



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 26А-910

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по МЕХАНИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ
профиль олимпиады

Альперта Владцара Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«28» МАРТА 2026 года

Подпись участника

19-36-52-64
(115.1)

80 (восемьдесят)

ЧИСТОВИК - 1

№ 1.

Между отравлением (в 13:00 28.03) и прибытием (в 12:00 29.03) самолёта прошло $24 - (13 - 12) = 23$ (часа).

Полдень - 12:00 по местному времени.

Самолёт был в аэропорту в 4 часа.

Самолёт был в аэропорту в $13 - 5 = 6$ (часов). ($t_{ок} = t_{13} - t_n$)

Итого в воздухе: $23 - 4 - 6 = 13$ (часов).

Ответ: 13 часов самолёт находился в воздухе.

№ 2.

Плотность плыка ($0,4 \text{ г/см}^3$) меньше плотности воды (1 г/см^3), а значит пока плык не съели часть будет над водой, часть под водой (т.к. плотность больше 0), следовательно и рыбка, и птичка едят плык без пауз одинаковое время.

За минуту масса плыка уменьшается на: $15 + 5 = 20$ (г) (1)

Время, за которое съедят плык: $\frac{150 \text{ г}}{20 \text{ г/мин}} = 7,5$ (мин.) (2)

(1): $v_0 = v_1 + v_2$, v_0 - скорость поедания плыка; v_1, v_2 - рыбка и птичка.

(2): $t = \frac{M}{v_0}$, t - время съедания; M - масса плыка

Птичка съест: $m = t \cdot v_2$; $m = 7,5 \text{ мин} \cdot 5 \text{ г/мин} = 37,5$ (г)

Ответ: птичка съест 37,5 г плыка.

№ 3.

Дано:

$h = 0,6 \text{ м}$

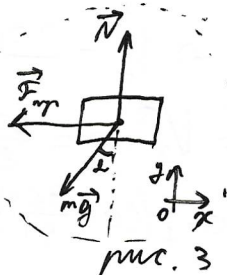
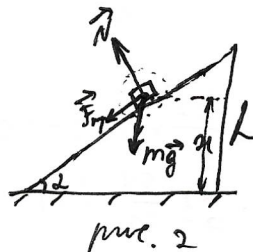
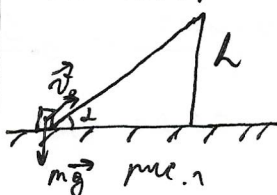
$\sin \alpha = \frac{3}{5}$

$v_0 = 5 \text{ м/с}$

$\mu = 0,25$

$x = ?$

Решение:



по оси OY: $N = \cos \alpha \cdot mg$ (для рис. 3 и 2) (I закон Ньютона)

по оси OX: $mg \cdot \sin \alpha + F_{fr} = ma$ (для рис. 3 и 2) (II закон Ньютона)

$ma = mg \cdot \sin \alpha + \mu N = mg \cdot \sin \alpha + \mu mg \cdot \cos \alpha \Rightarrow a = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$

движение по оси OX: $x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$ (от рис. 1 к рис. 2) \rightarrow макс

$t^* = \frac{-v_0}{2 \cdot (-\frac{1}{2} a)} = \frac{v_0}{a} \Rightarrow x^* = \frac{v_0^2}{2a}$

$x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{2a}$ продолжение на стр. 2

ЧИСТОВИК-2.

N3. (продолжение стр. 1)

$$H = x^* \cdot \sin \alpha = \frac{v_0^2 \cdot \sin \alpha}{2a} = \frac{v_0^2 \cdot \sin \alpha}{2g \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)} = \frac{v_0^2 \cdot \sin \alpha}{2g \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha})}$$

$$H = \frac{5^2 \cdot 0,6}{2 \cdot 10 \cdot (0,6 + 0,25 \cdot \sqrt{1 - 0,6^2})} = \frac{15}{20 \cdot (0,6 + 0,2)} = \frac{15}{16} \text{ (м)}$$

$$\text{Ответ: } \frac{15}{16} \text{ (м).}$$

N4.

$\{a+b+c=150$, где a, b, c — длина, ширина, высота соответственно в см. (от 0 до 150)

$V = abc \xrightarrow{a, b, c} \max$, V — объём коробки (обычной)

по АМ-ГМ: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

~~$$ab(150-a-b) \xrightarrow{a, b} \max$$~~
~~$$-a^2 \cdot b + (150-b)b \cdot a \xrightarrow{a} \max$$~~

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

$$abc \leq 50^3 = 125\,000 = V_1^*$$

~~$$a^* = \frac{-b(150-b)}{2 \cdot (-b)} = \frac{150-b}{2}$$~~

равенство достигается только при $a=b=c=50$

$V_2 = a_2 b_2 c_2$, a_2, b_2, c_2 — длина, ширина, высота соответственно в см. (от 0)

$a_2 \leq 220$ V_2 — объём гиперсферической коробки

$$a_2 \geq k b_2 \text{ (т.е. } b_2 \geq c_2)$$

$$V_2^* = a_2 \cdot \frac{a_2}{k} \cdot \frac{a_2}{k} = \frac{a_2^3}{k^2} \text{ (максимальный объём)}$$

$$V_2^* > V_1^* \Rightarrow \frac{220^3}{k^2} > 50^3 \mid \cdot k^2 \text{ (} k > 0)$$

$$k^2 < \frac{220^3}{50^3} = \left(\frac{22}{5}\right)^3 = (4,4)^3 \Rightarrow k < 4,4^{1,5} \Leftrightarrow$$

~~$$k < 4,4^{1,5} = \left(\frac{22}{5}\right)^{1,5} = \left(\frac{22}{5}\right) \sqrt{\frac{22}{5}} \Leftrightarrow k^2 < 4,4 \cdot 4,4 \cdot 4,4 = 4,4 \cdot (1,76 + 1,76) =$$~~

~~$$= 4,4 \cdot 3,52 = 15,488$$~~

при $k=9$: $k^2=81 < 85,184$; при $k=10$: $k^2=100 > 85,184$

$$k=9 \Rightarrow V_2^* = \frac{220^3}{81}$$

$$m = V_2^* \cdot \rho = \frac{220^3}{81} \cdot 0,5 = \frac{22^3}{81} \cdot 500 = 1000 \cdot \frac{484 \cdot 11}{81} = 1000 \cdot \frac{5324}{81} =$$

$$= 1000 \cdot \frac{65 \cdot 82}{81} = 1000 \cdot 65 \frac{59}{81} \text{ (т)} \Rightarrow m \approx 66 \text{ кг}$$

Ответ: 66 кг.

ЧИСТОВИК-3.

19-36-52-64
(115.1)

N 5.

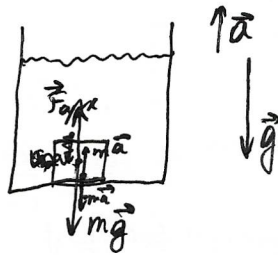
Дано:

$\rho_k = 8\rho_b$

$a = \frac{1}{4}g$

$\frac{P_1}{P_2} = ?$

Решение: ①

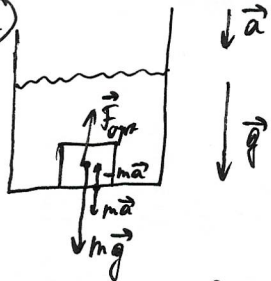


Сосуд будет действовать на кубик с силой $m\vec{a}$ (из-за ускорения), а значит по III з. Ньютона на кубик будет сила $-m\vec{a}$ воздействовать на сосуд, а значит давление воды на кубик увеличится

$|\vec{P}_1| = |m\vec{g}| + |m\vec{a}| - |\rho_b \vec{g} V_k| - |\rho_b \vec{a} V_k|$

$P_1 = V_k (g+a)(\rho_k - \rho_b) = V_k \cdot \frac{5}{4}g \cdot 7\rho_b$

②



Аналогично случаю 1:

$|\vec{P}_2| = |m\vec{g}| - |m\vec{a}| - |\rho_b \vec{g} V_k| + |\rho_b \vec{a} V_k|$

$P_2 = V_k (g-a)(\rho_k - \rho_b) = V_k \cdot \frac{3}{4}g \cdot 7\rho_b$

Итого: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_k \cdot \frac{5}{4}g \cdot 7\rho_b}{V_k \cdot \frac{3}{4}g \cdot 7\rho_b} = \frac{5}{3}$

Ответ: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{3}$.

В решении кубик на дне сосуда т.к. $\rho_k = 8\rho_b > \rho_b \neq 0$, также используется то, что $|\vec{g}| > |\vec{a}|$, при учёте знаков +/-.

р.б.

~~$a_n = 8/4$~~
 ~~$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{(n+3)(n-1)}{(n+4)n}$~~

~~$T = 60 \cdot 30 = 1800 (с.)$~~

~~$a_n + a_{n+1} = a_1 + \sum_{i=2}^n (a_{i-1} \cdot \frac{(i+3)(i-1)}{(i+4)i})$~~

~~$a_n + a_{n+1} = a_1 + \sum_{i=2}^n (a_{i-1} \cdot \frac{(i+3)(i-1)}{(i+4)i})$~~

ЧИСТОВИК-4.

№6.

$$a_1 = 84 = \frac{5}{4} a_1 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right)$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{(n+3)(n-1)}{(n+4)n} = a_{n-2} \cdot \frac{(n+2)(n-2)}{(n+3)(n-1)} \cdot \frac{(n+3)(n-1)}{(n+4)n} =$$

$$= a_{n-3} \cdot \frac{(n+1)(n-3)}{(n+2)(n-2)} \cdot \frac{(n+2)(n-2)}{(n+3)(n-1)} \cdot \frac{(n+3)(n-1)}{(n+4)n} = \dots$$

$$\dots = a_1 \cdot \frac{5 \cdot 1}{6 \cdot 2} \cdot \frac{6 \cdot 2}{7 \cdot 3} \cdot \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 4} \cdot \dots \cdot \frac{(n+1)(n-3)}{(n+2)(n-2)} \cdot \frac{(n+2)(n-2)}{(n+3)(n-1)} \cdot \frac{(n+3)(n-1)}{(n+4)n} = a_1 \cdot \frac{5}{n(n+4)}$$

$$a_n = 5 a_1 \cdot \frac{1}{n(n+4)} = \frac{5}{4} a_1 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right)$$

$$N = 30 \cdot 60 = 1800 \text{ (с.)}$$

$$a_1 + \dots + a_N = \frac{5}{4} a_1 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots \right)$$

$$\dots + \frac{1}{N-6} - \frac{1}{N-2} + \frac{1}{N-5} - \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-4} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N-3} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+4} =$$

$$= \frac{5}{4} a_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4} \right) \right) \approx$$

$$r = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4} < \frac{4}{N+1} = \frac{4}{1801} < \frac{84}{1800} = \frac{1}{450} \quad \left(\frac{1}{100} = 0,01; \frac{1}{25} = 0,04; \frac{1}{45} = 0,022 \dots \right)$$

$$R = \frac{5}{4} a_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{4} \cdot a_1 \cdot \frac{25}{12} = \frac{125}{4} \cdot \frac{84}{12} = \frac{125}{4} \cdot 7 = 31,25 \cdot 7 =$$

$$= 218,75$$

$$\ominus R \approx \frac{5}{4} a_1 \cdot 2 = 218,75 - 105 \cdot 2 > 218 + \frac{3}{4} - \frac{105}{450} = 218 + \frac{3}{4} - \frac{21}{90} =$$

$$= 218 + \frac{3 \cdot 45 - 21 \cdot 2}{180} = \frac{135 - 42}{180} + 218 = 218 \frac{93}{180} = 218 \frac{31}{60} \approx 219 \text{ (мкг)}$$

Ответ: удалось получить 219 микрограмм вещества.

19-36-52-64
(115.1)

ЦЕРНОВИК.

$$\frac{(n+3)(n-1)}{(n+4)n} = \frac{n^2+2n-3}{(n+4)n}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} = \frac{4}{n(n+4)}$$

$$\frac{3}{i} - \frac{1}{i+4} = \frac{4}{i(i+4)}$$

$$\frac{A}{n} - \frac{B}{n+4} = \frac{(A-B)n+4A}{n(n+4)}$$

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+4} + C = \frac{C \cdot n^2 + (A+B+4C) \cdot n + 4A}{n(n+4)}$$

$$C = 1$$

$$A = -\frac{3}{4}$$

$$A+B+4C=2 \Rightarrow B = -\frac{5}{4}$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{3}{4n} - \frac{5}{4(n+4)}\right) = a_{n-1} - \frac{1}{4} a_{n-1} \left(\frac{3}{n} - \frac{5}{n+4}\right)$$

$$\cancel{a_n} \dots \cancel{a_{n-1}} a_{n-1} = a_{n-2} - \frac{1}{4} a_{n-2} \left(\frac{3}{n} - \frac{5}{n+4}\right)$$

$$a_n = a_{n-2} \left(1 - \frac{3}{4(n-1)} - \frac{5}{4(n+3)}\right) \left(1 - \frac{3}{4n} - \frac{5}{4(n+4)}\right)$$

$$a_n = a_{n-1} \frac{(n+3)(n-1)}{(n+4)n} = a_{n-2} \frac{(n+2)(n-2)}{(n+3)(n-1)} \cdot \frac{(n+3)(n-1)}{(n+4)n} =$$

$$= a_{n-3} \frac{(n+1)(n-3)}{(n+2)(n-2)} \cdot \frac{(n+2)(n-2)}{(n+3)(n-1)} \cdot \frac{(n+3)(n-1)}{(n+4)n} = \dots$$

$$\dots = a_1 \cdot \frac{(n-1)(n-3) \dots (5 \cdot 7)}{(n+4)n} = \frac{5 a_1}{(n+4)n}$$

$$a_n = a_1 \cdot \frac{5}{(n+4)n}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{5}{(i+4)i} = a_1 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{5}{48i} - \frac{5}{4(i+4)} \right) = \frac{5}{4} a_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+4} \right) \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} \frac{5}{4} a_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) =$$

$$= \frac{5}{4} a_1 \cdot \left(\frac{25}{12} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right) \right) \approx \frac{125}{48} a_1 = \frac{7}{4} \cdot 125 = 7 \cdot \{37,25 \approx 279 \dots$$

$$\leq \frac{4}{n+1} \leq 0,01$$