Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова 2013 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов»

ГЕОЛОГИЯ

Вариант 1

<u>Задания, решения и ответы</u>

1. В лабораторию поступила партия новых образцов пород, которую необходимо разложить по ящикам поровну. Лаборант сначала положил в каждый ящик по 12 образцов, но при этом 5 образцов оказались лишними. Тогда лаборант оставил один ящик пустым, а все образцы разложил по оставшимся ящикам поровну. Сколько образов пород было в партии, если в каждый ящик было положено не более 18 образцов?

Решение

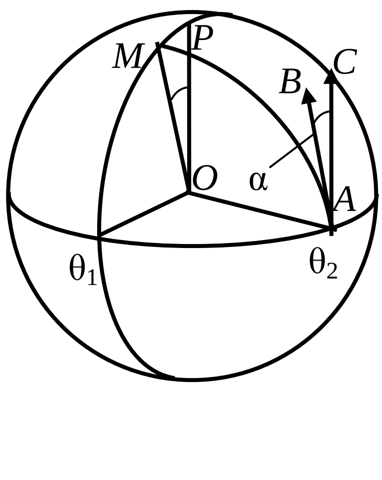
Обозначим искомое число образцов через k, а число ящиков через n, тогда по условию задачи $\begin{cases} k = 12n + 5, \\ \frac{k}{n-1} \in N. \end{cases}$ Отсюда $\frac{12n+5}{n-1} = 12 + \frac{17}{n-1} \in N$. Поскольку *n-1* является делителем 17, то отсюда заключаем, что $n \in \{2,18\}$. Таким образом, число ящиков может быть равно 2 или 18. В случае $n=2$ значение $k=12\cdot 2+5=29$, и в один оставшийся ящик кладутся все 29 образцов, что не соответствует условию задачи. В случае $n=18$ значение $k=12\cdot 18+5=221$, и в каждый ящик кладется 13 образцов.

Ответ: 221 образец

2. Планета имеет форму шара радиусом $R = 4000$ км. Как и Земля, она вращается вокруг своей оси и обладает магнитным полем. Это поле выглядит как поле постоянного полосового магнита, центр которого совпадает с центром планеты. Как и у Земли, положения географического и магнитного полюсов планеты не совпадают.

В точке с долготой θ_1 на экваторе планеты стрелка магнитного компаса направлена по географическому меридиану. Расстояние между географическим и магнитным полюсами планеты вдоль ее поверхности равно L = 700 км. Найдите угол α между направлением стрелки магнитного компаса и географическим меридианом в точке экватора с долготой $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$.

Решение



На рисунке изображены магнитный (M) и географический (P) полюса планеты, по условию задачи, лежащие на одном географическом меридиане с долготой θ_1, а также угол α между направлением стрелки компаса (изображено вектором AB) и касательной AC к меридиану с долготой $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$ в точке наблюдения A.

Угол MOP равен α по признаку равенства углов с взаимно параллельными сторонами: $OM \parallel AB$, $OP \parallel AC$. Действительно, во-первых, эти прямые попарно лежат в одной плоскости: OM и AB – в плоскости MOA магнитного меридиана, OP и AC – в плоскости POA географического меридиана. Во-вторых, все четыре прямых OM, OP, AB и AC перпендикулярны отрезку OA.

Поэтому угол между направлением стрелки магнитного компаса и географическим меридианом в точке экватора с долготой $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$ равен $\alpha = \frac{L}{2\pi R} \cdot 360^\circ \approx 10^\circ$.

Ответ: 10^0.

3. Одним из разделов современной геологии является геофизика – наука, занимающаяся исследованием геологической среды путем изучения различных физических полей Земли, многие из которых имеют волновую природу (например, электромагнитные или сейсмические поля) и описываются суммами синусов и или косинусов аргумента *nwt,* где n – положительное целое, *w*-угловая частота, t – время. Каждое такое слагаемое имеет вид, например, $sin(nwt+\varphi_n)$ и называется *n* –ой гармоникой. Сложный волновой геофизический сигнал при расчетах часто описывается двумя первыми гармониками. На эту тему предлагается следующая задача.

При проведении геофизических исследований было зарегистрировано волновое поле, представляющее собой результат наложения двух различных гармонических сигналов. Зависимость амплитуды первого сигнала от времени *t* имеет вид $2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$, а второго сигнала $2\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$. Для каких моментов времени на интервале (4,7) величины амплитуд сигналов совпадут?

Решение

Условие задачи приводит к уравнению

$$2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right).$$

Для решения последнего запишем его в виде

$$2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-2\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)=0 <==>$$

$<==> 4\sin\frac{\pi}{4}cos\,t + 2sin\frac{\pi}{6}cos\,2t = 0 <==> 2\sqrt{2}cost + cos2t = 0.$

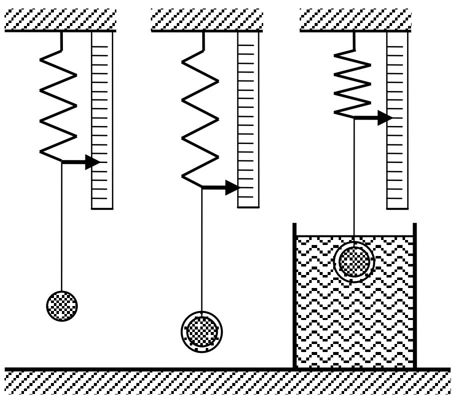
Из равенства $cos2t = 2cos^2t - 1$ получаем

$$2cos^2t + 2\sqrt{2}cost - 1 = 0 <==> cost = \frac{-\sqrt{2}\pm 2}{2}.$$

В силу ограниченности косинуса случай $cost = \frac{-\sqrt{2}-2}{2}$ не подходит. Следовательно, $cost = \frac{-\sqrt{2}+2}{2}$. Это значение как нетрудно видеть лежит на интервале $(0,\frac{1}{2})$. При этом $7 < \frac{7\pi}{3}$, значит значение $t = 2\pi - \arccos(\frac{-\sqrt{2}+2}{2})$ никаких других корней на указанном интервале нет.

Ответ: при $t = 2\pi - \arccos(\frac{-\sqrt{2}+2}{2})$

4. **Для определения плотности пористой горной породы в геологической практике часто используют метод, состоящий из трех последовательных взвешиваний. Сначала берут образец исследуемой породы и взвешивают его в воздухе. Затем образец парафинируют, т.е. целиком опускают в расплавленный парафин и вынимают, чтобы весь образец покрылся слоем застывшего парафина. После этого парафинированный образец взвешивают в воздухе. И, наконец, третье измерение – взвешивание парафинированного образца в воде (см. рисунок).**



Какова плотность породы, если результаты последовательных взвешиваний на пружинном динамометре оказались равными

соответственно $P_1 = 2{,}6$ Н, $P_2 = 3{,}0$ Н, $P_3 = 1{,}5$ Н? При расчете плотностью воздуха пренебречь, плотность воды принять равной $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, плотность парафина $\rho_п = 870$ кг/м^3.

Решение

Пренебрегаем влиянием выталкивающей силы со стороны воздуха на образец при проведении первых двух взвешиваний и учитываем, что силы натяжения нити, действующие на образец при каждом из взвешиваний, составляют соответственно P_1, P_2, P_3. Тогда получим:

$P_1 = mg$,

$P_2 = (m + M)g$,

$P_3 = (m + M)g - \rho_0 g(V + M/\rho_п)$,

где m и V – соответственно масса и объем исходного образца, M – масса налипшего парафина.

Отсюда следует, что

$m = P_1/g$,

$M = (P_2 - P_1)/g$,

$P_2 - P_3 = \rho_0 g(V + M/\rho_п)$.

Из последнего уравнения, подставив в него выражение для M, получаем:

$$V = \frac{P_2 - P_3}{\rho_0 g} - \frac{P_2 - P_1}{\rho_п g}$$

и, следовательно,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P_1}{g\left(\dfrac{P_2 - P_3}{\rho_0 g} - \dfrac{P_2 - P_1}{\rho_п g}\right)} = \frac{P_1}{\dfrac{P_2 - P_3}{\rho_0} - \dfrac{P_2 - P_1}{\rho_п}} = \frac{\rho_0 \rho_п P_1}{\rho_п (P_2 - P_3) - \rho_0 (P_2 - P_1)}.$$

При $P_1 = 2{,}6$ Н, $P_2 = 3{,}0$ Н, $P_3 = 1{,}5$ Н, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $\rho_п = 870$ кг/м^3 имеем $\rho \approx 2500$ кг/м^3.

Ответ: 2500 кг/м^3.

5. Неравномерность просадки грунтов под инженерно-техническими сооружениями – одна из актуальных проблем инженерной геологии, которая изучает структуру, динамику верхних горизонтов земной коры при ее взаимодействии с основаниями сооружений разного профиля. Преодоление неравномерной просадки грунтов является стандартной задачей не только для специалистов в области инженерной геологии, такие проблемы часто возникают в нефтяной геологии, строительстве спортивных сооружений. Просадочные грунты, вследствие собственного веса или веса фундамента сооружения, способны давать при замачивании дополнительные осадки, которые в инженерной геологии называются просадками. Любое строительство важного объекта должно быть предварено тщательным изучением просадочных свойств грунтов. Если объект достаточно крупный, то просадочные свойства грунтов под ним могут сильно отличаться в пределах занимаемой площади. В таком случае для корректного определения параметров фундамента сооружения необходимо применять сложные математические модели. Приведенная ниже задача иллюстрирует такую ситуацию. Данные по значениям просадок с целью экономии вычислений являются модельными.

Фундамент под резервуар изначально имел основание в виде прямоугольника ABCD со сторонами AB=50м, AD=20м, при этом плоскость ABCD совпадала с горизонтальной. В результате просадки вершина B стала ниже на 1м, вершина D - на 2м, а вершина A сохранила начальный уровень. Чему равна величина угла, образовавшегося между горизонтальной плоскостью и плоскостью основания фундамента?

Решение

Рассмотрим горизонтальную плоскость проходящую через точку A. Обозначим через B_1 и D_1 проекции точек B и D соответственно на эту плоскость. Тогда BB_1 =1 и DD_1=2. По теореме Пифагора $AB_1=\sqrt{2499}$, $AD_1=\sqrt{396}$, $B_1D_1=\sqrt{2899}$. По теореме косинусов в треугольнике AB_1D_1: $2499=2899+396-2\sqrt{2899}\sqrt{3996}\cos\measuredangle AD1B1$, отсюда $\cos\measuredangle AD1B1=\frac{1699}{3\sqrt{11}\sqrt{2899}}$.

Далее, пусть E – точка пересечения горизонтальной плоскости и прямой BD. Из теоремы Фалеса $ED_1=2\ B_1D_1=2\sqrt{2899}$. По теореме косинусов в треугольнике AD_1E:

$AE^2=11596+396-\frac{398}{3\sqrt{11}\sqrt{2899}}\sqrt{11596}\sqrt{396}=10400$. Пусть длина высоты D_1P треугольника AED_1 равна h. Тогда из равенства $AE\cdot h = ED_1\cdot AD_1 \sin\measuredangle AD1E$ найдем h:

$$h=\frac{2\sqrt{1237}}{\sqrt{13}}.$$

откуда тангенс искомого угла D_1PD равен $2/h=\sqrt{\frac{13}{1237}}$.

Ответ: arctg($\sqrt{\frac{13}{1237}}$).

Задача 6

На границе рудных тел, находящихся в толще земли, вследствие окислительно-восстановительных реакций их вещества с окружающим водным раствором часто возникают электрические заряды. Это приводит к возникновению в пространстве аномального электрического поля. Обнаружение этих аномалий на поверхности Земли позволяет установить места залегания самих рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом R = 30 см находится система двух одинаковых по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов, создающих электростатическое поле. Линии одинакового потенциала этого поля на поверхности глобуса совпадают с его параллелями, при этом потенциал точек на параллели с северной широтой $\alpha = 30^\circ$ равен нулю. Найти расстояние от положительного заряда до центра глобуса, если потенциал поля на северном полюсе глобуса равен $\varphi_1 = -10$ мВ, а потенциал поля на южном полюсе глобуса равен $\varphi_2 = +1$ мВ. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрическое поле зарядов. Потенциал зарядов на значительном удалении от глобуса считать равным нулю.

Решение

Из картины линий равного потенциала на поверхности глобуса следует, что точечные заряды под его поверхностью находятся на диаметре, соединяющем северный и южный полюсы глобуса, причем отрицательный заряд $-q$ находится к северному полюсу ближе, чем положительный заряд q. Легко проверить, что точки плоскости, перпендикулярной к отрезку, соединяющему два заряда, и проходящей через его середину, имеют потенциал равный нулю. По условию задачи эта плоскость пересекает поверхность глобуса по параллели на широте $\alpha = 30^\circ$ в северном полушарии. Отсюда следует, что расстояние от середины отрезка, соединяющего заряды, до центра O глобуса равно $R\sin\alpha$. Обозначим расстояние между точечными зарядами через $2a$, тогда выражения для потенциалов поля точечных зарядов на северном полюсе и на южном полюсе глобуса могут быть записаны в виде:

$$\varphi_1=\frac{-kq}{x_1-a}+\frac{kq}{x_1+a}=-\frac{2kqa}{x_1^2-a^2},$$

$$\varphi_2=\frac{-kq}{x_2+a}+\frac{kq}{x_2-a}=\frac{2kqa}{x_2^2-a^2},$$

где $x_1 = R(1 - \sin\alpha)$ и $x_2 = R(1 + \sin\alpha)$ – расстояния от середины отрезка, соединяющего два заряда, соответственно до северного и южного полюсов глобуса. Разделив первое из этих уравнений на второе и исключив тем самым неизвестную величину q, получим:

$$\frac{x_2^2 - a^2}{x_1^2 - a^2} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2},$$

откуда, с учетом выражений для x_1 и x_2,

$$a^2 = \frac{\varphi_1 x_1^2 + \varphi_2 x_2^2}{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{R^2}{\varphi_1 + \varphi_2}\left[\varphi_1(1 - sin\alpha)^2 + \varphi_2(1 + sin\alpha)^2\right] = R^2\left(1 + 2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2} sin\alpha + sin^2\alpha\right).$$

Искомое расстояние от положительного точечного заряда до центра глобуса составляет

$$l = R\,sin\alpha - a = R\left(sin\alpha - \sqrt{1 + 2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2} sin\alpha + sin^2\alpha}\right) = 10\text{ см}.$$

Ответ: 10 см.

ГЕОЛОГИЯ

Вариант 2

Задания, решения и ответы

1. В лабораторию поступила партия новых образцов пород, которую необходимо разложить по ящикам поровну. Лаборант положил в каждый ящик по 13 образцов, но при этом 3 образца оказалось лишними. Тогда лаборант оставил два ящика пустыми, а все образцы разложил по оставшимся ящикам поровну. Сколько образов пород было в партии, если в каждый ящик было положено не более 19 образцов?

Решение

Обозначим искомое число образцов через k, а число ящиков через n, тогда по условию задачи $\begin{cases} k = 13n + 3, \\ \frac{k}{n-2} \in N. \end{cases}$ Отсюда $\frac{13n+3}{n-2} = 13 + \frac{29}{n-2} \in N$. Поскольку n-2 является делителем 29, то отсюда заключаем, что $n \in \{3{,}31\}$. Таким образом, число ящиков может быть равно 3 или 29. В случае $n=3$ значение $k=13\cdot 3+3=42$, и в один оставшийся ящик кладутся все 42 образца, что не соответствует условию задачи. В случае $n=31$ значение $k=13\cdot 31+3=406$, и в каждый ящик кладется 14 образцов.

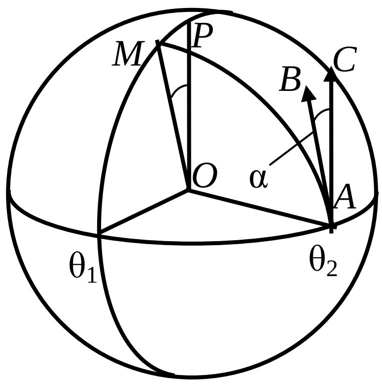
Ответ: 406 образцов

2. Планета имеет форму шара радиусом $R = 5000$ км. Как и Земля, она вращается вокруг своей оси и обладает магнитным полем. Это поле выглядит как поле постоянного полосового магнита, центр которого совпадает с центром планеты. Как и у Земли, положения географического и магнитного полюсов планеты не совпадают.

В точке с долготой θ_1 на экваторе планеты стрелка магнитного компаса направлена по географическому меридиану. Расстояние между географическим и магнитным полюсами планеты вдоль ее поверхности равно L = 1300 км. Найдите угол α между направлением стрелки магнитного компаса и географическим меридианом в точке экватора с долготой $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$.

Решение

На рисунке изображены магнитный (M) и географический (P) полюса планеты, по условию задачи, лежащие на одном географическом меридиане с долготой θ_1, а также угол α между направлением стрелки компаса (изображено вектором AB) и касательной AC к меридиану с долготой $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$ в точке наблюдения A.



Угол MOP равен α по признаку равенства углов с взаимно параллельными сторонами: $OM \parallel AB$, $OP \parallel AC$. Действительно, во-первых, эти прямые попарно лежат в одной плоскости: OM и AB – в плоскости MOA магнитного меридиана, OP и AC – в плоскости POA географического меридиана. Во-вторых, все четыре прямых OM, OP, AB и AC перпендикулярны отрезку OA.

Поэтому угол между направлением стрелки магнитного компаса и географическим меридианом в точке экватора с долготой $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$ равен $\alpha = \dfrac{L}{2\pi R} \cdot 360^\circ \approx 15^\circ$.

Ответ: 15^0.

3. Одним из разделов современной геологии является геофизика – наука, занимающаяся исследованием геологической среды путем изучения различных физических полей Земли, многие из которых имеют волновую природу (например, электромагнитные или сейсмические поля) и описываются суммами синусов и или косинусов аргумента *nwt*, где n – положительное целое, *w*-угловая частота, t – время. Каждое такое слагаемое имеет вид, например, $sin(nwt+\varphi_n)$ и называется *n* –ой гармоникой. Сложный волновой геофизический сигнал при расчетах часто описывается двумя первыми гармониками. На эту тему предлагается следующая задача.

При проведении геофизических исследований было зарегистрировано волновое поле, представляющее собой результат наложения двух различных гармонических сигналов. Зависимость амплитуды первого сигнала от времени *t* имеет вид $2\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$, а второго сигнала $2\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$. Для каких моментов времени на интервале (-7,-4) величины амплитуд сигналов совпадут?

Решение

Условие задачи приводит к уравнению

$$2\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right).$$

Для решения последнего запишем его в виде

$$2\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)=0 <==>$$

$<==> 4\sin\frac{\pi}{6}cos\,t + 2sin\frac{\pi}{4}cos\,2t = 0 <==> 2cost + \sqrt{2}cos2t = 0.$

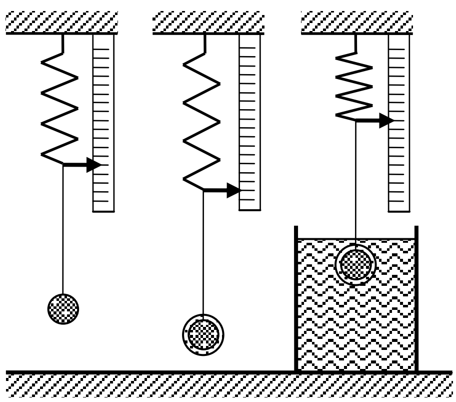
Из равенства $cos2t = 2cos^2t - 1$ получаем

$$2\sqrt{2}cos^2t + 2cost - \sqrt{2} = 0 <==> cost = \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{10}}{4}.$$

В силу ограниченности косинуса случай $cost = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}$ не подходит. Следовательно, $cost = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}$. Это значение как нетрудно видеть лежит на интервале $(0,\frac{1}{2})$. При этом $7 < \frac{7\pi}{3}$, значит значение $t = -2\pi + \arccos(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4})$ входит в нужный интервал, а $-2\pi + \arccos(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4})$ нет.

Ответ: при $t = -2\pi + \arccos(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4})$

4. Для определения плотности пористой горной породы в геологической практике часто используют метод, состоящий из трех последовательных взвешиваний. Сначала берут образец исследуемой породы и взвешивают его в воздухе. Затем образец парафинируют, т.е. целиком опускают в расплавленный парафин и вынимают, чтобы весь образец покрылся слоем застывшего парафина. После этого парафинированный образец взвешивают в воздухе. И, наконец, третье измерение – взвешивание парафинированного образца в воде (см. рисунок).



Какова плотность породы, если результаты последовательных взвешиваний на пружинном динамометре оказались равными соответственно $P_1 = 1{,}2$ Н, $P_2 = 1{,}5$ Н, $P_3 = 0{,}6$ Н? При расчете плотностью воздуха пренебречь, плотность воды принять равной $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, плотность парафина $\rho_п = 910$ кг/м^3.

Решение

Пренебрегаем влиянием выталкивающей силы со стороны воздуха на образец при проведении первых двух взвешиваний и учитываем, что силы натяжения нити, действующие на образец при каждом из взвешиваний, составляют соответственно P_1, P_2, P_3. Тогда получим:

$P_1 = mg,$

$P_2 = (m + M)g$,

$P_3 = (m + M)g - \rho_0 g(V + M/\rho_п),$

где m и V – соответственно масса и объем исходного образца, M – масса налипшего парафина.

Отсюда следует, что

$m = P_1/g,$

$M = (P_2 - P_1)/g,$

$P_2 - P_3 = \rho_0 g(V + M/\rho_п).$

Из последнего уравнения, подставив в него выражение для M, получаем:

$$V = \frac{P_2 - P_3}{\rho_0 g} - \frac{P_2 - P_1}{\rho_п g}$$

и, следовательно,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P_1}{g\left(\dfrac{P_2 - P_3}{\rho_0 g} - \dfrac{P_2 - P_1}{\rho_п g}\right)} = \frac{P_1}{\dfrac{P_2 - P_3}{\rho_0} - \dfrac{P_2 - P_1}{\rho_п}} = \frac{\rho_0 \rho_п P_1}{\rho_п (P_2 - P_3) - \rho_0 (P_2 - P_1)}.$$

При $P_1 = 1{,}2$ Н, $P_2 = 1{,}5$ Н, $P_3 = 0{,}6$ Н, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $\rho_п = 910$ кг/м^3 имеем $\rho \approx 2100$ кг/м^3.

Ответ: 2100 кг/м^3.

5. Неравномерность просадки грунтов под инженерно-техническими сооружениями – одна из актуальных проблем инженерной геологии, которая изучает структуру, динамику верхних горизонтов земной коры при ее взаимодействии с основаниями сооружений разного профиля. Преодоление неравномерной просадки грунтов является стандартной задачей не только для специалистов в области инженерной геологии, такие проблемы часто возникают в нефтяной геологии, строительстве спортивных сооружений. Просадочные грунты, вследствие собственного веса или веса фундамента сооружения, способны давать при замачивании дополнительные осадки, которые в инженерной геологии называются просадками. Любое строительство важного объекта должно быть предварено тщательным изучением просадочных свойств грунтов. Если объект достаточно крупный, то просадочные свойства грунтов под ним могут сильно отличаться в пределах занимаемой площади. В таком случае для корректного определения параметров фундамента сооружения необходимо применять сложные математические модели. Приведенная ниже задача иллюстрирует такую ситуацию. Данные по значениям просадок с целью экономии вычислений являются модельными.

Фундамент под резервуар изначально имел основание в виде прямоугольника ABCD со сторонами AB=25м, AD=20м, при этом плоскость ABCD совпадала с горизонтальной. В результате просадки вершина B стала ниже на 2 м, вершина D - на 1м, а вершина A сохранила начальный уровень. Чему равна величина угла, образовавшегося между горизонтальной плоскостью и плоскостью основания фундамента?

Решение

Рассмотрим горизонтальную плоскость проходящую через точку A. Обозначим через B_1 и D_1 проекции точек B и D соответственно на эту плоскость. Тогда BB_1 =2 и DD_1=1. По теореме Пифагора $AB_1=\sqrt{621}$, $AD_1=\sqrt{399}$, $B_1D_1=\sqrt{1024}$. По теореме косинусов в треугольнике AB_1D_1:
$399=621+1024-2\sqrt{621}\sqrt{1024}\cos\measuredangle AB1D1$, отсюда $\cos\measuredangle AB1D1=\frac{1246}{2\sqrt{621}\sqrt{1024}}=\frac{623}{32\sqrt{621}}$.

Далее, пусть E – точка пересечения горизонтальной плоскости и прямой BD. Из теоремы Фалеса EB_1=2 B_1D_1=64. По теореме косинусов в треугольнике AB_1E:

$AE^2=621+4096-\frac{623}{32\sqrt{621}}\sqrt{621}\cdot 4\cdot 64=2225$. Пусть длина высоты B_1P треугольника AEB_1 равна h. Тогда из равенства $AE\cdot h = EB_1\cdot AB_1 \sin\measuredangle AB1E$ найдем h:

$$h=\frac{64\sqrt{621}\sqrt{1-\frac{623^2}{1024\cdot 621}}}{5\sqrt{89}}=\frac{2\sqrt{9911}}{\sqrt{89}}.$$

откуда тангенс искомого угла B_1PB равен $2/h=\sqrt{\frac{89}{9911}}$.

Ответ: arctg($\sqrt{\frac{89}{9911}}$).

6. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, вследствие окислительно-восстановительных реакций их вещества с окружающим водным раствором часто возникают электрические заряды. Это приводит к возникновению в пространстве аномального электрического поля. Обнаружение этих аномалий на поверхности Земли позволяет установить места залегания самих рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом R = 20 см находится система двух одинаковых по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов, создающих электростатическое поле. Линии одинакового потенциала этого поля на поверхности глобуса совпадают с его параллелями, при этом потенциал точек на параллели с северной широтой $\alpha = 30^\circ$ равен нулю. Найти расстояние от положительного заряда до центра глобуса, если потенциал поля на северном полюсе глобуса равен φ_1 = –28 мВ, а потенциал поля на южном полюсе глобуса равен φ_2 = +3 мВ. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрическое поле зарядов. Потенциал зарядов на значительном удалении от глобуса считать равным нулю.

Решение

Из картины линий равного потенциала на поверхности глобуса следует, что точечные заряды под его поверхностью находятся на диаметре, соединяющем северный и южный полюсы глобуса, причем отрицательный заряд $-q$ находится к северному полюсу ближе, чем положительный заряд q. Легко проверить, что точки плоскости, перпендикулярной к отрезку, соединяющему два заряда, и проходящей через его середину, имеют потенциал равный нулю. По условию задачи эта плоскость пересекает поверхность глобуса по параллели на широте $\alpha = 30^\circ$ в северном полушарии. Отсюда следует, что расстояние от середины отрезка, соединяющего заряды, до центра O глобуса равно $R\sin\alpha$. Обозначим расстояние между точечными зарядами через $2a$, тогда выражения для потенциалов поля точечных зарядов на северном полюсе и на южном полюсе глобуса могут быть записаны в виде:

$$\varphi_1=\frac{-kq}{x_1-a}+\frac{kq}{x_1+a}=-\frac{2kqa}{x_1^2-a^2},$$

$$\varphi_2=\frac{-kq}{x_2+a}+\frac{kq}{x_2-a}=\frac{2kqa}{x_2^2-a^2},$$

где $x_1 = R(1 - \sin\alpha)$ и $x_2 = R(1 + \sin\alpha)$ – расстояния от середины отрезка, соединяющего два заряда, соответственно до северного и южного полюсов глобуса. Разделив первое из этих уравнений на второе и исключив тем самым неизвестную величину q, получим:

$$\frac{x_2^2 - a^2}{x_1^2 - a^2} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2},$$

откуда, с учетом выражений для x_1 и x_2,

$$a^2 = \frac{\varphi_1 x_1^2 + \varphi_2 x_2^2}{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{R^2}{\varphi_1 + \varphi_2}\left[\varphi_1 (1 - sin\alpha)^2 + \varphi_2 (1 + sin\alpha)^2\right] = R^2\left(1 + 2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2} sin\alpha + sin^2\alpha\right).$$

Искомое расстояние от положительного точечного заряда до центра глобуса составляет

$$l = R sin\alpha - a = R\left(sin\alpha - \sqrt{1 + 2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2} sin\alpha + sin^2\alpha}\right) = 8 \text{ см}.$$

Ответ: 8 см.