79-49-92-86
(128.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ярославской Анны Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

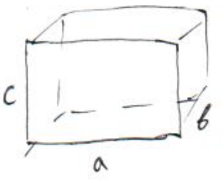
«29» марта 2026 года

Подпись участника

 70 (семьдесят)

79-49-92-86
(128.5)

ЧЕРНОВИК



$abc + 2(ab+ac+bc) + 4(a+b+c) = 2026$

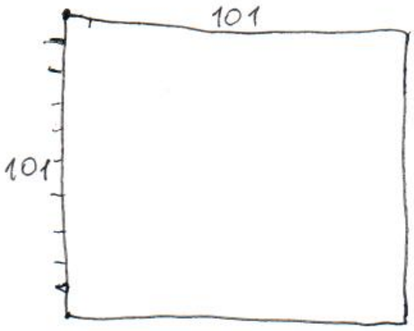
~~$2(ab+ac+bc)+a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$~~

$a(b+2)+b(a+2)+a(c+2)+c(a+2)+b(c+2)+c(b+2)$

$(b+2)(a+c)+(a+2)(b+c)+(c+2)(a+b)$

5 $2a^2+2b^2+2c^2+4a+4b+4c = 2((a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2)-6$

~~$-2+a^2+2a+1+a^2+2a+1=2(a+1)^2-2$~~



$8+8+6+3+6+4+2+3+2+1=$
$=20+15=35$

$\frac{4\cdot3}{2}\cdot\frac{4\cdot3}{2}-1$

$36-1=35$

~~$\frac{102\cdot101}{2}\cdot\frac{102\cdot101}{2}-1$~~

~~$\frac{2\cdot1}{2}\cdot2\cdot3\cdot2+2\cdot2\cdot4+2\cdot4$~~

$12+16+8=$
$28+8=36$

$\frac{102\cdot101}{2}\cdot 2\cdot101\cdot2$

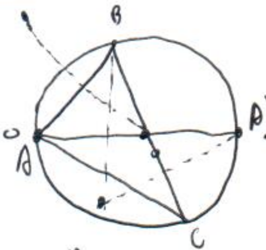
$\frac{100\cdot99}{2}\cdot2\cdot101\cdot2 + \frac{100\cdot100}{2}\cdot4+100\cdot4$

$\frac{2\cdot1}{2}\cdot2\cdot4=8$

$16+8+8=32$

$\frac{100\cdot99}{2}\cdot100\cdot4$

40000

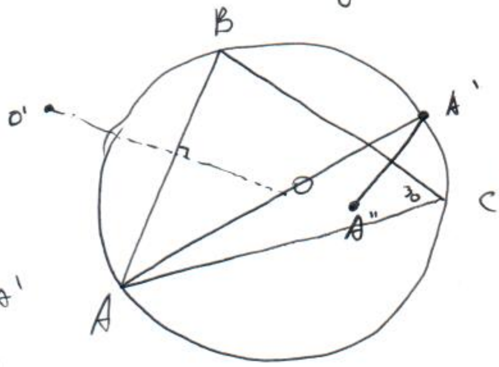


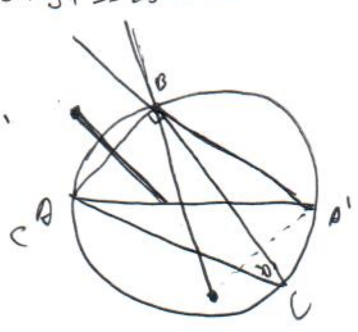
$8+5+3+5+3+2+3+2+1$

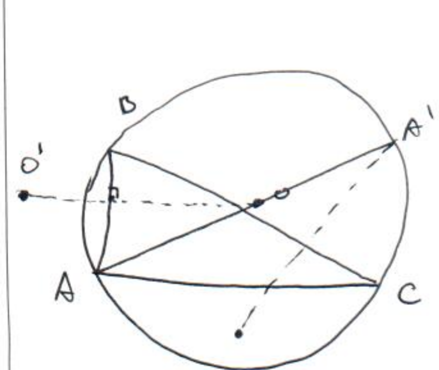
$20+9+3=29+3=32$

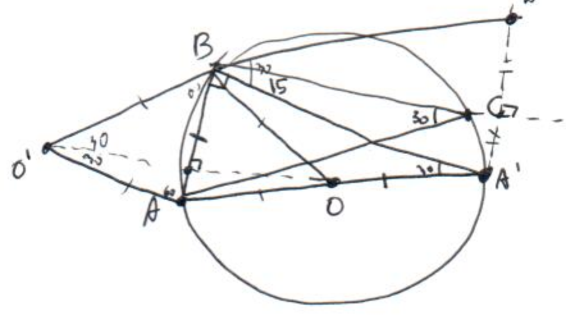
$990000\cdot2$

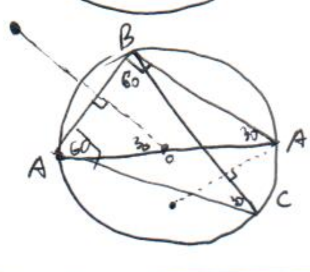
$\times 99$
2
$+19800000$
40000
$+2020000$
400
2020400







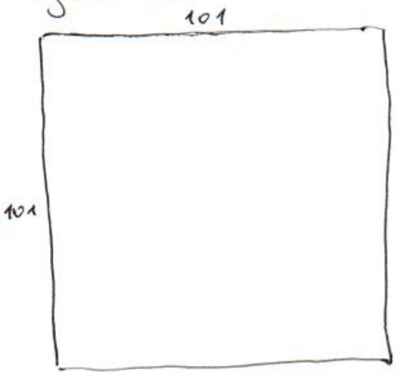




1

ЧИСТОВИК

Задача 2.



Чтобы посчитать кол-во способов ~~разрезать~~ вырезать прямоугольник по линиям сетки ~~так~~ ~~чтобы~~ чтобы не было дырок нужно сначала выбрать где прямоугольник будет начинаться по вертикали ~~(у нас 102 способа это сделать)~~ и ~~выбрать где он будет~~ заканчиваться (~~101 способ это~~ сделать, т.к начинаться и заканчиваться в ~~одном месте он не может~~) (Сначала рассматриваем случай, когда прямоугольник не касается углов (не содержит их))

По вертикали значит 100 способов выбрать начало прямоугольника и 99 конец. ~~Ат~~ Значит всего $\frac{100\cdot 99}{2}$ (т.к начало и конец не важно что из этого начало, а что конец). Дальше у нас 100 способов чтобы выбрать, где прямоугольник будет заканчиваться (т.к резать на 2 ~~прямоугольника~~ части мы не можем). Значит $\frac{100\cdot 99}{2}\cdot 100$ и всего у нас есть 4 варианта как начинать (2 вертикали либо начинать с двух горизонталей) Значит $\frac{100\cdot 99}{2}\cdot 100\cdot 4$.

Теперь кол-во способов, когда в нашем вырезаном прямоугольнике есть ~~хотя бы~~ ровно один угол. Всего 100 способов выбрать конец этого прямоугольника по вертикали и столько же по горизонтали. И всего 4 угла, значит $100\cdot 100\cdot 4$. ~~Е~~ В вырезаном прямоугольнике не может быть 3 углов или 4 углов, т.к он меньшего размера. Если в вырезанном 2 угла, то есть 100 способов выбрать, где заканчивается этот прямоугольник ~~И всего~~ ~~как~~ (2 угла можно быть только соседних)

Всего пар соседних углов 4. Значит способов $100\cdot 4$

Значит всего способов ~~сделать~~ ~~в~~ вырезать у нас

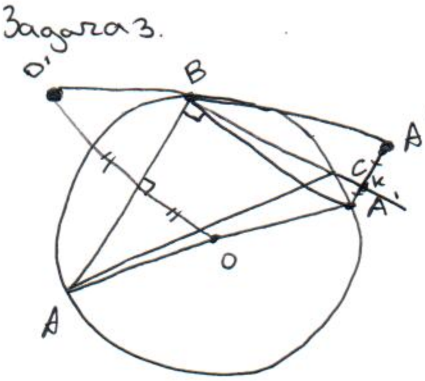
$$\frac{100\cdot 99}{2}\cdot 100\cdot 4+100\cdot 100\cdot 4+100\cdot 4=2020400$$

Ответ: 2020400

79-49-92-86 (128.5)

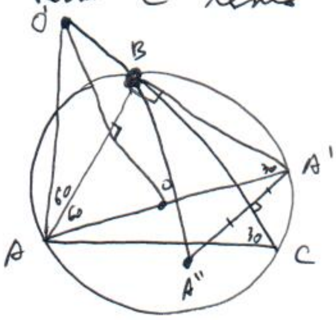
ЧИСТОВИК

Задача 3.



Пусть A' - диаметрально противоположная A.
$\angle ACB = 30^\circ$ $ABCA'$ - вписанный
Значит $\angle BCA = \angle BA'A = 30^\circ$ (опираются на одну и ту же дугу AB)
AA' - диаметр, значит $\angle ABA' = 90^\circ$
$AO = OA' = OB$ (радиусы одной и той же окружности)
$\triangle ABA'$ - прямоугольный $\angle ABA' = 90^\circ$ $\angle AA'B = 30^\circ$, значит катет AB в 2 раза меньше гипотенузы AA', значит $AB = AO = OA' = OB$. Из симметрии $O'B = OB$ и $OA = O'A$ значит $O'B = O'A = AB$ значит $\triangle O'AB$ - равносторонний. Значит $\angle O'BA = 60^\circ$. Зн. точки O', B, A'' лежат на одной прямой значит $\angle O'BA'' = 180^\circ$ Зн. $\angle A'BA'' = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
Из симметрии $A'B = A''B$ ~~и~~ ~~[illegible] зн. B~~
Пусть $BC \cap A'A'' = K$ Из симметрии $A'K = A''K$ значит $\triangle A'BA''$ - равнобедренный $A'A''$ - основание и BK - медиана, значит и биссектриса, значит $\angle A'BK = \angle KBA''$ причем в сумме они 30°. Значит $\angle A'BK = \angle A'BC = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$ Зн. $\angle ABC = \angle ABA' + \angle A'BC = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$.

Если же точка C лежит с другой стороны от AA', то



проделывая те же рассуждения получим что ~~[illegible]~~ если O', B, A'' лежат на одной прямой, то $\angle O'BA = 60^\circ$ а $\angle ABA'' = 180 - 60 = 120^\circ$, но при таком расположении точек A'' будет лежать с другой стороны от BC (в отличии от A') зн. $\angle ABA' = 90^\circ$ и $\angle ABA'' = 120^\circ$, чего не может быть.

Зн. $\angle ABC = 105^\circ$

Ответ: $\angle ABC = 105^\circ$.

ЧЕРНОВИК

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geqslant 0$$

при $a>1$ $\log_2 a>0$

$a>0$ при $a<1$ $\log_2 a<0$

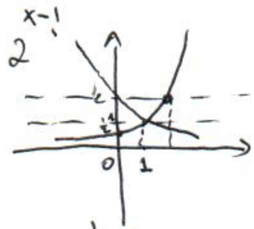
$a^x(a^x-a)-2a(a^x-a)=a^{2x}-a^{x+1}-2a^{x+1}+2a^2$

$(a^x-a)(a^x-2a)=a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)$

$a^{x-1}=t$ $(t-1)(t-2)$ + − + 1 2

$\left[\begin{array}{l} a^{x-1}\leq 1 \\ a^{x-1}\geqslant 2 \end{array}\right.$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 2^{x-1}

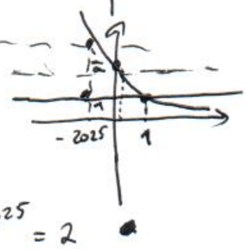


при $a>1$ $a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\geqslant 0$

$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\geqslant 0$

$+\begin{array}{r}1331\\726\\\hline 2057\end{array}$

$\left[\begin{array}{l} a^{x-1}\leq 1 \\ a^{x-1}\geqslant 2 \end{array}\right.$



$\times\begin{array}{r}121\\11\\\hline 121\\121\\\hline 1331\end{array}$

при $a<1$ $a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\leq 0$

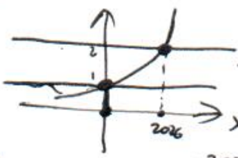
$a>0$

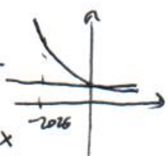
$a^{2025}=2$ $a=\sqrt[2025]{2}$

$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\leq 0$

$+\begin{array}{r}1728\\864\\\hline 2592\end{array}$ $\times\begin{array}{r}121\\6\\\hline 726\end{array}$ $\times\begin{array}{r}12\\11\\\hline 12\\12\\\hline 132\end{array}$

$\begin{cases} a^{x-1}\geqslant 1 \\ a^{x-1}\leq 2 \end{cases}$





$\frac{1}{a}\geqslant 1$ $1\geqslant a$ $1\leq 2a$ $a\geqslant\frac{1}{2}$ $a^{x-1}=2$ $a^{-2027}=2$ $\frac{1}{a^{2027}}=2$

$\frac{1}{a}\leq 2$ $a^{2026-1}=2$ $a^{2025}=2$ $2a^{2027}=1$ $a^{2027}=\frac{1}{2}$

$a=\sqrt[2025]{2}^{-1}$ $a=\sqrt[2025]{2}$

$\frac{1}{\sqrt[2025]{2}}<1$

$\times\begin{array}{r}144\\6\\\hline 864\end{array}$

$a^{x-1}=1$ $a^{-1}\geqslant 1$

$\log_a 2=2025$ $\frac{1}{\log_2 a}=2025$ $\log_2 a=$

$a^{-1}=1$ $\frac{1}{a}\geqslant 1$

$\frac{1}{a}=1$ $a=1$ $1\geqslant a$

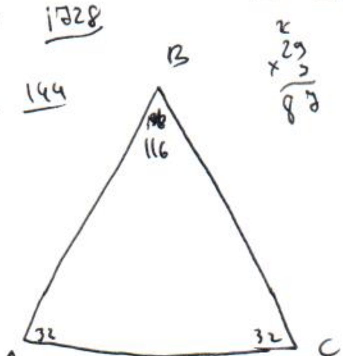
1000 12 $116:4=29$

600 1728

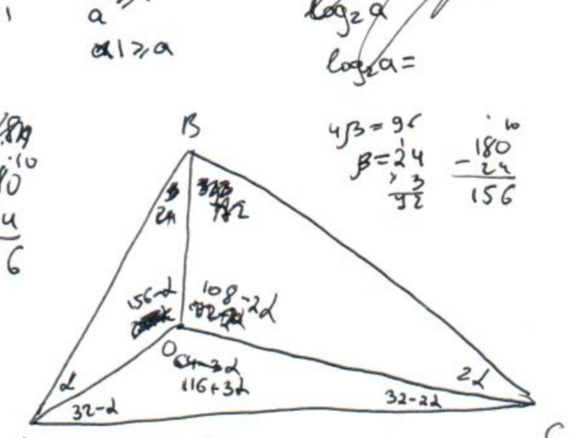
120

$\times 12$ 144

$\times\begin{array}{r}29\\3\\\hline 87\end{array}$ $-\begin{array}{r}180\\64\\\hline 96\end{array}$ $-\begin{array}{r}180\\64\\\hline 116\end{array}$



$4\beta=96$ $\beta=24$ $\times\begin{array}{r}24\\3\\\hline 72\end{array}$ $-\begin{array}{r}180\\24\\\hline 156\end{array}$



$a^3+6a^2+12a=2026$

$a^3+6a^2+12a-2026=0$

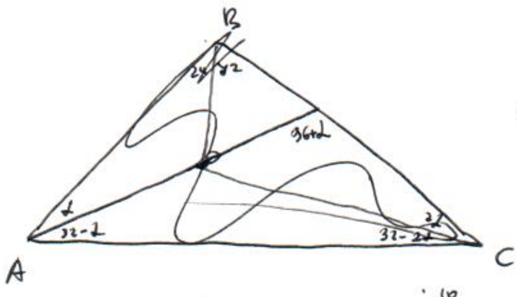
$\frac{2026}{2}$

$64-3\alpha$ $180-64+3\alpha$

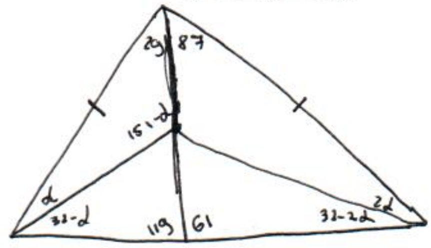
$-\begin{array}{r}180\\72\\\hline 108\end{array}$ $-\begin{array}{r}180\\64\\\hline 116\end{array}$

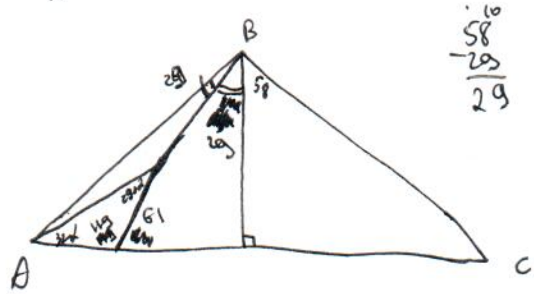
4

ЧЕРНОВИК



$\frac{29}{\sin(151-\alpha)} = \frac{32}{\sin\alpha}$





$58 - 29 = 29$ $\quad 180 - 29 = 151$ $\quad 32 + 29 = 61$ $\quad 87 + 32 = 119$

$2032 - 1014 = 1018$

$116 \cdot 2 = 58$

$58 - 24 = 34$

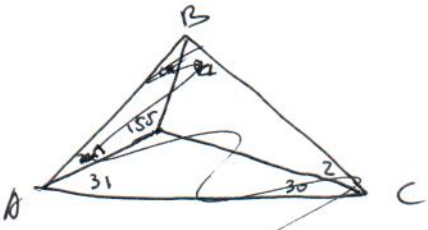
$169 \cdot 6 = 1014$

$\frac{32-\alpha}{\alpha} = \frac{24 \cdot 1}{8 \cdot 3} = \frac{2\alpha}{32-2\alpha}$

$32 \cdot 3 - 3\alpha = \alpha \quad 4\alpha = 32 \cdot 3$

$\alpha = 8 \cdot 3 = 24$

$32 - 24 = 8$ $\quad 24$



$\frac{\sin(32-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 29}{\sin 87}$

$180 - 25$

155

$\alpha = 3$ ✓

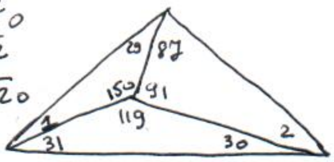
$\alpha = 1^\circ$ $\quad \frac{155}{31} = 155$

$10 \cdot 11 \cdot 12$

$12 \cdot 110 = 1320$

$\frac{154}{2}$

$180 - 58 = 122$ $\quad 180 - 76 = 104$ $\quad 144 \cdot 12 = 1728$



89 $\quad$ 120-1

$150 + 119 = 269$

$269 + 91 = 360$

150

$32 - 87$

$87 - 32 = 55$

91

58 $\quad 180 - 58 = 122$

$149 + 122 = 271$

$271 + 89 = 360$

$\frac{90}{6} = 15$

$2032 - 1350 = 1682$

$144 + 169 = 313$

$313 + 121 = 434$

$225 \cdot 6 = 1350$

$225 \cdot 15 = 1125$, 225, 3405

$434 \cdot 2 = 868$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sin(32-2\alpha)}$ $\quad \alpha = \frac{29}{2}$ $\quad 32 - 29 = 3$

$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$ $\quad abc \le \frac{(a+b+c)^3}{27} = \frac{\pi^3}{8 \cdot 27} = \frac{\pi^3}{\dots}$ $\quad a^3 = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{a+b+c}{3}$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z = \frac{\pi}{6}$ $\quad 2(a^2+b^2+c^2)$ $\quad \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$

$\underbrace{abc}_{} + \underbrace{2(ab+ac+bc)}_{} + \underbrace{4 \cdot (a+b+c)}_{} = 2026$

$121 \cdot 2 = 242$, $242 \cdot 3 = 726$ $\quad 2032 - 868$

$(a+b+c)^2 \ge 0$ $\quad 2(a^2+2a+1)$

$abc + 2(a+1)^2 + 2(b+1)^2 + 2(c+1)^2 \ge 2032$

$abc \ge 2032 - (2(a+1)^2 + 2(b+1)^2 + 2(c+1)^2)$

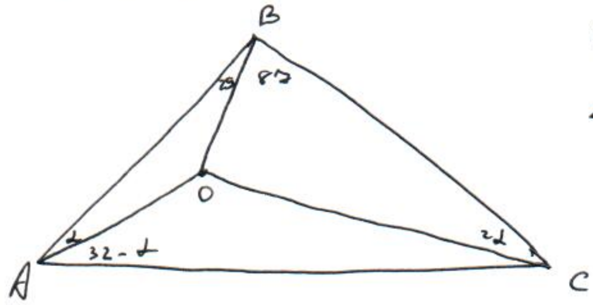
$2(121 + 144 + 169)$

~~800~~ ~~1100~~ $\quad 29$ $\quad 800 \cdot 12$ $\quad 1800$

⑤

ЧИСТОВИК

Задача 6:



Пусть $\angle BAO = \alpha$, тогда $\angle OCB = 2\alpha$

$\angle BAC = 32$ значит $\angle OAC = 32 - \alpha$

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$

$\angle ABC = 180 - 32 - 32 = 180 - 64 = 116$

$\angle OBC$ в 3 раза больше $\angle ABO$

~~Значит $\angle ABC + 3\angle ABO = \angle ABC = 116$~~

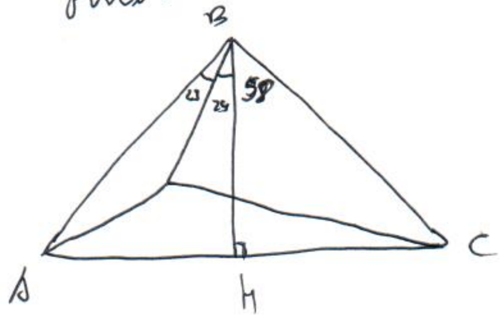
Значит $\angle ABO + 3\angle ABO = \angle ABC = 116^\circ$

$\angle ABO = 29^\circ$

$\angle OBC = 3 \cdot \angle ABO = 3 \cdot 29^\circ = 87^\circ$

Из тригонометрической теоремы Чева получается, что

$\frac{\sin\angle CAO}{\sin\angle OAB} = \frac{\sin\angle ABO}{\sin\angle OBC}$, то есть $\frac{\sin(32-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 29^\circ}{\sin 87^\circ}$



Если мы проведем высоту BH в $\triangle ABC$

Тогда $\angle ABO = 29^\circ$ и $\angle OBH = 29^\circ$

(т.к. $\triangle ABC$ – равнобедренный, AC – основание)

3 Чистовик

Задача 5:

Пусть $\operatorname{tg} x = a$ $\quad \operatorname{tg} y = b$ $\quad \operatorname{tg} z = c$.

Нам нужно найти max abc.

По неравенству между ср. арифм. и ср. геометрическим

$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$ $\quad$ (т.к. $x, y, z < \frac{\pi}{2}$ и $x, y, z > 0$)

Значит $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant abc$ ~~Значит abc~~

~~Значит~~ $\cancel{abc \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 = \frac{\pi^3}{216}}$

~~Равенство достигается при~~ $\cancel{a = b = c}$

~~То есть~~ $\cancel{a^3 = \frac{\pi^3}{216} \Rightarrow a = b = c = \frac{\pi}{6}}$.

~~Значит~~ $\cancel{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \leq \frac{\pi^3}{216}}$ ~~Равенство при~~ $\cancel{\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z =}$

$\cancel{= \frac{\pi}{6}}$ ~~то есть~~ $\cancel{x = y = z = \operatorname{arctg}\frac{\pi}{6}}$.

~~Пусть~~ Нам нужно max значение то есть

когда $abc = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ Оно достигается при

~~tg~~ $a = b = c$ то есть $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z \Rightarrow x = y = z$ ~~x=y=z=arctg~~

Мы знаем, что $x + y + z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

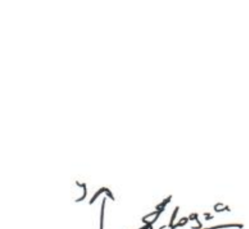
Значит ~~tg~~ max выражения $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = (\operatorname{tg} x)^3 =$

$= \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^3$

Ответ: $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^3$

Задача 4:

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geqslant 0$$



$\log_2 a \neq 0$ $\quad a \neq 1$
$a > 0$

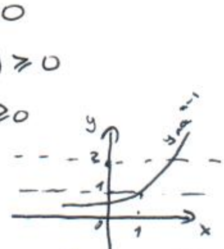
~~ОДЗ При~~ $\cancel{a \geq 1}$ $\quad a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 = a^2(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)$

При $a > 1$ $\quad \log_2 a > 0$ $\quad a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geqslant 0$

$a^2(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2) \geqslant 0$

$(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2) \geqslant 0$

$\left[\begin{array}{l} a^{x-1} \leq 1 \\ a^{x-1} \geqslant 2 \end{array}\right.$



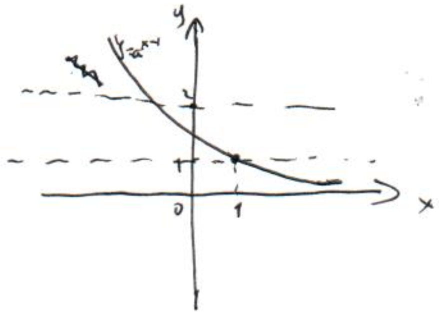
Решением неравенства не будет отрезок длины ≤ 2026 (видно из рис.)

Чистовик.

При $a<1$ $\quad a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\le 0$

$$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\le 0$$

$$\begin{cases} a^{x-1}\ge 1 \\ a^{x-1}\le 2 \end{cases}$$



Чтобы решением был отрезок длины 2026 нужно, чтобы при $x=-2025$ $y=2$ тогда неравенство будет выполнено для всех $x\in[-2025;1]$ то есть отрезок длины 2026.

Тогда $a^{-2025-1}=2$ $\quad a^{-2026}=2$ $\quad \frac{1}{a^{2026}}=2$ $\quad a^{2026}=\frac{1}{2}$

$a=\sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$

Ответ: $a=\sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$

Задача 11

$abc+2(ab+bc+ac)+4(a+b+c)=2026$

$2((a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2)$

ЧЕРНОВИК

$abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$

$abc \geq ?$

$abc \geq 2026 - 2(ab+bc+ac) - 4(a+b+c)$

10 11 12

$1320 \geq 2026 - 2(110 + 120 + 132) - 4 \cdot 33$

$2026 - 724 = 1302$

$110 \cdot 12 = 1320$

$120 + 132 = 252$, $252 + 110 = 362$, $362 \times 2 = 724$

$33 \times 4 = 132$

9 10 11

$990 \geq 2026 - 2(90 + 110 + 99) - 4(30$

$299 \times 2 = 598$, $598 + 120 = 718$

12×11

1320

$132 + 120 = 252$, $252 + 110 = 362$, $362 + 132 = 494$

33

$132 + 120 = 252$, $252 + 110 = 762$

$2026 - 49$

11 12 13

$132 + 142 = 274$, $274 + 156 = 436$

$13 \times 12 = 156$, $156 \times 11 = 1716$

$13 \times 12 = 256$, $256 \times 11 = 2816$

2026

$1716 + 436 = 2152$