Решение задач для 8 класса

**1.** Два олигарха Алехандро и Максимилиан за 2012 год взяли и разграбили свою страну. Известно, что состояние Алехандро на конец 2012 года равняется двум состояниям Максимилиана на конец 2011 года. А состояние Максимилиана на конец 2012 года меньше, чем состояние Алехандро на конец 2011 года. Что больше: состояние Максимилиана или национальные богатства страны?

**Ответ:** Состояние Максимилиана больше.

**Решение:** Рассмотрим таблицу, в которой $z$, $x$ — состояния Алехандро и Максимилиана в 2011 году:

| | 2011 | 2012 |
|---|---|---|
| А | $z$ | $2x$ |
| М | $x$ | $y$ |

Тогда $N = (2x+y)-(x+z)$ — национальные богатства страны. Вычтем из них $x$, получаем $N - x = y - z < 0$, следовательно, они меньше состояния Максимилиана.

**2.** За круглым столом собрались несколько юнош и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юнош справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

**Ответ:** 35 человек.

**Решение:** Из условия видно, что девушек ровно 19.

Заметим, что количество девушек, слева от которых сидят юноши равно количеству юношей у котрых справа сидят девушки. Таким образом 75% юношей равно 12, т.е. всего за столом сидит 16 юношей. Итого, получим 19 девушек + 16 юношей = 35 человек.

**3.** У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она одевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной ручке ровно один раз?

**Ответ:** Нет.

**Решение:** Рассмотрим первый браслет. Он должен побывать в паре с каждым из остальных 99 ровно один раз. Допустим Лиза надевает его $n$ дней. Тогда он побывает в паре ровно с $2n$ браслетами, что не может быть равно 99.

**4.** На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: "Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек". Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

**Ответ:** Любое количество.

**Решение:** Рассмотрим следующую расстановку жителей острова (вегетарианцы обозначены буквами «В», каннибалы — буквами «К») $BKKBKKKBK\ \underbrace{K\ldots K}_{\text{любое кол–во}}$.

Каждый вегетарианец стоит либо через 2, либо через 5 от другого вегетарианца, следовательно, для них утверждение истинно. Для каннибалов, которые стоят рядом или через одного с каким–нибудь вегетарианцем утверждение ложно (напомним, что 1 — не простое!). Для каннибалов, стоящих в правой части, либо 1–й, либо 2–й вегетарианец стоит через четное число людей (большее 2), следовательно для них утверждение тоже ложно. Таким образом, в ряд можно выстроить 6 и более жителей острова.

Непосредственно проверяется, что 1,2,3,4,5 жителей тоже можно выстроить, так, чтобы выполнялось условие задачи. Например брать начальные отрезки предложенного построения.

**5.** Найдите сумму цифр числа $\underbrace{44\ldots4}_{2012\text{ раз}}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2012\text{ раз}}$

**Ответ:** 18108.

**Решение:** Заметим, что $\underbrace{4\ldots4}_{2012}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{2012}=\underbrace{4\ldots4}_{2012}\underbrace{0\ldots0}_{2012}-\underbrace{4\ldots4}_{2012}=\underbrace{4\ldots4}_{2011}3\underbrace{5\ldots5}_{2011}6$. Сумма цифр равна $4\cdot2011+3+5\cdot2011+6=18108$.

**6.** Бешеный маляр бегает по клеткам доски $2012\times2013$, изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку, эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

**Ответ:** Да, всегда.

**Решение:** Если маляр пробежит от угловой клетки до произвольной белой, потом вернется в угловую клетку по тому же маршруту, то указанная клетка поменяет цвет, а все остальные клетки останутся прежнего цвета. Таким образом можно поменять цвет всех клеток, кроме угловой. Если ее цвет окажется черным, то маляр может просто спрыгнуть. а если белым, то маляр может пробежаться по периметру до нее и вернуться обратно тем же путем. Тогда ее цвет поменяется на черный.

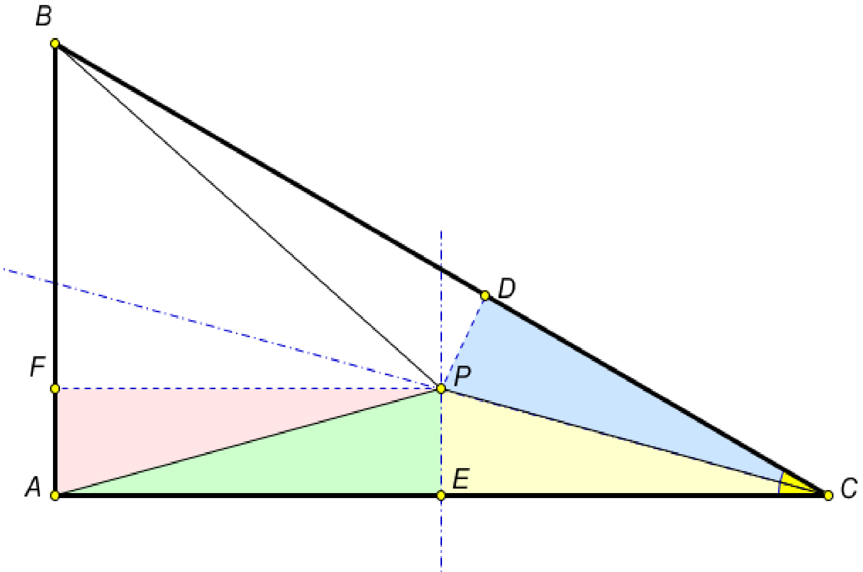
**7.** Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы $100\times100$ ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

**Решение:** Если верить Саше, то сумма цифр в кадой строке делится на 9, следовательно общая сумма цифр в таблице тоже будет делиться на 9. Но если верить Максиму, то сумма цифр во всех столбцах кроме одного делится на 9, а следовательно, сумма цифр в таблице не делится на 9. Противоречие.

**8.** Точка $P$ лежит внутрит треугольника $ABC$. Еҷ соединили со всеми вершинами треугольника, а также опустили перпендикуляры из неҷ на стороны, образовав 6 треугольников. Оказалось, что 4 из них равны. Всегда ли это означает, что треугольник равнобедренный?

**Ответ:** Не обязательно..

**Решение:** Пример такого треугольника, не являющегося равнобедренным. Здесь, $\triangle ABC$ — прямоугольный треугольник, точка $P$ получена перечесением биссектрисы угла $\angle BCA$ и серединного перпендикуляра к стороне $AC$.




**9.** Множество натуральных чисел называется *плохим*, если из него можно выбрать несколько чисел так, чтобы они в сумме давали 2012. Найдите наименьшее такое $n$, что числа 503, 504, …, 2011 можно разбить на $n$ множеств так, что все эти множества не были бы плохими.

**Ответ:** $n = 2$.

**Решение:** Покажем, что указанное множество можно разбить на два подмножества, так, чтобы оба не были плохими. Рассмотрим множества $M_1 = \{503, 504, \ldots, 671\}$, $M_2 = \{672, 673, \ldots, 1006\}$, $M_3 = \{1007, 1008, \ldots, 1340\}$, $M_4 = \{1341, 1342, \ldots, 2011\}$ и покажем, что $M_1 \cup M_3$ и $M_2 \cup M_4$ не являются плохими.

Докажем, что $M_1 \cup M_3$ не плохое. Рассмотрим варианты:

- Четыре числа из множества $M_1$ дают сумму $S \geqslant 503 + 504 + 505 + 506 = 2018 > 2012$;
- Три числа из множества $M_1$ дают сумму $S \leqslant 669 + 670 + 671 = 2010 < 2012$;
- Два числа из множества $M_1$ и одно из $M_3$ дают сумму $S \geqslant 503 + 504 + 1007 = 2014 > 2012$;
- Одно число из множества $M_1$ и одно из $M_3$ дают сумму $S \leqslant 671 + 1340 = 2011 < 2012$;
- Два числа из $M_3$ дают сумму $S \geqslant 1007 * 3 = 2021 > 2012$;

Аналогично доказывается для $M_2 \cup M_4$.