Решения заданий отборочного этапа олимпиады школьников
«Ломоносов» по геологии
2013 г.

Задание 1. Пусть V- общий объем глинистого компонента в образцах, x_i - доля его в образце с номером i. Будем считать, что $x_1 \le x_2 \le ... x_{200}$. Тогда по условию задачи требуется определить максимальное значение x_{200} при условиях $x_1 + x_2 + ... + x_{50} \ge 0.2$, $x_1 + x_2 + ... + x_{200} = 1$, $x_i \ge 0$, i=1,2,3,…,200. Заметим, что если в паре номеров *i и i+1,* такой, что $50 \le i < i+1 < 200$ соответствующие доли связаны неравенством $x_i < x_{i+1}$, то набор значений x_i можно улучшить, уменьшив значение x_{i+1} на величину $x_{i+1} - x_i > 0$ и увеличив x_{200} на это же величину. Это означает, что в наборе долей с максимальной последней долей значения $x_{50} = x_{51} = ... = x_{199} \le x_{200}$. Совершенно аналогично рассуждая, приходим к выводу, что в наборе долей с максимальной последней долей значения $x_1 = x_2 = ... = x_{49} = x_{50}$ По условию $50x_1 \ge 0.2 \Leftrightarrow x_1 \ge 1/250$. Отсюда следует $x_{200} \le 1 - 199/250 = 51/250$. Полагая $x = x_1 = x_2 = ... = x_{199} = 1/250, x_{200} = 51/250$, получаем, что такой набор соответствует условиям задачи.

Ответ: 20.4%.

Задание 2. Плита представляет собой твердое тело, движение которого сводится к поступательному и вращательному движению. Описывая поступательное движение плиты, воспользуемся моделью материальной точки, т.е. заменим плиту геометрической точкой, с которой связаны масса плиты и т.п. Этой точкой служит центр масс плиты, который в случае однородной плиты совпадает с ее геометрическим центром. Движение центра масс происходит под действием сил, действующих на плиту, в соответствии со вторым законом Ньютона.

Покажем, что в процессе падения плита не касается вертикальной стенки уступа. Предположим обратное: ребро *A* касается вертикальной стенки *CD* в точке *E* (см. рис. 1).

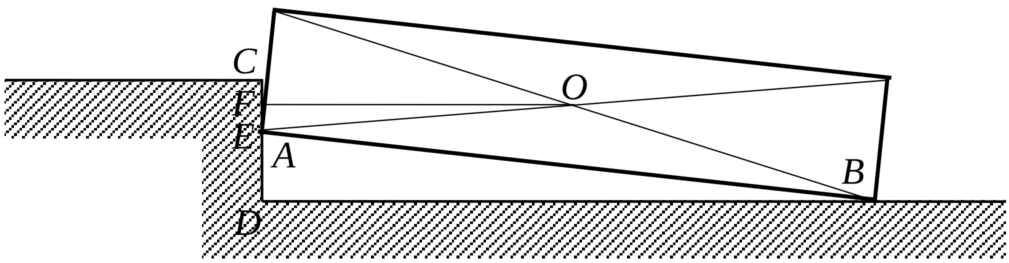

Рис. 1

Тогда длина перпендикуляра *OF*, опущенного из центра масс плиты *O* на стенку *CD*, меньше длины наклонного отрезка *OA*. Это означает, что первоначальное расстояние *OA* от точки *O* до стенки *CD* больше расстояния *OF* от точки *O* до стенки *CD* в процессе падения. Значит, центр масс плиты *O*, двигаясь из состояния покоя, должен, опускаясь, смещаться влево. Для этого горизонтальная составляющая равнодействующей приложенных к плите сил должна быть направлена влево. На плиту действуют вертикальная сила тяжести, вертикальная сила реакции опоры со стороны горизонтальной поверхности и сила реакции опоры со стороны стенки *CD*, имеющая горизонтальную составляющую, либо направленную вправо, либо равную нулю.

Таким образом, горизонтальная составляющая равнодействующей приложенных к плите сил не может быть направлена влево, и исходное предположение, что в процессе падения плита касается вертикальной стенки уступа, неверно.

Итак, в процессе падения плита не касается вертикальной стенки уступа, и на плиту действуют только вертикальные силы: сила тяжести и сила реакции опоры со стороны горизонтальной поверхности. Поэтому центр масс плиты O движется из состояния покоя по вертикали вниз, и расстояние от него до стенки CD остается равным OA. Как видно из рисунка 2, искомое расстояние $s = OA - L/2$.

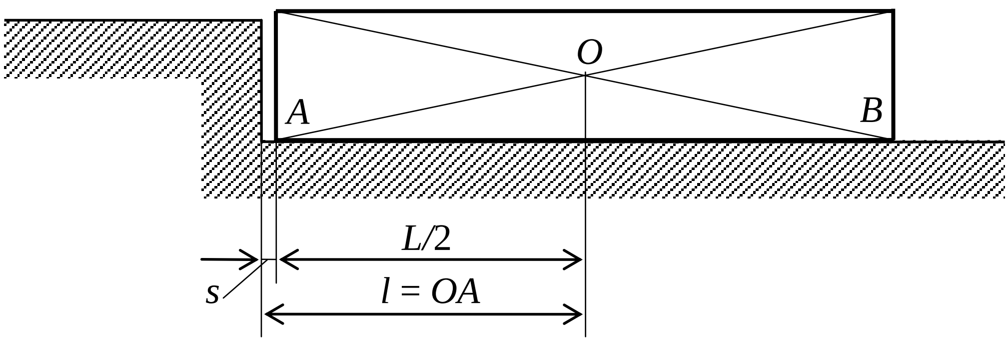

Рис. 2

Обозначим через α угол между горизонтальной плоскостью и основанием плиты в момент отрыва плиты от уступа (см. рисунок в условии задачи). Тогда

$$\sin\alpha = \frac{h}{L},\ OA = \frac{L}{2\cos\alpha},\ s = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(h/L)^2}} - 1\right) = \frac{L}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-(h/L)^2}}{\sqrt{1-(h/L)^2}}.$$

Ответ: $\dfrac{L}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{1-(h/L)^2}}{\sqrt{1-(h/L)^2}}$.

Задание 3. По условию задачи приборы разные, и за них можно посадить только студентов второго курса. Поскольку студентов семеро, то в данном случае требуется определить количество упорядоченных двоек из семи человек. Число таких упорядоченных двоек равно числу размещений из семи элементов по два, то есть $A_7^2 = \dfrac{7!}{5!}$=42. Далее, поскольку компьютеры одинаковые, то для студентов первого курса требуется определить количество неупорядоченных двоек из восьми человек. Число таких неупорядоченных двоек равно числу сочетаний из восьми элементов по два, то есть $C_8^2 = \dfrac{8!}{2!6!}$=28. Для каждого набора второкурсников таким образом можно указать 28 наборов первокурсников. Значит, всего способов набрать коллектив из четырех человек будет 42·28=1176.

Ответ:1176.

Задание 4. Воздух, находящийся в бочке в момент завершения откачки бензина, занимает объем $(H - h)S + V$ и находится под давлением $p_0 + \rho g(H - h + V/S)$. Первоначально, до выполнения процесса откачки, это же количество вещества воздуха находилось при атмосферном давлении p_0 и занимало объем $(H-h)S+Nv$, где N – число качаний, сделанных насосом. В соответствии с законом Бойля–Мариотта тогда можно записать:

$$p_0\left[(H-h)S+Nv\right]=\left[p_0+\rho g\left(H-h+\frac{V}{S}\right)\right]\cdot\left[(H-h)S+V\right].$$

Отсюда

$$N=\frac{V}{v}+\frac{\rho g S}{p_0 v}\left(H-h+\frac{V}{S}\right)^2=96.$$

При g = 10 м/с^2 формальный точный результат N = 95,(3). Это означает, что при последнем, 96-м закачивании в бочку нагнетается не вся захваченная насосом из атмосферы порция воздуха, а лишь ее треть. Но сделать это 96-е закачивание все равно нужно, т.к. 95 закачиваний не позволят извлечь из бочки ровно 20 л бензина.

Ответ: 96.

Задание 5. Рассмотрим трехгранный угол S тетраэдра SABC. Будем считать, что $\angle ASC=\alpha\geq\angle BSC=\beta\geq ASC=\gamma$. По свойству трехгранных углов справедливо соотношение $\alpha\leq\beta+\gamma$. По условию задачи четыре грани тетраэдра SABC являются равными треугольниками с углами α, β, γ. Если предположить, что α – тупой угол, то $\beta+\gamma>\pi/2$, откуда $\pi=\alpha+\beta+\gamma>\pi$, из полученного противоречия следует. Что все грани пирамиды – остроугольные треугольники.

Ответ: Не может.

Задание 6. Для выполнения оценки примем сначала несколько упрощений. Будем считать, что время от достижения максимального уровня воды в бухте до достижения ее минимального уровня равно τ = 6 ч. Будем считать, что перепад высот уровня воды между приливом и отливом в каждом переходе «прилив – отлив» и обратно – один и тот же. Оценим среднюю площадь S водной поверхности бухты как среднее арифметическое от S_1 и S_2: $S=\frac{S_1+S_2}{2}=10{,}5$ км^2. Аналогично оценим среднюю площадь s поперечного сечения устья бухты: $s=\frac{S_3+S_4}{2}=1000$ м^2.

Определим объем V и массу M воды, вытекающей из бухты через устье за время от достижения максимального уровня воды в бухте до достижения ее минимального уровня: $V=hS$ = 2 м · 10,5 км^2 = $21\cdot10^6$ м^3; $M=\rho V=\rho hS=21{,}63\cdot10^9$ кг.

Предположим для оценки, что в течение всех 6 часов вода вытекает из бухты с постоянной скоростью v_0. (В действительности вода вытекает из бухты сначала медленно, затем все быстрее, а потом скорость воды уменьшается до нуля, после чего вода начинает затекать в бухту, и процесс изменения величины ее скорости в следующие 6 часов повторяется. Однако мы выберем из-за простоты модель постоянной скорости воды, поскольку нас интересует суммарный эффект за 6 часов. Для грубой оценки это допустимо, в порядке величины полученного результата мы не ошибемся.) В таком случае для v_0 получим уравнение $hS=v_0\tau s$, откуда $v_0=\frac{hS}{\tau s}=\frac{21{,}63\cdot10^6}{6\cdot3600\cdot1000}\approx 1{,}0$ (м/с). (Кстати, чтобы получить такую скорость воды на выходе из бухты, нужен перепад уровней воды в море и в бухте $\Delta h=v_0^2/(2g)$ = 5 см, что и отмечено в условии.) Отсюда получается оценка кинетической энергии воды, вытекающей за 6 часов из бухты: $E=\frac{Mv_0^2}{2}\approx 10{,}8\cdot10^9$ Дж. За сутки получаем $E_{\text{за сутки}}=4E\approx 43\cdot10^9$ Дж. Это ответ на первый вопрос задачи. Отметим, что приливная ГЭС не может превратить в электроэнергию всю кинетическую энергию текущей воды: в таком случае вода на ГЭС остановилась бы и не перетекала бы в дальнейшем из бухты в море и обратно.

Оценим суточный расход электроэнергии в поселке. Бытовые счетчики обычно показывают расход электроэнергии в киловатт-часах (1кВт·ч = $3{,}6 \cdot 10^6$ Дж). Социальная норма расхода электроэнергии составляет около 50 кВт·ч в месяц, т.е. около $6 \cdot 10^6$ Дж на человека в сутки (это значит, что средняя расходуемая мощность всего около 70 Вт). При таком скромном энергопотреблении поселку с населением в 2000 чел. за сутки требуется только на внутриквартирные нужды $12 \cdot 10^9$ Дж электроэнергии. А еще есть расходы электроэнергии на работу причала, ремонтных мастерских, магазина, школы, на жилищно-коммунальное хозяйство. Поскольку КПД приливной ГЭС заметно меньше 100%, получим, что возможностей ГЭС при числовых данных из условия задачи недостаточно для снабжения поселка электроэнергией.

Поскольку $v_0 = \dfrac{hS}{\tau s}$, энергию текущей воды можно увеличить, уменьшив площадь s поперечного сечения устья бухты при строительстве ГЭС. Но при этом надо учитывать, что рост v_0 связан с ростом перепада $\Delta h = v_0^2/(2g)$ уровней воды в море и в бухте, а это значит, что часть воды может и не успеть пройти через устье.

Ответ: $E_{\text{за сутки}} \approx 43 \cdot 10^9$ Дж. Возможностей ГЭС недостаточно для снабжения поселка электроэнергией. Энергию текущей воды можно увеличить, уменьшив площадь поперечного сечения устья бухты.