0 574259 630009

57-42-59-63
(116.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 261

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Механике и математическому моделированию
профиль олимпиады

Чиликина Родиона Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«28» марта 2026 года

Подпись участника
Родион

100 (сто)

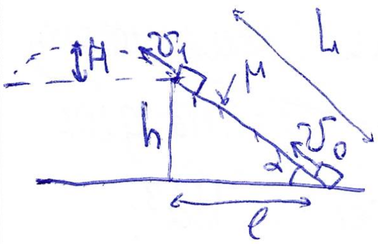
Задача 1. Чистовик

Пусть время в городе Б отстаёт на в часов от города А, а в городе В на с часов от города Б. Тогда в момент вылета самолёта из А в Б было 13 − в часов ⇒ на полёт из А в Б он затратил $t_{АБ} = в - 1 = 12 - (13 - в)$ часов. Из Б в В самолёт вылетел, когда в Б было $12 + 4 = 16$ часов. Тогда в С было $16 - с$ часов. Значит он летел $t_{БВ} = 5 - (16 - c) + 24 = c + 13$ часов т.к. прилетел он 29 марта. В 11 часов (по г. В) в городе А было $11 + в + с$ часов. Тогда если он прилетел в 12 часов, то он летел $t_{ВА} = 12 - (11 + в + с) = 1 - в - с$ часов. ~~Будем сч~~ Будем считать, что

$t_{ВА} = t_{АБ} + t_{БВ} \Rightarrow 1 - в - с = в - 1 + с + 13 \Leftrightarrow 2(в + с) = -11$.

Общее время в воздухе $t = t_{АБ} + t_{БВ} + t_{ВА} = 2t_{ВА} = 2 - 2(в + с) =$ ~~$= 2 - 2\cdot(-11) =$~~ $= 2 + 11 = \boxed{13 \text{ часов}}$ в, с не обязательно положительные

Задача 2.



Определим скорость бруска v_1 в наивысшей точке клина.

ЗСЭ: $\Delta E_{кин} + \Delta E_{пот} = A_{непот} = A_{тр}$. $\Delta E_{кин} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$; $\Delta E_{пот} = mgh$. $A_{тр} = -\mu mgL\cos\alpha$ т.к. сила трения направлена вдоль склона и $|F_{тр}| = \mu mg\cos\alpha$; $L\cos\alpha = l$; $l = \frac{h}{tg\alpha} = \frac{4}{3}h$

Тогда $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} + mgh = -\mu mg\cdot\frac{4}{3}h \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 - 2gh - \frac{8}{3}\mu gh =$

$= 9\frac{м^2}{с^2} \Rightarrow v_1 = 3\frac{м}{с}$ ($g \approx 10\frac{м}{с^2}$)

Задача 2 (продолжение). Чистовик

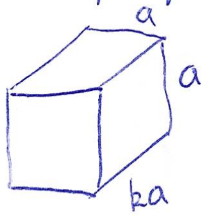
Далее брусок будет двигаться в поле тяжести. Найдём его максимальную высоту подъёма H.

По формуле: ~~отности~~ $H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 0,162$ м. Тогда максимальная высота подъёма $h_{max} = H + h = 0,762$ м $\approx \boxed{0,76\text{ м}}$ т.к. брали $g = 10\frac{м}{с^2}$.

Задача 3.

Заметим, что максимальный объём коробки достигается когда она имеет форму куба. Тогда длина ребра коробки не более чем $a = 50\text{ см} = 0,5\text{ м} \Rightarrow$ её объём не более чем $V = a^3 = 0,125\text{ м}^3$.

Теперь рассмотрим длинномерную коробку.



Для достижения максимального объёма две меньшие стороны длинномерной коробки должны быть одинаковой длины (прямоугольник с заданным периметром и макс. возможной площадью - квадрат). Большая сторона должна быть равна ka т.к. тогда наш параллелепипед наиболее близок к квадрату. ~~Тогда сумма длин 3-х его сторон $a(k+2) = 220$; его объём $V_1 = ka^3$;~~

~~$a = \frac{220}{k+2} \Rightarrow V_1 = \frac{k}{(k+2)^3}\cdot 220^3$. Тогда $\frac{k}{(k+2)^3}$ - наибольшее.~~

~~Возьмём производную и приравняем к 0:~~

~~$\frac{(k+2)^3 - 3k(k+2)^2}{(k+2)^6} = 0 \Rightarrow (k+2)^3 = 3k(k+2)^2 \Rightarrow k+2 = 3k \Rightarrow k =$~~

57-42-59-63 (116.1)

Задача 3 (продолжение) Чистовик

$\cancel{V_1 = 0{,}22^3 \frac{k}{(k+2)^3} \Rightarrow V_1 = 0{,}125 \cdot 0{,}22^3 =}$

$V_1 = ka^3$; но $ka \le 0{,}22 \Rightarrow a \le \frac{0{,}22}{k} \Rightarrow$ максимальный объём $V_1 = \frac{k \cdot 2{,}2^3}{k^3} = \frac{2{,}2^3}{k^2} = \frac{10{,}648}{k^2} > V_0 = 0{,}125\ м^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 < \frac{10{,}648}{0{,}125} = 85{,}184$. Тогда наибольшее возможное целое число, подходящее под это условие это 9.

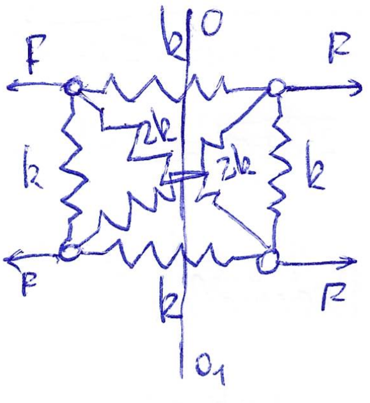
Тогда $k = 9 \Rightarrow V_1 = \frac{10{,}648}{9^2} = \frac{10{,}648}{81}\ м^3 = \frac{10648000}{81}\ см^3 =$

$= \frac{10648}{81}\ дм^3$. Плотность $\rho = 0{,}5 \frac{кг}{дм^3}$. Тогда макс. масса

$m = \rho V_1 = \frac{10648 \cdot 0{,}5}{81} = \frac{5324}{81}\ кг \approx 65\frac{59}{81}\ кг \approx \boxed{66\ кг}$

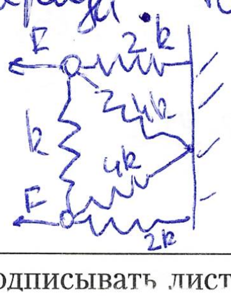
т.к. $65\frac{59}{81} > 65\frac{1}{2}$ ведь $59 > \frac{81}{2} \Rightarrow$ округляем в больш. сторону. Причём $V_1 > V_0$ по условию $\Rightarrow$ подставляем V_1.

Задача 4.



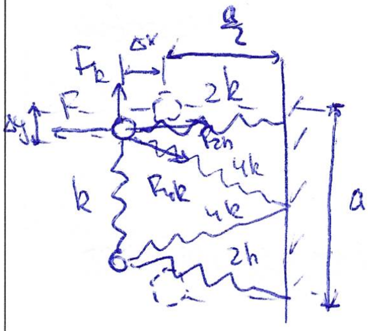
$k_1 = 2k$

Заметим, что система симметрична отн. $OO_1 \Rightarrow$ мысленно разрежем её на 2 части, и посчитаем жёсткость только одной из них. Полученная жёсткость будет в 2 раза больше исходной, т.к. каждую пружину мы укоротили в 2 раза. Тогда наша система выглядит след. образом:

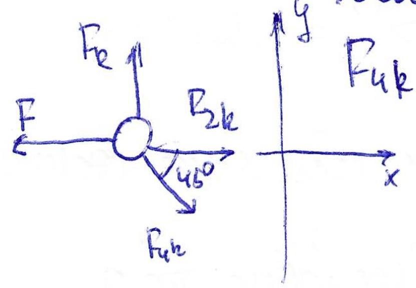


Пусть оба шарика сдвинутся влево на малое расстояние Δx.

Задача 4 (продолжение) Чистовик



Пунктиром показаны исходные позиции шариков. Расставим силы, действующие на шарики. В силу малости Δx и Δy $F_k \perp F$; $F_{2k} \parallel F$; F_{4k} действует под углом $45^\circ = \alpha$ к F_{2k}.



Запишем II ЗН в проекции на x:

$$ma_x = F_x + F_{kx} + F_{2kx} + F_{4kx} = F_{2k} + \frac{\sqrt{2}}{2}F_{4k} - F = 0$$

т.к. шарик покоится.

Запишем II ЗН в проекции на ось y: $ma_y = F_y + F_{ky} + F_{2ky} + F_{4ky} = F_k - \frac{\sqrt{2}}{2}F_{4k} = 0$ т.к. шарик покоится. $F_{2k} = 2k\Delta x$ т.к. растяжение пружины жёсткостью 2k это Δx. Аналогично $F_k = k\cdot 2\Delta y = 2k\Delta y$, т.к. она сжалась на Δy с каждой стороны. Первоначальная длина пружины жёсткостью 4k $\frac{\sqrt{2}a}{2}$, где a сторона квадрата (см. рисунок). Конечная длина этой пружины по т. Пифагора

$$l_{4k} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}+\Delta x\right)^2 + \left(\frac{a}{2}-\Delta y\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a\Delta x + \cancel{\Delta x^2} + \frac{a^2}{4} - a\Delta y + \cancel{\Delta y^2}} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{a^2}{2} + a(\Delta x - \Delta y)} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{2a}{2}(\Delta x - \Delta y)} = \frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{1 + \frac{2(\Delta x - \Delta y)}{a}} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{2}}{2}a\left(1 + \frac{\Delta x - \Delta y}{a}\right).$$ Тогда $\Delta l_{4k} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\Delta x - \Delta y)$. Подставим в II ЗН в проекции на ось y: $2k\Delta y - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\Delta x - \Delta y)\cdot 4k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\Delta y = 2(\Delta x - \Delta y) \Rightarrow \Delta x = 2\Delta y$. $F = F_{2k} + \frac{\sqrt{2}}{2}F_{4k} = k_{экв}\Delta x$ т.к. мы растягиваем влево. $k_{экв}\Delta x = 2k\Delta x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\Delta x - \Delta y)\cdot 4k =$

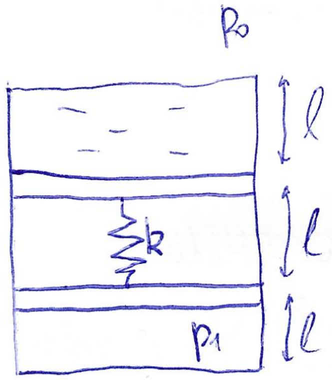
$$= 2k\Delta x + 2k(\Delta x - \Delta y) = 2k\Delta x + 2k\left(\Delta x - \frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow k_{экв} = 2k + 2k\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= 3k = 300\ \frac{Н}{м}.$$

Задача 4 (продолжение)   Чистовик

Но это жёсткость левой „половины", полная жёсткость системы $k' = \frac{k_{экв}}{2} = \boxed{150\,\frac{Н}{м}}$ Моё решение верно при $\frac{F}{k} << l_{пруж}$, где $l_{пруж}$ – длина пружины в ненапряж. состоянии.

Задача 6.



В начальный момент сила давления газа уравновешивает вес обоих поршней, воды и силу давления атмосферы $\Rightarrow p_1 S = 2mg + mg + p_0 S$ $\Rightarrow p_1 = \frac{3mg}{S} + p_0$. Пусть в случайный момент времени уровень воды l_1. Тогда масса воды $m_1 = \frac{m l_1}{l}$. Отсюда давление газа $p_1' = p_0 + \frac{2mg}{S} + \frac{m l_1 g}{lS}$. Найдём объём газа. В начальный момент пружина сжата на $l_0 \Rightarrow k l_0 = 2mg + p_0 S \Rightarrow$ $\Rightarrow l_0 = \frac{2mg + p_0 S}{k}$. Тогда длина пружины $l_н = l + l_0$. Но $k l_2 =$ $= mg + \frac{m l_1}{l} g + p_0 S \Rightarrow l_2 = \frac{mg(1 + \frac{l_1}{l}) + p_0 S}{k}$ – сжатие пружины, когда уровень воды l_1.   Это не зачеркнуто!

Поймём, что происходит в задаче на качественном уровне. Нагревая газ, вода будет медленно выливаться, до момента, когда сработает „эффект гейзера" и газ вытолкнет всю воду вверх.

Задача 6 (продолжение). Чистовик

В нач. момент $p_1 S l = \nu R T_0$. Пусть эффект гейзера сработает, когда уровень воды l_1. Тогда макс приращение изменения давления газа и давление на газ равны. Тогда $p_\Gamma S l_1 = \nu R T_\Gamma = (p_\Gamma - dp_\Gamma) S (l_1 + dl_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_\Gamma l_1 = (p_\Gamma - dp_\Gamma)(l_1 + dl_1) \Rightarrow p_\Gamma l_1 - dp_\Gamma l_1 + p_\Gamma dl_1 - \cancel{dp_\Gamma dl_1}^{\to 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dp_\Gamma = \frac{p_\Gamma}{l_1} dl_1 = \rho g dl_1 \Rightarrow p_\Gamma = \rho g l_1$$

Тогда длина пружины в новом положении

$$l_{пр1} = l_{п1} - l_2 = l + l_0 - l_2 = l + \frac{2mg + p_0 S}{k} - \frac{mg(1 + \frac{l_1}{l}) + p_0 S}{k} = l + \frac{mg(1 - \frac{l_1}{l})}{k}.$$

Тогда „высота" газа $l_1' = 3l - l_{пр1} - l_1 = 2l - \dfrac{mg(l - l_1)}{kl} - l_1$.

В нач. момент $p_1 S l = \nu R T_0$. В произвольный момент

$$p_1' S l' = \nu R T' \Rightarrow \frac{T'}{T_0} = \frac{p_1' l'}{p_1 l} = \frac{\left(p_0 + \frac{2mg}{S} + \frac{m l_1 g}{S l}\right)\left(2l - \frac{mg(l - l_1)}{kl} - l_1\right)}{\left(\frac{2mg}{S} + p_0\right) l} =$$

$$= \frac{\left(p_0 S + 2mg + m\frac{l_1}{l} g\right)\left(2l - \frac{mg(l - l_1)}{kl} - l_1\right)}{(2mg + p_0 S) l}.$$

Это парабола, и эффект гейзера сработает, когда $\dfrac{T'}{T_0}$ максимально.

$$\frac{T'}{T_0} = \Big(2p_0 S l - \frac{p_0 S mg}{k} + \frac{p_0 S mg}{kl} l_1 - p_0 S l_1 + 4mgl - \frac{2m^2 g^2}{k} + \frac{2m^2 g^2}{kl} l_1 + 2mg l_1 -$$

$$- \cancel{\frac{m^2 g^2}{kl}} l_1 + \frac{m^2 g^2}{kl^2} l_1^2 - \frac{mg}{l} l_1^2\Big) \Big/ (2mg + p_0 S) l$$

Задача 6 (продолжение) Чистовик

Откуда $l_{1B} = \frac{-b}{2a} = \frac{p_0 S - \frac{p_0 S m g}{kl} - \frac{m^2 g^2}{kl} - 2mg}{2\left(\frac{m^2 g^2}{k l^2} - \frac{mg}{l}\right)}$.

$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}\nu R(T_B - T_0) + A$. Работа газа складывается из изменения пот. энергии воды, а поршней и пружины. $\nu R T_0 = p_1 S l$; $\nu R T_B = p_B S l_{ГB}$. $p_B = p_0 + \frac{2mg}{S} + \frac{m l_{1B} g}{lS}$;

$l_{ГB} = 2l - \frac{mg(l - l_{1B})}{kl} - l_{1B} \Rightarrow \nu R T_B = \left(p_0 S + \frac{2mg}{\cancel{S}} + \frac{m l_{1B} g}{l \cancel{S}}\right) \left(2l - \frac{mg(l-l_{1B})}{kl} - l_{1B}\right)$

$l_{ПB} = l + \frac{mg(l - l_{1B})}{kl}$. Изменение пот. энергии нижнего поршня $E_{mgн} = mg(l_{ГB} - l) = mg\left(2l - \frac{mg(l-l_{1B})}{kl} - l_{1B}\right)$.

Изменение пот. энергии верхнего поршня $E_{mgB} = mg(l_{ГB} - l + l_{ПB} - l) = mg(2l - l_{1B})$. Для пружины $E_{пр} = \frac{k}{2}\left((l_{П1} - l_{ПB})^2 - l_2^2\right)$.

Для воды $E_{H_2O} = \cancel{\frac{m l}{lS} g} \; \cancel{\frac{m l_{1B} g}{l}} \; mg(l - l_{1B})\left(l_{1B} + \frac{l - l_{1B}}{2}\right) = mg(l - l_{1B})\frac{l + l_{1B}}{2}$. После подстановки всех значений в исходную формулу и приведения подобных мы получим ответ.

Задача 5. Чистовик

В 1-ю секунду ~~по условию~~ образовалось 84 мкгр. вещества по условию. ~~В k-ю секунду образовалось~~

$\cancel{\frac{84}{35}\cdot(k+3)}$ Во 2-ю секунду образовалось $84\cdot\frac{(2+3)(2-1)}{(2+4)\cdot 2}=$

$=35$ мкгр вещ-ва. Тогда в k секунду образовалось

$35\cdot\frac{(3+3)\cdot(3-1)}{(3+4)\cdot 3}\cdot\frac{(4+3)\cdot(4-1)}{(4+3)\cdot(4-1)}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{(k+3)(k-1)}}{(k+4)k}=\frac{\cancel{8}\,12\,\cancel{(k+3)(k-1)}}{k(k+4)}\cdot 35=\frac{\cancel{280}\,420}{k(k+4)}$

мкгр вещества. Тогда полная масса вещества

$m=84+\sum\limits_{k=2}^{30\cdot 60}\frac{420}{k(k+4)}=84+420\sum\limits_{k=2}^{1800}\frac{1}{k(k+4)}=420\sum\limits_{k=1}^{1800}\frac{1}{k(k+4)}$

Но $\frac{1}{k(k+4)}=\frac{1}{4k}-\frac{1}{4(k+4)}\Rightarrow m=420\left(\sum\limits_{k=1}^{1800}\frac{1}{4k}-\sum\limits_{k=1}^{1800}\frac{1}{4(k+4)}\right)=$

$=105\left(\sum\limits_{k=1}^{1800}\frac{1}{k}-\sum\limits_{k=5}^{1804}\frac{1}{k}\right)=105\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{1801}+\frac{1}{1802}+\frac{1}{1803}+\frac{1}{1804}\right)\right)$

много меньше чем $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

$\approx 105\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\cancel{105\cdot\frac{25}{12}}=105+52{,}5+35+26{,}25=$

$=140+78{,}75=218{,}75\approx\boxed{219\text{ мкгр}}.$

Черновик

$pSl_1 = \nu RT$ $\cancel{p-d}$ $(p-dp)S(l_1+dl_1) = \nu RT_2$

$= pSl_1$

$(p-dp)(l_1+dl_1) = pl_1$

$pl_1 + pdl_1 - dpl_1 = pl_1 \Rightarrow dpl_1 = \frac{p}{l} dl_1 = \rho g dl_1$

$\frac{(n+4)n}{(n+3)(n-1)}$

1 2 3 4

84 35 20

$\frac{\cancel{35}^{5} \cdot \cancel{4}^{2} \cdot 2}{7 \cdot \cancel{5}} = 2$

$\frac{8 \cdot 4}{7 \cdot 3}$ $\frac{\cancel{12}^{3} \cdot 7 \cdot 3}{8 \cdot 4} = \frac{63}{8}$ $\frac{(n+3)(n-1)}{n(n+4)}$

$84 \cdot \frac{(n+3)(n-1)}{n(n+4)} \cdot \frac{(n+4)n}{(n+5)(n+1)} \ldots\ldots$

$k=3$

$35 \cdot$ $\sum_{1}^{1899} \frac{1}{k(k+4)}$ $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+4} = \frac{A(k+4)+Bk}{k(k+4)}$

$\frac{\pi^2}{6}$

$Ak + 4A + Bk = 1 \Rightarrow$ $A+B=0$, $4A=1$ $\Rightarrow A = \frac{1}{4}$ $B = -\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4k} - \frac{1}{4(k+4)}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$

$dp_1' = \frac{mg\,dl_1}{lS} = \rho g dl_1$

$mg = \rho g l_r S$

p_0

l $(p_0+\rho g l)Sl = \nu RT_0$ $p_0 = \rho g l$

$l_r = \frac{mg}{\rho g S} = l$

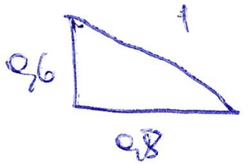
l $(p_0+\rho g l_1)S(2l-l_1) = \nu RT_1 \Rightarrow \frac{T_1}{T_0} = \frac{p_0+\rho g l_1}{p_0+\rho g l} \cdot \frac{2l-l_1}{l}$

$\frac{l+l_1}{2l} \cdot \frac{2l-l_1}{l} = \frac{T_1}{T_0}$ $\frac{2l^2 - ll_1 + 2ll_1 - l_1^2}{2l^2} = \frac{T_1}{T_0} =$

$= \frac{-l_1^2 + ll_1 + 2l^2}{2l^2}$ $l_1 = \frac{-l}{-2} = \frac{l}{2}$ $\frac{T_1}{T_0} = \frac{9}{8}$

Черновик

$-1 \quad 1-b-c = b+c+12 \Rightarrow -11 = 2(b+c)$



$0{,}6 \cdot \frac{4}{3} = 0{,}8$

$25 - 2 \cdot 10 \cdot 0{,}6 - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} =$

$= 25 - 12 - 4 = 9$ м

$y = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$

$t_B = \frac{-v_0 \sin\alpha}{-g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{max} = \frac{2v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{2v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$\frac{9 \cdot \frac{9}{25}}{20} = \frac{81}{25 \cdot 20} = \frac{81}{500} = \frac{0{,}81}{5} = \cancel{0{,}20}\ 0{,}162$

$\left(\frac{4}{25}\right)'$ $\quad (k+2)^3$

$81 : 5 = 16{,}2$; $\ -5$; 31; -30; 10

$\frac{u^4v^2 - v^4 u}{v^2} = 1 - (k+2)^3 - 3(k+2)^2 \cdot 1$

$(22)^2 = 400 + 2 \cdot 2 \cdot 20 + 4 = 484$

$\frac{10{,}648}{k^2} > 0{,}125 \,|\cdot 8$

484×22: 968, $+968$, $= 10648$

$10648 \times 8 = 85184$

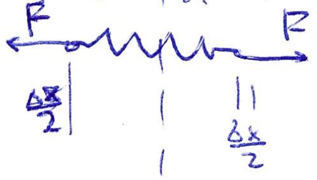
$\frac{8 \cdot 10{,}648}{k^2} > 0{,}1$

$k^2 <$

$5324 : 81 = 65$; -486; 464; -405; 59

$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \cancel{\frac{(n+5)(n+1)}{(n+4)\,n}} \cdot \frac{(n+3)(n-1)}{(n+4)\,n}$

$2k \quad 1 \quad 2k \quad (n \neq 4)$



$k\Delta x = F \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k}$

$\Delta x_1 = \frac{F}{2k} = \frac{\Delta x}{2}$

$k = \frac{F}{\Delta x_1}$

1 см
$1\,Н \Rightarrow 100\,\frac{Н}{м}$
$0{,}5\,см \Rightarrow 200\,\frac{Н}{м}$

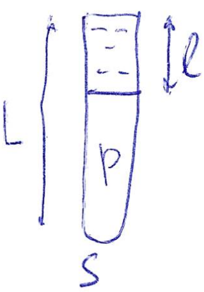
$2\Delta y - 2(\Delta x - \Delta y) = 0$

$2\Delta y + 2\Delta y = 2\Delta x$

$2\Delta y = \Delta x$

$\frac{2a(\Delta x - \Delta y)}{2} \cdot \frac{2}{a^2} =$

p_0



$p = p_0 + \rho g l;\ V = S(L-l)$

$pV = \nu RT \quad (p_0 + \rho g l) S(L-l) = \nu RT = p_0SL - p_0Sl +$

$+ \rho g S L l - \rho g S l^2$

$\rho g S l^2 + l(p_0S - \rho g SL) + \nu RT - p_0SL = 0$

$D = 0$