}\left(100k + \sum_{t=1}^{100} t\right)\right) = 100\cdot100\cdot201 - \sum_{k=1}^{100}(100k+5050)$$

$$= 100\cdot100\cdot201 - \sum_{k=1}^{100}\left(100k + \frac{100\cdot101}{2}\right) =$$

$$= 100\cdot100\cdot201 - 100\cdot5050 - 100\cdot\sum_{k=1}^{100} k =$$

$$= 100\cdot100\cdot201 - 100\cdot5050\cdot2 =$$

$$= 100\cdot100\cdot201 - 100\cdot10000 = 1000000$$

$$= 100(20100 - 10100) = 100\cdot10000 = 1000000$$

~~Ответ $= 101^2\cdot152 - 1 + 1000000 =$~~

~~$= 15351 + 1000000 = 1015351$~~

~~Ответ: 1015351~~

$\Rightarrow$ Ответ $= 101^2\cdot52 - 1 + 1000000$

$101^2\cdot52 = 10201\cdot52 = 530452 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 101 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 10201 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10201 \\ \times 52 \\ \hline 20402 \\ 51005 \\ \hline 530452 \end{array}$$

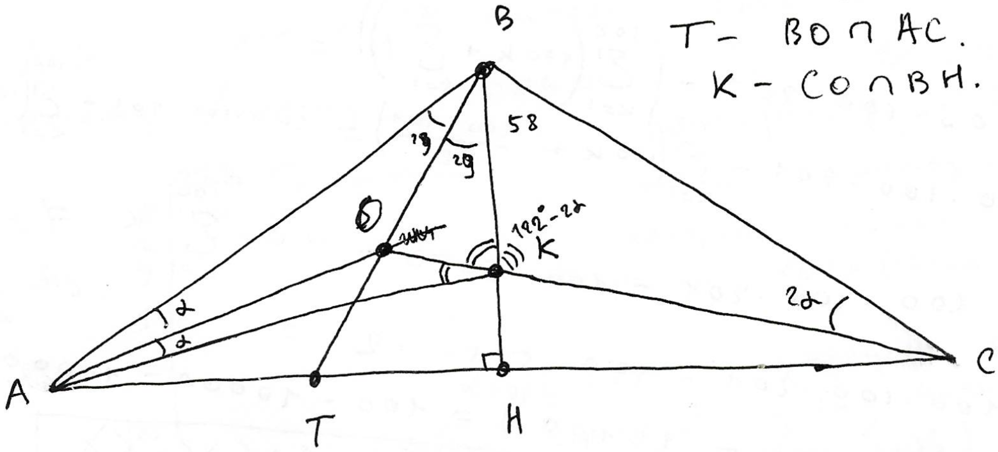
$\Rightarrow$ Ответ: $530452 - 1 + 1000000 = 1530451$.

$\boxed{\text{Ответ}}$: 1530451

Задача 6

Чистовик

Введем несколько новых точек. H – высота из точки B. По св-ву р/б Δ она еще и биссектриса
T – $BO \cap AC$.
K – $CO \cap BH$.



Обозначим $\angle BAO$ за α. $\angle B = 180^\circ - 32^\circ - 32^\circ = 116^\circ$

$\Rightarrow \angle ABO = 29^\circ$, а $\angle HBC = 58^\circ$ (т.к. BO – биссектриса $\angle ABH$, из-за того, что по условию $\angle ABO = \frac{1}{3}\angle OBC$) Соединим A и K. Так как р/б Δ симметричен относит. BH, то $\angle BAK = \angle BCK = 2\alpha$. Тогда AO – биссектриса $\angle BAK$. По св-ву биссектрис а именно то, что они пересекаются в одной точке $\triangle ABK$ следует, что KO – биссектриса $\angle BKA$. Т.к. C, K, O лежат на одной прямой по выбору K, $\angle CKB + \angle BKO = 180^\circ$, а $\angle BKO = \frac{1}{2}\angle BKA = \angle BKC$ в силу симметрии

$\Rightarrow \frac{3}{2}\angle BKC = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{3}{2}(180^\circ - 58^\circ - 2\alpha) = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(122^\circ - 2\alpha) = 180^\circ \Leftrightarrow 183^\circ - 3\alpha = 180^\circ$

$\Leftrightarrow \alpha = 1^\circ$. Тогда сравниваю $\angle BOA =$
$= 180^\circ - 29^\circ - 1^\circ = 150^\circ$, и $\angle BAO = 1^\circ$

Ответ: в 150 раз

Задача 5

Чистовик

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} (x+y)}$

т.к. $x+y = \frac{\pi}{2} - z$

$\Rightarrow \operatorname{ctg} (x+y) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \operatorname{tg} z$

$\dfrac{1}{\operatorname{tg} (x+y)}$ ''

Нужно найти $\max \dfrac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} (x+y)}$, $=$

$= \dfrac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}} = \dfrac{(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}$.

Устроим замену $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{tg} y = b$.

$x+y < \frac{\pi}{2}$

$\dfrac{ab \cdot (1-ab)}{a+b} = \dfrac{ab - a^2b^2}{a+b}$

т.е. $a \leq 1$, $b \leq 1$ $\Rightarrow a+b < 2$ (иначе, если $a+b=2$, $z=0$)

$\max \dfrac{ab - a^2b^2}{a+b} = \sqrt{3}$ *.

Ответ: $\sqrt{3}$ при $x=y=z=\frac{\pi}{6}$

Докажем *

$ab - a^2b^2 \leq \sqrt{3}(a+b)$

$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$

Черновик

$\frac{\sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z} =$

$x+y+z=\frac{\pi}{2}$

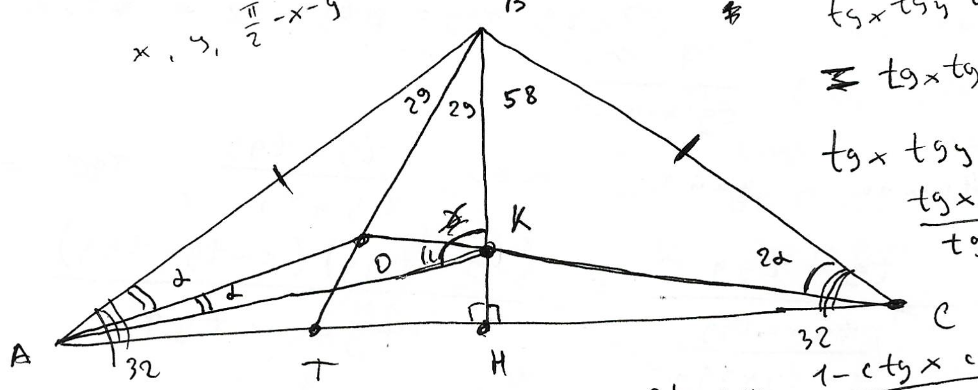
$x,\ y,\ \frac{\pi}{2}-x-y$

$= tg\,x\,tg\,y\,tg\,z =$

$= tg\,x\,tg\,y\,ctg\,x+y$

$tg\,x\,tg\,y \cdot ctg\,x+y$

$\frac{tg\,x\,tg\,y}{tg\,x+y}$



$ctg\,x+y = \frac{1-ctg\,x\,ctg\,y}{} = 1$

$tg\,x\,tg\,y\,tg\,z$

$\frac{AB}{AT} = \frac{BH}{HT}$

$tg\,x+y = \frac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x\,tg\,y}$

$x,\ y$

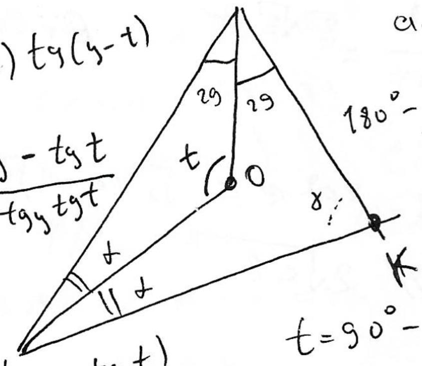
$tg\,x\,tg\,y$ vs

$\frac{BC}{AT} = \frac{CH}{HT}$

$a+b$

$\frac{(tg\,x\,tg\,y)(1-tg\,x\,tg\,y)}{tg\,x+tg\,y}$

vs $tg(x+t)\,tg(y-t)$



$180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180° - \frac{180°-\gamma}{2}$

$= 90° - \gamma$

$\frac{tg\,x + tg\,t}{1 - tg\,x\,tg\,t} \cdot \frac{tg\,y - tg\,t}{1 + tg\,y\,tg\,t} =$

$t = 90° - \gamma$

$180-58=$

$=122\ |\ 2$

61

6

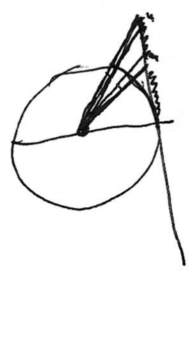
183

$= \frac{(tg\,x + tg\,t)(tg\,y - tg\,t)}{(1 - tg\,x\,tg\,t)(1 + tg\,y\,tg\,t)} =$

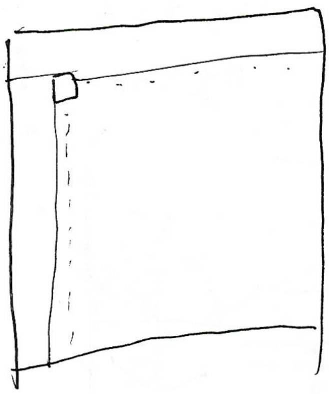
$180° - 2\alpha - 58$

$= \frac{tg\,x\,tg\,y - tg\,x\,tg\,t + tg\,y\,tg\,t - tg^2 t}{1 - tg\,x\,tg\,t + tg\,y\,tg\,t - tg\,x\,tg\,y\,tg^2 t}$

$tg\,x\,tg\,y + (tg\,t\,(tg\,y - tg\,x - tg\,t))$



Черновик



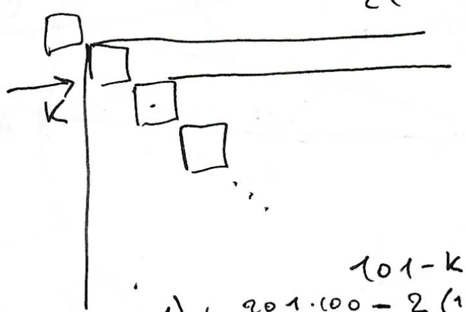
Фиксируем левую верхнюю

край:

$101 \times 101 - 1$

Снутри:

$2(101-k+1)$



$101 \times 10\cancel{1}-1 + 2 \cdot 100 \cdot 101$

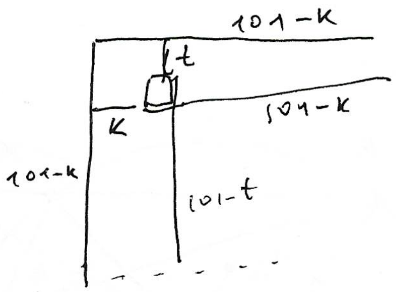
$+2 \cdot 99 \cdot 101$

$101-k+101-k-1$

$101 \cdot 101 - 1 + 202 \cdot (100+99+\ldots+1) + 201 \cdot 100 - 2(1+2+\ldots+100)$

$20\cancel{2}-2k$

$201-2k$



$101-k+101-t-1$

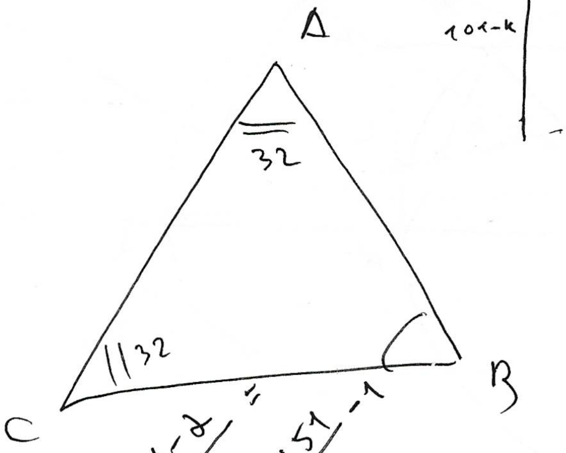
$201-k-t$

$k=100$

$201-(k+t)$

$201-(x_1+1+x_2-1)$

$203-(x_1+x_2)$



$101 \times 101 - 1 +$

$+201-2+201-4+\ldots$

$\frac{151-\alpha}{\alpha} = \frac{151}{\alpha} - 1$

$= 101 \times 101 - 1 +$

$180-64=116 + 201 \cdot 100 - 2(1+2+\ldots+100)$

$116 \mid \frac{4}{29}$

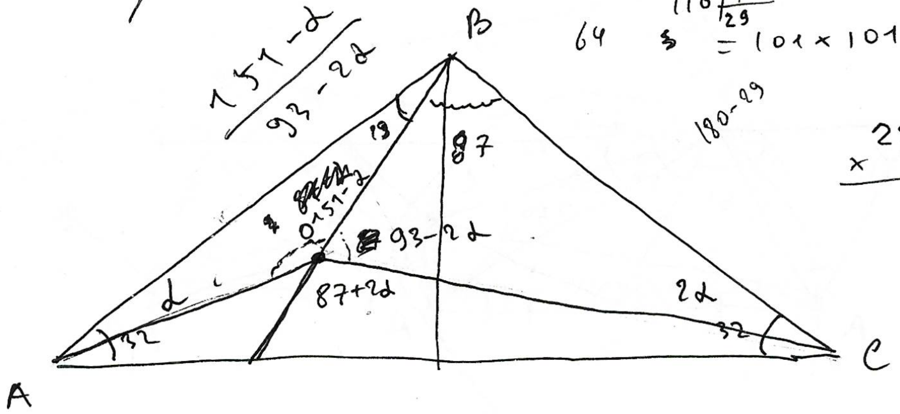
64

$= 101 \times 101 - 1 + 201 \cdot 100 - 5050^{?}$

$180-29$

$180-29$

$\frac{151-\alpha}{93-2\alpha}$



$\times \begin{array}{r} 29 \\ 3 \end{array}$

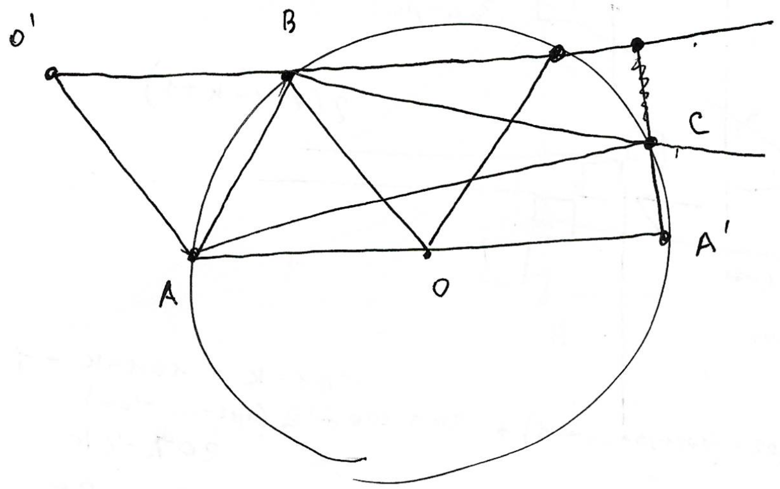
151

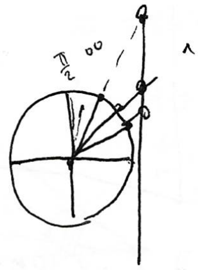
Черновик

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$

$0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$

$x + y + z = \frac{\pi}{2}$

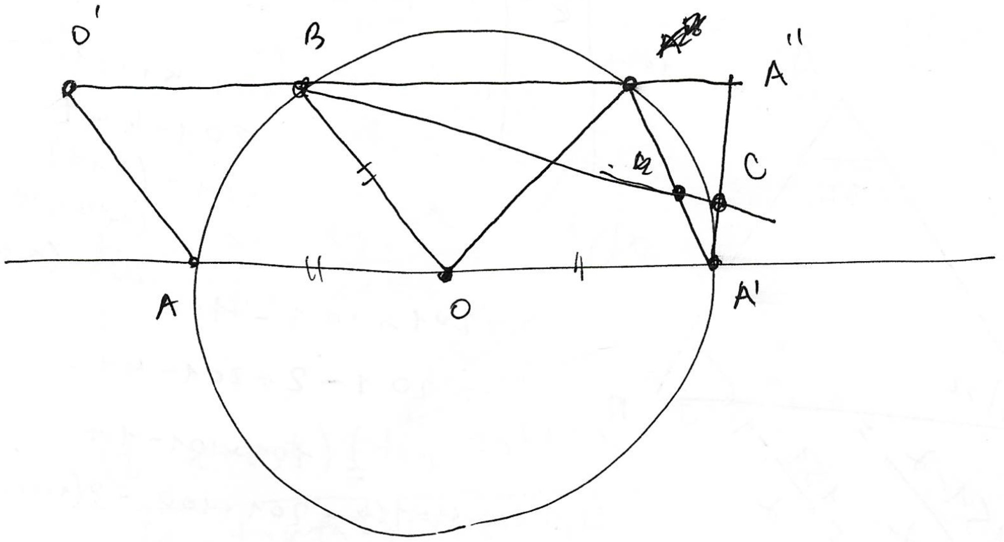


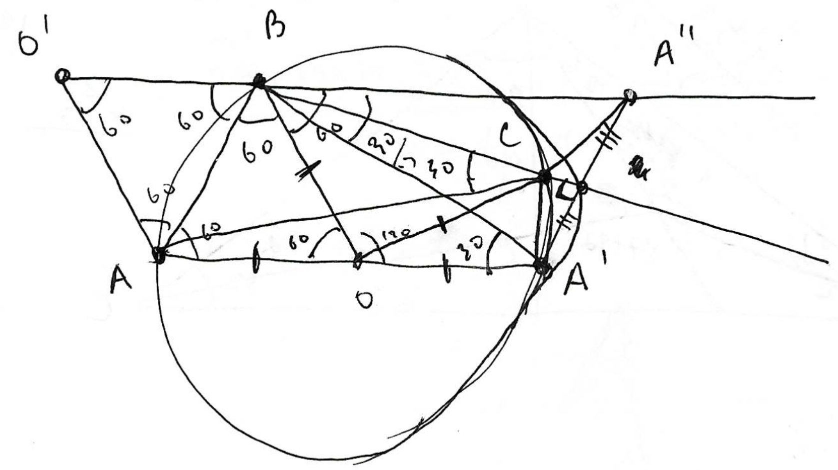


$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - ?$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} > 1$





черновик

$$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \le 0$$

$$a < 1$$

$$a^{x+1}\left(a^{x-1} - 3\right) + 2a^2 \le 0$$

$$\lim_{x\to\infty} a^{x-1} - 3 = 2a^2$$

$$a^{2x-2} - 3a^{x-1} + 2 \le 0$$

$$a^{x-1} = t$$

$$t^2 - 3t + 2 \le 0$$

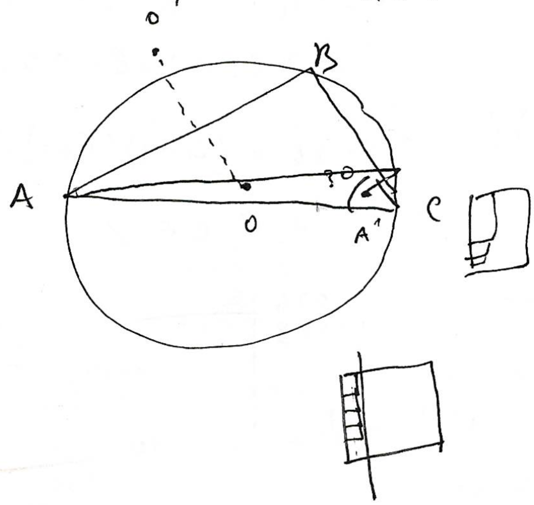
$$\Leftrightarrow \quad t \in [1;2]$$

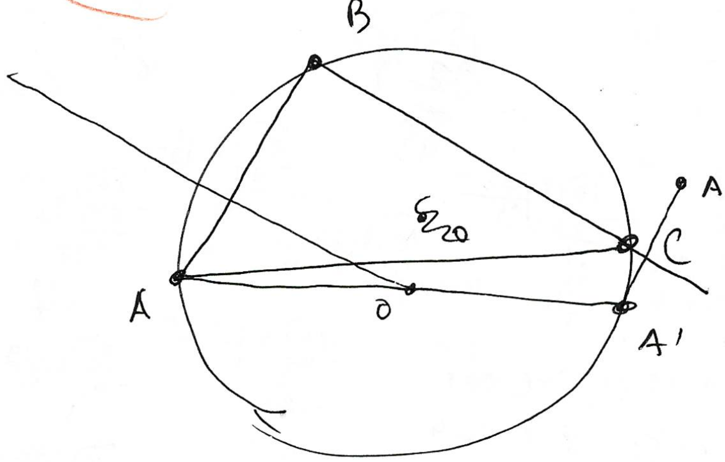
$$a^{x-1} \in [1;2]$$

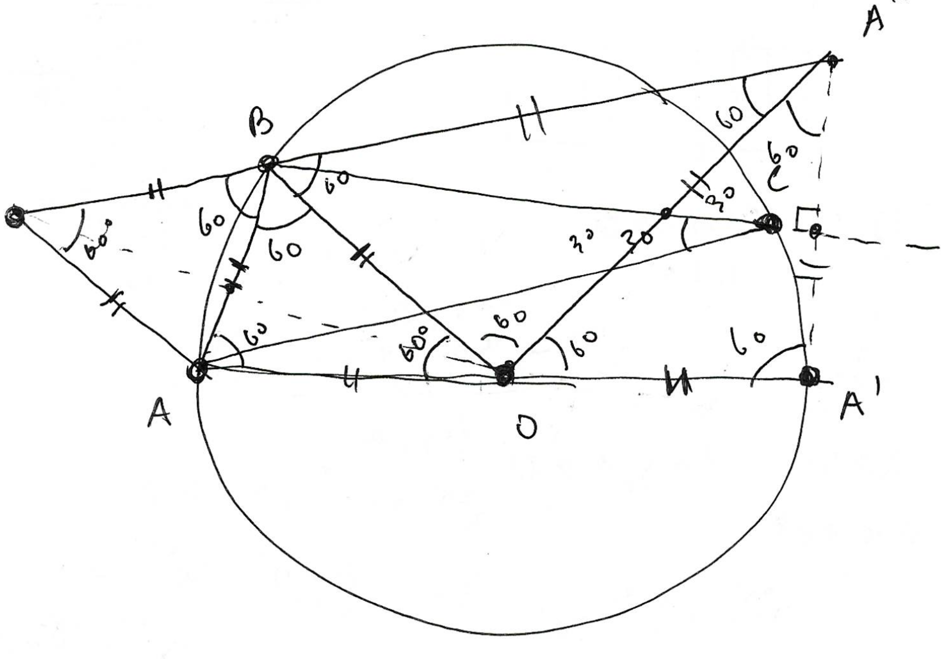
$$a < 1$$

$$101 \times 101 - 1 +$$

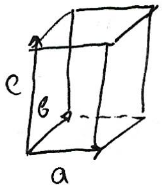
$$+ 100 \times 101$$







Черновик



$abc+2ac+2ab+2bc+4a+4b+4c$

$(a+2)(b+2)(c+2)=2034$

$=abc+2ab+2ac+2bc+4a+4b+4c.$

$2026=(a+2)(b+2)(c+2)$

$a,b,c\in\mathbb{Z}$

2034 | 2
1017 3
339 3
113

2026 | 2
1013

$1013\cdot2\cdot1$

$113\cdot9\cdot2$

$113\cdot3\cdot3\cdot2$

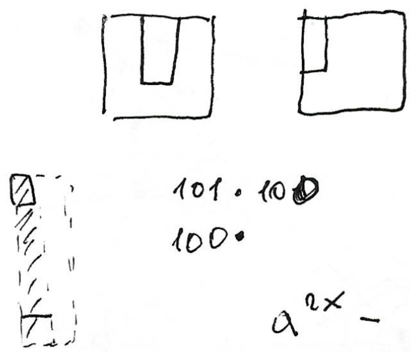
$113\cdot2=226$, 33
113, 3, 6

$a,b,c\geq2$

$a=224,\ b=1,\ c=1$

$a=113,\ b=7,\ c=4$

$1013\cdot2\cdot1$



101 · 100
100 ·

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\ \begin{matrix}\leq0\\ \geq0\end{matrix}$$

$a>1 \Leftrightarrow \log_2 a>0$

$\Rightarrow a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2\geq0$

$0<a<1$

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2$ $\quad a<1$ $\quad \lim_{x\to\infty} a^{2x}-3a^{x+1}=$

$a<1 \quad a^{2x}-3a^{x+1}$ $\quad =\lim_{x\to\infty}(a^{x+1}\cdot(a^{x-1}-3))$

$a^{-2x}=\left(\frac{1}{a}\right)^{2x}-3\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{x+1}+2a^2-\text{const}$