



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «Ломоносов»
наименование олимпиады

по ФИЗИКЕ
профиль олимпиады

Щапкиной Марьи Владимировны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» ФЕВРАЛЯ 2020 года

Подпись участника
[подпись]

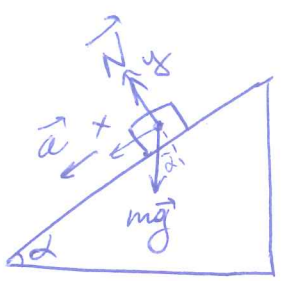


09-82-37-81 (2.11)

1	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20

№1.5.2
 Дано:
 $v = 0,5 \text{ м}; b = 0,1 \text{ м};$
 $c_1 = c_2 = 1 \text{ с};$
 $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; d = 1 \text{ м};$

Решение. Т.к. ков-ть гладкая, то для трения отсутствует. Т.к. брусок - абсолютно твердое тело, то его точки движутся с одинаковой скоростью в любой момент вр. По 3-му закону Ньютона: $m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$



$Ox: ma = mg \sin \alpha; Oy: N = mg \cos \alpha;$
 $a = g \sin \alpha;$ Запишем закон движения в виде уравнения для любой точки бруска (считаем, что начальная координата и скорость: $x_0 = 0 \text{ м}; v_0 = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}};$)
 $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{g \sin \alpha t^2}{2}$
 $v(t) = v_0 + at = g \sin \alpha t$

Ротаметр перекрывает, пока брусок находится на нем → время перекрывания фотоэл. это время, за которое брусок пройдет путь, равное своей длине в начальный момент времени на фотоэле.

$$b = x(t+c_1) - x(t+c_2) = \frac{g \sin \alpha (t+c_1)^2}{2} - \frac{g \sin \alpha (t+c_2)^2}{2}$$

$$b = x(t+c_1+c_2) - x(t+c_2) = \frac{g \sin \alpha (t+c_1+c_2)^2}{2} - \frac{g \sin \alpha (t+c_2)^2}{2}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{(t+c_1)^2 - (t+c_2)^2}{(t+c_1+c_2)^2 - (t+c_2)^2} = \frac{t^2 + 2tc_1 + c_1^2 - t^2 - 2tc_2 - c_2^2}{t^2 + 2t(c_1+c_2) + c_1^2 + 2tc_2 + c_2^2}$$

$$-t^2 - 2tc_2 - c_2^2 = t^2 + 2tc_1 + c_1^2 - t^2 - 2tc_2 - c_2^2 \Rightarrow c_1^2 + 2tc_1 = c_2^2 + 2tc_2$$

$$2t(c_1 - c_2) = c_2^2 - c_1^2 + 2tc_2 \Rightarrow t = \frac{c_2^2 + 2tc_2 - c_1^2}{2(c_1 - c_2)}$$

t - время от старта, до начала перекрывания первого фотоэл.

$$b = \frac{g \sin \alpha}{2} (t^2 + 2tc_1 + c_1^2) - \frac{g \sin \alpha}{2} (t^2 + 2tc_2 + c_2^2) = \frac{g \sin \alpha}{2} (c_1^2 + 2tc_1 - c_2^2 - 2tc_2)$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{2b}{g} \cdot \frac{(2tc_1^2 - 2tc_2^2 + 2tc_1^2 + 4tc_1c_2 - 2tc_2^2)}{2(c_1 - c_2)} =$$

$$= \frac{2b}{g} \cdot \frac{2c_1(c_1 - c_2)}{2(c_1 - c_2)} = \frac{2b(c_1 - c_2)}{g c_1 c_2 (c_2 + 2c_1 - c_1)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,1 \cdot (2 - 1)}{10 \cdot 1 \cdot (1 + 2 \cdot 0,5 - 2)} = \frac{1}{10 \cdot (1,02 - 1)} = \frac{1}{10 \cdot 0,02} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Ответ: $\alpha = \arcsin \left(\frac{2b(c_1 - c_2)}{g c_1 c_2 (c_2 + 2c_1 - c_1)} \right) = 30^\circ;$ 10

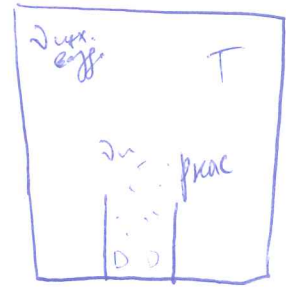
№ 2.3.2

Числовик

Дано:

$T = 273 \text{ K}; \Delta m = 1 \text{ кг}; R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}$
 $p_{\text{нас}} = 611 \text{ Па}; \lambda_k = 3,3 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$
 $\nu_n = 23 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}; \mu = 18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
 $V = ?$

Решение: $T = 273 \text{ K} = t + 273 \Rightarrow t = 0^\circ \text{C} \Rightarrow t$ и T одна и та же температура в равновесии
 $\nu_n = \frac{m}{\mu}$; масса испарившейся вода станет конденсированной паром, т.к. наступит динамическое равновесие между водой и паром.
 Из закона сохранения энергии:



$Q_{\text{исп}} = Q_{\text{кр}}; Q_{\text{кр}} = \Delta m \lambda_k; Q_{\text{исп}} = m_n \nu_n \Rightarrow m_n = \frac{\Delta m \lambda_k}{\nu_n}; \nu_n = \frac{m_n}{\mu} = \frac{\Delta m \lambda_k}{\mu m_n}$

~~Закон Менделеева-Клапейрона~~

Уравнение состояния газа при насыщении пара в камере имеет вид:

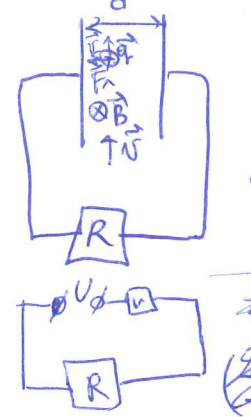
$p_{\text{нас}} V = \nu_n R T; p_{\text{нас}} V = \frac{\Delta m \lambda_k}{\mu \nu_n} R T \Rightarrow V = \frac{\Delta m \lambda_k R T}{\mu \nu_n p_{\text{нас}}} = \frac{1 \cdot 3,3 \cdot 10^5 \cdot 8,3 \cdot 273}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 23 \cdot 10^6 \cdot 611} = \frac{83 \cdot 83 \cdot 273 \cdot 10^3}{18 \cdot 2,3 \cdot 611 \cdot 10^3} = \frac{11 \cdot 83 \cdot 91}{2 \cdot 2,3 \cdot 611} = \frac{830830}{28106} \text{ м}^3 \approx 29 \text{ м}^3$

Ответ: $V = \frac{\Delta m \lambda_k R T}{\mu \nu_n p_{\text{нас}}} = \frac{830830}{28106} \text{ м}^3 \approx 29 \text{ м}^3$

№ 3.3.2

Дано:

$R = 99 \text{ Ом}; d = 40 \text{ м}; U = 10 \text{ В}; P_m = 1 \text{ Вт}; B = ?$



Решение: на частицу действует сила тяжести $F_n = qU$; из-за этого частицы начинают двигаться между пластинами и возникает э. ток I .
 э. ток I создается (т.к. объем жидкости между пластинами все время уменьшается и жидкость движется - $v = \cos t$) U -напряжением между пластинами. на частицу действует сила со стороны э. поля между пластинами:
 $F_{\text{эл}} = qUd; F_{\text{эл}} = F_n \Rightarrow qUd = qU \Rightarrow U = Ubd$
 ~~$I R = \frac{U^2}{(R+r)^2} R$~~
 ~~$I = \frac{U}{R+r}$~~
 ~~$U + I r = I R \Rightarrow I = \frac{U}{R+r}$~~



Черновик:

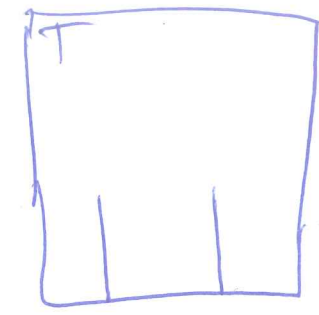
$$q_{\text{дв}} = q_{\text{вв}} \Rightarrow U = U_{\text{вд}} - IR_{\text{в}} \quad | \quad \text{?}$$

$$IR \neq Ir = U_{\text{вд}}$$



09-82-37-81
(2.11)

Черновик:



$$V = E + Ir$$

$$I = \frac{E}{r+R} \Rightarrow U = \frac{E(2r+R)}{r+R}$$

$$P_{\text{вв}} = \Delta m \lambda c$$

$$P_{\text{вв}} = m v_n = Q_{\text{вв}} = \Delta m \lambda c$$

$$m_n = \frac{\Delta m \lambda c}{v_n} (8r + 4R)(R+v)^2$$

$$2(R+v) - (2r+R)$$

$$v_n = \frac{m_n}{\mu} \quad | \quad \text{при } V = \frac{m_n}{\mu} RT = v_n$$

$$V = \frac{m_n RT \Delta m \lambda c}{\mu v_n \text{при } c}$$

Handwritten calculations and a small diagram:

$$I = \frac{E}{r+R} (v+R)$$

$$2E^2v^2 + 2R^2E^2 - 2vE^2(v+R)^2$$

Diagram of a coil in a magnetic field:

Equations:

$$m v_n = \Delta m \lambda c$$

$$V = \frac{\Delta m \lambda c RT}{\text{при } \mu v_n}$$

$$E - Ir = IR$$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

$$d = F \cos(90^\circ - \alpha) = F \sin \alpha$$

$$\frac{1}{f} = \frac{\sin \alpha - 1}{F \sin \alpha} \Rightarrow f = \frac{F \sin \alpha}{\sin \alpha - 1}$$

Force diagrams and calculations:

$$2R = w$$

$$\frac{2(v+R)}{r} \left(\frac{R}{r} \right) \left(U - \frac{Uv}{v+R} \right) = \frac{U}{R} \left(-\frac{v(v+R)-w}{(v+R)^2} \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \right)$$

$$(2r+2R)r^2 - 2r(v+2rR+R^2)$$

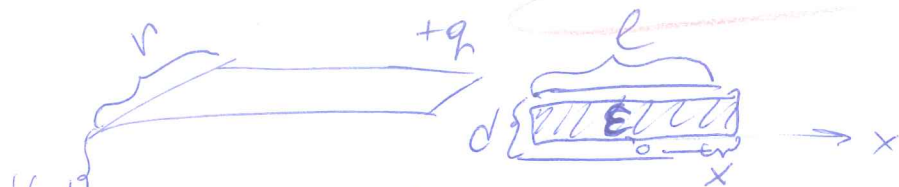
$\frac{E}{r+R} = \frac{E}{r+R}$
 $\frac{R-r}{r+R} = 1$
 $\frac{U}{R+r}$
 $P = \frac{(vBd)^2 R}{(R+r)^2}$
 $kP = \frac{R}{(r+R)^2}$
 $r=R: P = \frac{1}{4R}$
 $v = \frac{1}{2}R: P = \frac{1}{4R}$
 $v=0: P = \frac{1}{4R}$
 $v=2R: P = \frac{1}{4R}$

$\beta = 90^\circ - \alpha + \arctg \frac{F \sin \alpha}{F}$
 $\beta = 90^\circ - \alpha + \arctg(\sin \alpha)$
 $2R(r+R)R^2 - R^2 v(2v+R) = 0$
 $2v + 2R - 2v - R = 0$
 $l F \sin \alpha \cos \alpha + l F \sin^2 \alpha \cot \beta = F \cot \beta + l F \cot \beta$
 $l = \frac{F \cot \beta}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cot \beta}$
 $x = l + 3F \Rightarrow F = \frac{3}{3 + \frac{\cot \beta}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cot \beta}}$
 $\cot \beta = + \operatorname{tg}(\arctg(\sin \alpha) + \alpha)$
 $\cot \beta = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha} = \frac{1 - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 1}$
 $U = IR$
 $I = \frac{E}{r+R} = \frac{vBd}{r+R}$
 $P = I^2 R = \frac{(vBd)^2 R}{(r+R)^2}$
 $0 = P' = \frac{(vBd)^2 (r+R)^2 - (2v+2R)v(vBd)^2}{(r+R)^4}$
 $r^2 + 2vR + R^2 - 2v^2 - 2Rv = 0$
 $r = R \Rightarrow P = \frac{(vBd)^2 R}{4R^2}$

№55.22.
 Дано: $l = 20 \text{ cm}; U_0 = 100 \text{ V};$
 $d = 1 \text{ mm}; x = 0,1 \text{ mm};$
 $x \ll d \ll l; \epsilon = 4;$
 $T = 4,35 \text{ c}; \epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m};$
 $\frac{1}{1+x} \approx 1; m = ?;$

Решение: ёмкость точечного конденсатора с пластиной:
 $C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} = \frac{\epsilon \epsilon_0 v l}{d}$; если пластина вывинута на x , то конденсатор можно представить как 2 соэф. параллельно конденсатора с общей ёмкостью:
 $C = C_{\epsilon} + C_{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\epsilon_0 x v}{d} + \frac{\epsilon \epsilon_0 v (l-x)}{d} = \frac{\epsilon_0 v (x + \epsilon(l-x))}{d}$
 Начальная энергия конденсатора: $W_0 = \frac{C_0 U_0^2}{2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 v l U_0^2}{2}$; где $U \cdot C_{\epsilon} = U_0 C_{\epsilon_0 \epsilon}$
 $\Rightarrow U = U_0 \frac{\epsilon_0 \delta}{\epsilon}; \frac{\epsilon \epsilon_0 \delta}{\epsilon} = \frac{U_0}{\epsilon}$
 $W_0 = \frac{\epsilon_0 v l U_0^2}{2 \epsilon^2}$; Энергия конденсатора с вывинутой пластиной: $W = \frac{C U_0^2}{2 \epsilon^2} = \frac{\epsilon_0 v U_0^2}{2 d \epsilon^2} (x + \epsilon(l-x))$
 поле между пластинами: $E = \frac{\epsilon \epsilon_0 G}{2d} = \frac{\epsilon \epsilon_0 q}{d \cdot S} = \frac{\epsilon \epsilon_0 U}{d v \epsilon} = \frac{\epsilon_0 U_0}{d v \epsilon}$ т.к. пластины квадратные: $v = l$
 Уравнение колебаний пластины:
 $m \ddot{x} + kx - q = 0; q, k - \text{константы}; T = \frac{2\pi}{\omega};$
 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \ddot{x} + \omega^2 x + c = 0; T = \frac{2\pi}{\omega}$
 Закон сохранения энергии $W_0 + \frac{m v^2}{2} = W$
 $v = \dot{x}; a = \ddot{x}$ (объём введена так, как показано на рисунке).
 $\frac{\epsilon_0 v U_0^2 (x + \epsilon(l-x))}{2 d \epsilon^2} = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{\epsilon_0 v l U_0^2}{2 d \epsilon} \cdot \frac{m x^2}{2} = \frac{\epsilon_0 v U_0^2}{2 d \epsilon^2} x (1-\epsilon)$
 Возьмём производную: $\frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{\epsilon_0 v U_0^2}{2 d \epsilon^2} x (1-\epsilon) \right) = 0$
 $\ddot{x} + \frac{\epsilon_0 v U_0^2}{m d \epsilon^2} (1-\epsilon) x = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\epsilon_0 v U_0^2 (1-\epsilon)}{m d \epsilon^2}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{m d \epsilon^2}{\epsilon_0 v U_0^2 (1-\epsilon)}}$
 $\Rightarrow m = \frac{T^2 \epsilon_0 v U_0^2 (1-\epsilon)}{4\pi^2 d \epsilon^2} \Rightarrow \text{Ответ: } m = \frac{T^2 \epsilon_0 v U_0^2 (1-\epsilon)}{4\pi^2 d \epsilon^2}$

Черновик:



$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0 v l}{d}; q = CU_0 = \frac{\epsilon_0 v l U_0}{d}$$

$$\sigma = \frac{q}{S}; E_{\text{ва}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}; E = 2E_{\text{ва}} = \frac{2q}{2S\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 q}{v\epsilon_0}$$

$$C = C_{\text{вн}} + C_{\text{выст}} = \frac{\epsilon_0 v (\epsilon(l-x) + x)}{d}$$

$$C_{\text{вн}} = \frac{\epsilon\epsilon_0(l-x)v}{d}; C_{\text{выст}} = \frac{\epsilon_0 x v}{d}$$

$$W_k = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{\epsilon_0 v U_0^2 (\epsilon(l-x) + x)}{2d} = \frac{m \dot{x}^2}{2}$$

$$-\frac{m}{2} 2 \ddot{x} = \frac{\epsilon_0 v U_0^2}{2d} (\epsilon - 1) x$$

$$2m \ddot{x} = \frac{\epsilon_0 v U_0^2}{2d \epsilon^2} (x + \epsilon(l-x)) = \frac{\epsilon\epsilon_0 v l U_0^2}{2d} + \frac{m \dot{x}^2}{2}$$

$$\frac{\epsilon\epsilon_0 v l U_0^2}{d} \cdot \frac{\epsilon\epsilon_0 l x}{d} \cdot \delta =$$

$$\frac{\epsilon(l-x)}{1 + \frac{\epsilon\epsilon_0 v l U_0^2}{d} \cdot \frac{\epsilon\epsilon_0 l x}{d}} = \frac{\epsilon}{\epsilon + \frac{\epsilon\epsilon_0 v l U_0^2}{d} \cdot \frac{\epsilon\epsilon_0 l x}{d}}$$

09-82-37-81
(2.11)

№3.3.2 (выполнение задачи) Числовик:

$$P' = \frac{(2vBd)^2 R}{(R+v)^2} = (vBd)^2 \frac{(2v+2R)(R)}{(R+v)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (vBd)^2 \frac{0 - (R^2 + v^2 - 2vR)R}{(R-v)^4} = (vBd)^2 \frac{2(2v-2R)R}{(R-v)^4} = 0$$

(т.к. мощность max, то P' = 0) $\Rightarrow 2v - 2R = 0 \Rightarrow v = R \Rightarrow P_m = \frac{(vBd)^2 R}{4R} = \frac{(vBd)^2}{4}$

$v = vBd$; ~~на расстоянии R выделится мощность~~ Когда выделится мощность $\eta = \frac{R}{v+R} = \frac{P_{\text{кар}}}{P_{\text{ист}}} = \frac{Q_{\text{кар}}}{Q_{\text{ист}}}$

$$P_{\text{ист}} = \frac{U^2}{R(v+R)} \Rightarrow P_{\text{кар}} = \eta P_{\text{ист}} = \frac{U^2 v}{(v+R)^2}$$

$$P'_{\text{кар}} = U^2 \frac{(v+R)^2 - (2v+2R)v}{(v+R)^4} = 0 \quad (\text{т.к. } P_{\text{кар}} \text{ максимума})$$

$$\Rightarrow v^2 + 2vR + R^2 = 2v^2 + 2Rv \Rightarrow R^2 = v^2 \Rightarrow v = R$$

$$P_m = \frac{U^2 R}{2R \cdot 2R} = \frac{U^2}{4R} = \frac{(vBd)^2}{4R} = P_m \Rightarrow B = \frac{2\sqrt{R P_m}}{v d}$$

$$= \frac{2\sqrt{0,4 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}}{10 \cdot 10^{-2} \cdot 40 \cdot 10^{-2}} = \frac{4}{10000 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}} = 1 \text{ В}$$

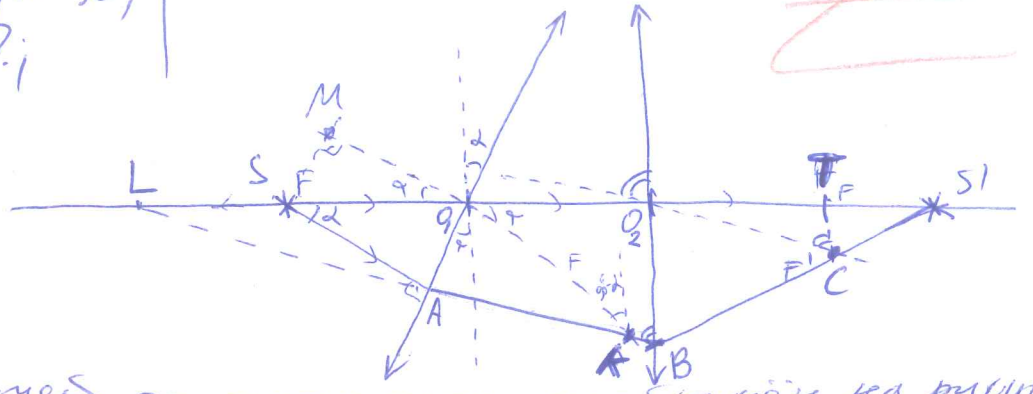
Ответ: $B = \frac{2\sqrt{R P_m}}{v d} = 1 \text{ В}$

№4.10.2

Дано:
 $x = 23,5 \text{ см}; \alpha = 30^\circ;$
 $F = ?;$

Решение:

Чистовик:



Ход лучей от источника изображен на рисунке
 S' - изображение ист. S , $\angle O_1SA = \alpha$; $\angle SAO_1 = 90^\circ$,
 $O_1A = F \sin \alpha$; $O_1K = F$ (т.к. $SA \perp$ микже)
 $\angle ABO_2 = 90^\circ - \alpha + \angle AKO_1$, $\text{tg} \angle AKO_1 = \frac{AO_1}{OK} = \frac{F \sin \alpha}{F} = \sin \alpha$
 $O_2B = O_1K \sin \angle O_2OK = F \sin \alpha$

Формула тонкой линзы: $\frac{1}{f} + \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{F}$; $d = MO_1 = F \cos \alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow f = \frac{F \cos \alpha}{\cos \alpha - 1} < 0$; $|f| = O_1L$; $\frac{O_1L + O_2B}{O_2B} = \text{tg} \angle ABO_2 = \frac{F \cos \alpha}{F \sin \alpha}$

$\text{tg} \angle ABO_2 = \frac{2 \cos \alpha - 1}{\sin \alpha (\cos \alpha - 1)}$; $\frac{O_2T}{TC} = \text{tg} \angle ABO_2$ (по построению)

$\text{tg} \angle ABT \Rightarrow TC = \frac{O_2T}{\text{tg} \angle ABO_2} = \frac{F \sin \alpha (\cos \alpha - 1)}{2 \cos \alpha - 1}$, по подобию

$\triangle BO_2S' \sim \triangle CTS'$: $\frac{TS'}{TC} = \frac{O_2S'}{O_2B} \Rightarrow \frac{TS' (2 \cos \alpha - 1)}{F \sin \alpha (\cos \alpha - 1)} = \frac{F + TS'}{F \sin \alpha} \Rightarrow$

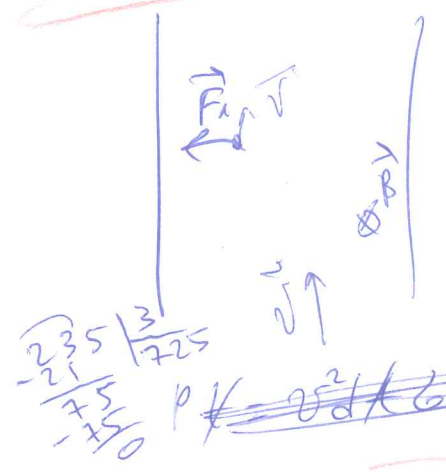
$\Rightarrow TS' \left(\frac{2 \cos \alpha - 1}{\cos \alpha - 1} - 1 \right) = F \Rightarrow TS' = F \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha}$

$x = SO_1 + O_1O_2 + O_2T + TS' = 3F + F \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha} = \frac{4 \cos \alpha - 1}{\cos \alpha} F = x \Rightarrow$

$\Rightarrow F = \frac{x \cos \alpha}{4 \cos \alpha - 1} = \frac{23,5 \cos 30^\circ}{4 \cos 30^\circ - 1} = \frac{23,5 \cdot \sqrt{3}/2}{4 \cdot \sqrt{3}/2 - 1} = \frac{23,5 \sqrt{3}}{4\sqrt{3} - 2}$

Ответ: $F = \frac{x \cos \alpha}{4 \cos \alpha - 1} = \frac{23,5 \sqrt{3}}{4\sqrt{3} - 2} \text{ см} \approx 7,38 \text{ см};$

Чистовик:



$I_n = U = qVB$

$I = \frac{qVB}{r}$

$P = \frac{(qVB)^2}{r^2} R$

$P = \frac{U^2}{r^2} R$

$I = \frac{U}{r+R}$

$I = \frac{U}{r+R} = \frac{U}{2r}$

$qVd = qVB \Rightarrow U = VBd$

$U = VBd$

$U + rI = RI \Rightarrow I = \frac{U}{R-r}$

$\frac{U - Ir}{R^2} = \frac{U(R-2r)}{R^2}$

$P = \frac{U^2}{R^2}$

$qE = qVB = qVd \Rightarrow U = VBd$

$P_n = \frac{U^2}{r} = \frac{(VBd)^2}{r}$; $A_{\text{мех}} = vtd \leq VBd$

$E = U + \frac{U}{R} r$

$\frac{U + Ir}{r+R} = I \Rightarrow I = \frac{U}{R}$

$P = \frac{E^2}{R^2} = \frac{U^2 (r+R)^2}{R^3}$

$(U + Ir)I = \frac{U^2 (2r+R)}{r+R}$

$\frac{r}{r+R} \cdot \frac{E^2}{(r+R)^2} = \frac{U^2}{(r+R)^3}$

$\frac{R(2r+R)}{(r+R)^2} = \frac{2R(r+R)^2 + (2r+2R)R(2r+R)}{(r+R)^2}$

$2Rr^2 + 4Rr + 2R^2 = 2Rr^2 + 4Rr + 2R^2$

$2R + 4r = 2r$