Олимпиада школьников
«Ломоносов», 2013
Ответы заданий заочного тура олимпиады по математике,
10 и 11 класс

Задача	*Ответ*
1	Нет
2	$1:1$
3	118
4	100
5	$\arccos(1-2\sin^2\alpha\sin^2\beta)$
6	$\pi^3-2\pi^2$
7	18 и 4
8	-4
9	2
10	Для любых натуральных n и k

Решение заочного задания олимпиады школьников «Ломоносов — 2012» по математике, 11 класс

1. Знайка сообщил коротышкам, что в декабре и в январе потребление арбузного сиропа в Зеленом городе в среднем составило 10 бочек в день и 5 бочек в день соответственно. Отсюда Незнайка сделал вывод, что дней, в которые потребление сиропа составляло не менее чем по 10 бочек, в декабре непременно было больше, чем в январе. Прав ли Незнайка?

   Ответ: нет.

   Решение. Приведем пример, показывающий, что Незнайка не прав. Пусть с 1 по 30 декабря коротышки выпивали 0 бочек, а 31 декабря выпили 310 бочек. Тогда в среднем за декабрь они выпили $\frac{310}{31} = 10$ бочек сиропа. Пусть с 1 по 15 января коротышки выпивали по 10 бочек, 16 января — пять, а с 17 по 31 января — 0. Тогда среднее потребление сиропа в январе равно $\frac{15 \cdot 10 + 5}{31} = 5$.

2. Котёнок откусывает четверть сосиски с одного конца, после чего щенок откусывает треть оставшегося куска сосиски с противоположного конца, затем снова котенок — четверть со своего конца, а щенок — треть со своего конца и т. д. Требуется заранее перевязать сосиску поперек ниткой так, чтобы нитку никто не съел. В каком отношении она должна разделить сосиску?

   Ответ: $1 : 1$.

   Решение. Пусть ℓ длина сосиски, оставшейся после одинакового числа «откусываний» котёнка и щенка. Тогда на следующем шаге котёнок откусит $\frac{\ell}{4}$, а щенок — $\frac{1}{3}\frac{3\ell}{4} = \frac{\ell}{4}$. Значит и тот и другой съедят одинаковые части сосиски.

3. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задана равенствами

$$a_1 = 100, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Найдите целое число, ближайшее к a_{2013}.

   Ответ: 118.

   Решение.

$$a_{2013}^2 = \left(a_{2012} + \frac{1}{a_{2012}}\right)^2 = a_{2012}^2 + 2 + \frac{1}{a_{2012}^2} = a_{2011}^2 + 2 \cdot 2 + \frac{1}{a_{2011}^2} + \frac{1}{a_{2012}^2} = \ldots$$
$$= a_1^2 + 2 \cdot 2012 + \frac{1}{a_1^2} + \ldots + \frac{1}{a_{2011}^2} + \frac{1}{a_{2012}^2}.$$

   Поэтому с одной стороны

$$a_{2013}^2 > a_1^2 + 2 \cdot 2012 = 10000 + 4024 = 14024 > 118^2 = 13924,$$

   с другой стороны

$$a_{2013}^2 < a_1^2 + 2 \cdot 2012 + \frac{2012}{100^2} < 14024 + 1 < 118,5^2.$$

   Поэтому $118 < a_{2013} < 118,5$, и ближайшим целым является 118.

4. Участникам викторины было задано четыре вопроса: на первый вопрос правильно ответили 90 участников, на второй — 50, на третий — 40, а на четвертый — 20, причем никто не смог правильно ответить более чем на два вопроса. Каково наименьшее число участников викторины при этих условиях?

   Ответ: 100.

Решение. Суммарное количество ответов равно 200. Так как ни один человек не ответил более чем на два вопроса, то наименьшее возможное количество участников викторины равно 100 и в этом случае каждый участник викторины должен правильно ответить ровно на 2 вопроса. Приведем пример викторины, в которой описанная ситуация реализуется. Пронумеруем участников от 1 до 100. Пусть на первый вопрос ответили участники с номерами от 1 до 90, на второй — с 91 по 100 и с 1-го по 40, на третий — с 41 по 80 и на 4-ый — с 81 по 100.

5. Фиксированный луч света падает на зеркало, образуя со своей проекцией на плоскость зеркала острый угол α. Зеркало поворачивают вокруг указанной проекции на острый угол β. Найдите угол между двумя отраженными лучами, полученными до и после поворота.

Ответ: $\arccos(1-2\sin^2\alpha\sin^2\beta)$.

Решение. Пусть AO — падающий луч, ON_1 — нормаль к первоначальному положению зеркала, а ON_2 — нормаль ко второму положению зеркала. Рассмотрим трехгранный угол OAN_1N_2. Его плоские углы равны: $\angle AON_1 = \dfrac{\pi}{2}-\alpha$, $\angle N_1ON_2 = \beta$, обозначим $\angle AON_2 = \gamma$. Пусть φ — линейный угол двугранного угла с ребром AO (см. рис. 1). По теореме косинусов для трёхгранного угла получаем

$$\cos\varphi = \frac{\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\gamma}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\gamma} = \frac{\cos\beta-\sin\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha\sin\gamma}. \qquad (1)$$

Так как двугранный угол $\angle N_1$ с ребром ON_1 — прямой (нормаль ON_2 поворачивается в плоскости, перпендикулярной прямой ℓ — проекция луча на плоскость первоначального положения зеркала), то опять из теоремы косинусов для трёхгранного угла OAN_1N_2 получаем

$$0 = \cos\angle N_1 = \frac{\cos\gamma - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta},$$

откуда

$$\cos\gamma = \sin\alpha\cos\beta. \qquad (2)$$

Пусть OA_1 — луч, отраженный от первоначального положения зеркала, а OA_2 — луч, отраженный от второго положения зеркала. Рассмотрим трехгранный угол OAA_1A_2. Его плоские углы равны: $\angle AOA_1 = \pi-2\alpha$, $\angle AOA_2 = 2\gamma$, $\angle A_1OA_2$ — искомый. По теореме косинусов для трёхгранного угла OAA_1A_2

$$\cos\varphi = \frac{\cos\angle A_1OA_2 - \cos(\pi-2\alpha)\cos2\gamma}{\sin(\pi-2\alpha)\sin2\gamma} = \frac{\cos\angle A_1OA_2+\cos2\alpha\cos2\gamma}{\sin2\alpha\sin2\gamma} \qquad (3)$$

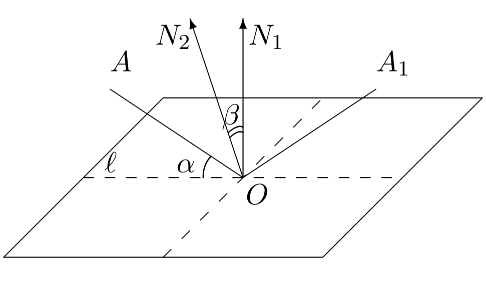

Рис. 1

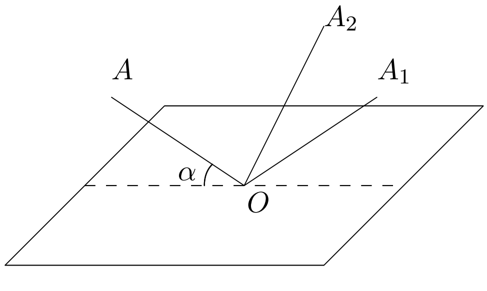

Рис. 2

Из формул (1)–(3) получаем

$$\cos\angle A_1OA_2 = 4\cos^2\beta\cos^2\alpha\sin^2\alpha - (2\cos^2\alpha-1)(2\cos^2\gamma-1) = 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\beta - 1 =$$
$$= 2-2\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\beta-1 = 1-2\sin^2\alpha\sin^2\beta.$$

6. Фигура на координатной плоскости состоит из точек (x, y), удовлетворяющих при любом $t \in \mathbb{R}$ двум неравенствам

$$x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2, \quad \cos y < 2 + \cos 2x + \cos x(4\sin t - 1) - \cos 2t.$$

Найдите площадь этой фигуры.

Ответ: $\pi^3 - 2\pi^2$**.**

Решение. Фигура, координаты точек которой удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2$ при всех t, представляет собой круг, заданный условием $x^2 + y^2 < \pi^2$.

Преобразуем второе неравенство к виду

$$\cos y < 2\cos^2 x + 4\cos x \sin t - \cos x + 2\sin^2 t \Leftrightarrow 2(\cos x + \sin t)^2 > \cos y + \cos x.$$

Из последнего неравенства следует, что (x, y) удовлетворяющие этому неравенству при всех t, это в точности (x, y) удовлетворяющие неравенству

$$\cos y + \cos x < 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} < 0.$$

Ввиду периодичности задачи по каждой переменной, выпишем решение последнего неравенства на периоде

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} > 0, \\ \cos\dfrac{x-y}{2} < 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} < 0, \\ \cos\dfrac{x-y}{2} > 0. \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x - \pi < y < -x + \pi, \\ x + \pi < y < x + 3\pi. \end{cases} \\ \begin{cases} -x + \pi < y < -x + 3\pi, \\ x - \pi < y < x + \pi. \end{cases} \end{array}\right.$$

Фигура, заданная этими неравенствами представляет собой два квадратика, а с учётом периодичности — «паркет» из квадратиков (см. рис. 3).

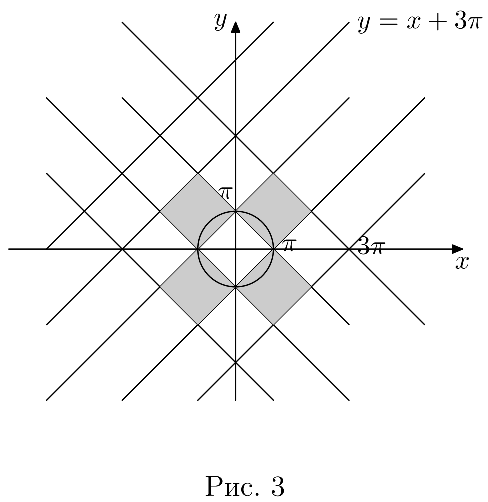

Рис. 3

Пересечение круга с «паркетом квадратиков» состоит из четырех круговых сегментов, суммарную площадь которых проще искать как площадь дополнения к квадрату, заданному условием $|x| + |y| \leqslant \pi$, в круге $x^2 + y^2 \leqslant \pi^2$). Поэтому искомая площадь равна $\pi^3 - 2\pi^2$.

7. Вовочка написал на доске равенство $101 = 11011$. Учитель информатики сказал, что это равенство будет верным, если понимать его как запись одного и того же числа, но в разных системах счисления. Найдите основания этих систем.

Ответ: 18 и 4.

Решение. Пусть основание счисления первого числа равно n, а второго — k. Тогда равенство, написанное Вовочкой, равносильно уравнению

$$n^2+1=k^4+k^3+k+1 \Leftrightarrow n^2=k^4+k^3+k, \quad n,k\in\mathbb{N}.$$

Умножим последнее уравнение на 4 и выделим полные квадраты:

$$(2n)^2=(2k^2+k)^2+4k-k^2.$$

Так как при $k>4$ выполнено неравенство $4k-k^2<0$, то при $k>4$ верно неравенство $(2n)^2<(2k^2+k)^2$. Сравним $(2n)^2$ с квадратом предыдущего числа $(2k^2+k-1)^2=4k^4+4k^3-3k^2-2k+1$:

$$(2n)^2>4k^4+4k^3-3k^2-2k+1 \Leftrightarrow 4k^4+4k^3+4k>4k^4+4k^3-3k^2-2k+1 \Leftrightarrow 3k^2+6k-1>0.$$

Решения последнего неравенства образуют числа, принадлежащие множеству

$$\left(-\infty;\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{-3+2\sqrt{3}}{3};+\infty\right),$$

поэтому указанное неравенство выполняется для всех натуральных k (так как $\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}<1\Leftrightarrow -3+2\sqrt{3}<3\Leftrightarrow\sqrt{12}<6$). Следовательно, при $k>4$ выполнены неравенства $(2k^2+k-1)^2<(2n)^2<(2k^2+k)^2$, что невозможно.

Остаётся перебрать значения $k=1,2,3,4$. Проверка показывает, что подходят только $k=4$, $n=18$.

8. Найдите минимальное значение дискриминанта квадратного трёхчлена, график которого не имеет общих точек с областями, расположенными ниже оси абсцисс и над графиком функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ответ: -4.

Решение. Так как дискриминант квадратного трёхчлена

$$D=b^2-4ac,$$

то будем искать максимальное значение произведения ac.Так как для всех x выполнено неравенство $ax^2+bx+c\geqslant 0$, то $a\geqslant 0$, $c\geqslant 0$. Пусть

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-(ax^2+bx+c).$$

Так как для всех $|x|<1$ верно $f(x)\geqslant 0$, то

$$0\leqslant f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}-(a+2c).$$

Значит $a+2c\leqslant 2\sqrt{2}$ поэтому из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем:

$$2\sqrt{2}\geqslant a+2c\geqslant 2\cdot\sqrt{a\cdot 2c}=2\sqrt{2}\sqrt{ac}.$$

Следовательно, $ac\leqslant 1$.

Докажем, что 1 — это максимум ac. Действительно, пусть $a=2c=\sqrt{2}$, $b=0$, тогда исходное неравенство принимает вид:

$$\sqrt{2}x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x^2-1)^2(x^2+1)\geqslant 0,\\ |x|<1.\end{cases}$$

Поэтому для дискриминанта квадратного трёхчлена справедливы неравенства

$$D=b^2-4ac\geqslant -4ac\geqslant -4$$

и его наименьшее значение равно -4.

9. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL, BM и CN, причем $\angle ANM = \angle ALC$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника LMN, две стороны которого равны 3 и 4.

Ответ: 2

Решение.

Справедливо следующее утверждение:

Пусть AL, BM и CN — биссектрисы внутренних углов треугольника. Если $\angle ANM = \angle ALC$, то $\angle BCA = 120^\circ$.

Доказательство. Проведём $MD \parallel AL$, тогда $\angle CMD = \frac{\alpha}{2}$. Угол ALC — внешний угол треугольника ALB, следовательно $\angle ANM = \angle ALC = \frac{\alpha}{2} + \beta$. Угол BMC — внутренний угол треугольника BMC, значит, $\angle BMC = \pi - \frac{\beta}{2} - \gamma = \alpha + \frac{\beta}{2}$. Поэтому $\angle BMD = \alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Угол NMC — внешний угол треугольника ANM, значит, $\angle NMC = \frac{3\alpha}{2} + \beta$. Поэтому $\angle BMN = \frac{3\alpha}{2} + \beta - \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Значит треугольники BMN и BMD равны, поэтому $NM = MD$ и $\angle MDN = \frac{\pi-(\alpha+\beta)}{2} = \frac{\gamma}{2}$. Поэтому точки N, M, C и D лежат на одной окружности, а так как NM и ND — хорды, стягивающие равные дуги, то $NM = ND$, т.е. треугольник NMD — правильный, значит $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{3}$. Значит $\angle BCA = 120^\circ$ (см. Рис. 4).

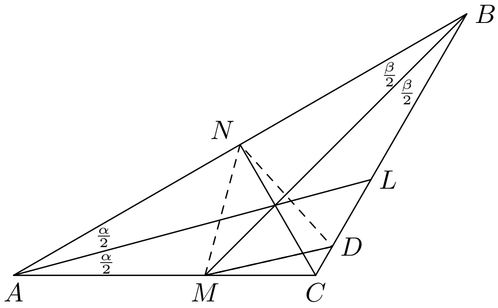

Рис. 4

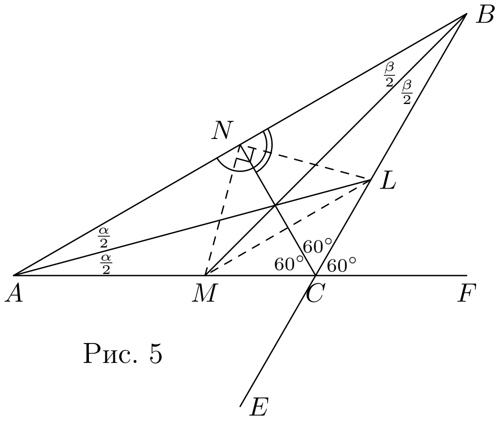

Рис. 5

Замечание. Справедливо и обратное утверждение: *если $\angle BCA = 120^\circ$ и AL, BM и CN — биссектрисы внутренних углов треугольника, то $\angle ANM = \angle ALC$.*

Прямая CB является биссектрисой угла NCF ($\Rightarrow$ точка L равноудалена от прямых CN и CF), а прямая AL — биссектрисой угла BAF ($\Rightarrow$ точка L равноудалена от прямых $AN = NB$ и $AF = CF$). Следовательно, точка L равноудалена от прямых NC и NB, т.е. прямая NL — биссектриса угла BNC. Аналогично, прямая CA — биссектриса угла ECN ($\Rightarrow$ точка M равноудалена от прямых CN и CE), а прямая BM — биссектриса угла ABC ($\Rightarrow$ точка M равноудалена от прямых $BA = NA$ и $BE = CE$). Следовательно, точка M равноудалена от прямых NA и NC, т.е прямая NM — биссектриса угла ANC. Поэтому $\angle MNL = 90^\circ$ (см. Рис. 5).

Оценим, какие значения могут принимать тангенсы острых углов $\triangle LMN$.

Из $\triangle ANC$ получаем, что $\angle ANC = 120^\circ - \alpha \Rightarrow \angle MNC = 60^\circ - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle NMC = 60^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Из $\triangle BNC$ получаем, что $\angle BNC = 120^\circ - \beta \Rightarrow \angle LNC = 60^\circ - \frac{\beta}{2} \Rightarrow \angle NLC = 60^\circ + \frac{\beta}{2}$.

По теореме синусов для $\triangle NMC$ получаем: $\dfrac{NC}{\sin\angle NMC} = \dfrac{NM}{\sin\angle NCM} \Rightarrow NC = \dfrac{2NM\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{3}}$.

По теореме синусов для $\triangle NLC$ получаем: $\dfrac{NC}{\sin\angle NLC} = \dfrac{NL}{\sin\angle NCL} \Rightarrow NC = \dfrac{2NL\sin\left(60^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}{\sqrt{3}}$.

С учётом равенства $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 30^\circ$ из последних двух соотношений получаем, что

$$\operatorname{tg}\angle NLM = \frac{NM}{NL} = \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Так как $\frac{\alpha}{2} \in (0^\circ, 30^\circ)$ и функция $y = \sin t$ возрастает в первой четверти, то $\operatorname{tg} \angle NLM \in \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Если 3 и 4 — длины катетов $\triangle NLM$, то либо $\operatorname{tg} \angle NLM = \dfrac{3}{4}$, либо $\operatorname{tg} \angle NLM = \dfrac{4}{3}$. Но так как $\dfrac{3}{4} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}}$, то этот случай невозможен. Следовательно, возможен лишь случай, когда $ML = 4$ (гипотенуза), а 3 — длина одного из катетов. Длина другого катета по теореме Пифагора равна $\sqrt{7}$. Так как справедливы неравенства $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \dfrac{\sqrt{7}}{3} < \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} < \dfrac{7}{9} < \dfrac{4}{3}$, то этот случай реализуется. Так как в прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, то

$$R = \frac{ML}{2} = 2.$$

10. При каких натуральных n и k неравенства $|x_1| + \ldots + |x_k| \leqslant n$ и $|y_1| + \ldots + |y_n| \leqslant k$ имеют одинаковые количества целочисленных решений $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$?

Ответ: для любых натуральных n и k.

Решение.

I. Вначале докажем, что для любых натуральных n и k и любого l неравенства:

$$x_1 + \ldots + x_k \leqslant n \quad (1) \qquad \text{и} \qquad y_1 + \ldots + y_n \leqslant k \quad (2)$$

имеют одинаковое число решений, в которых значения всех переменных целые неотрицательные и ровно l из них отличны от нуля.

Первое доказательство. Действительно, если $l = 0$ то у каждого неравенства единственное решение ($x_1 = \ldots = x_k = 0$ и $y_1 = \ldots = y_n = 0$). Если же $l > 0$, то каждому такому решению неравенства (1) однозначно сопоставим такое же решение неравенства (2): рассмотрим произвольное решение неравенства (1), в котором m_1, m_2, …, m_l ($m_1 < m_2 < \ldots < m_l$) — номера переменных, отличных от нуля и переменные, стоящие на указанных местах принимают положительные значения: p_1, p_2, $\ldots p_l$. По этому решению построим решение неравенства (2): на местах с номерами p_1, $p_1 + p_2$, $p_1 + p_2 + p_3$, …, $p_1 + p_2 + \ldots + p_l$ поставим m_1, $m_2 - m_1$, $m_3 - m_2$,…, $m_l - m_{l-1}$, а на остальных местах поставим нули. Так как $m_1 > 0$, $m_2 - m_1 > 0$, $m_3 - m_2 > 0$,…, $m_l - m_{l-1} > 0$ и $m_1 + (m_2 - m_1) + (m_3 - m_2) + (m_l - m_{l-1}) = m_l \leqslant n$, то построено нужное решение неравенства (2). Аналогично: рассмотрим произвольное решение неравенства (2), в котором r_1, r_2, …, r_l ($r_1 < r_2 < \ldots < r_l$) номера переменных, отличных от нуля и переменные, стоящие на указанных местах принимают положительные значения: q_1, q_2, $\ldots q_l$. Тогда этому решению соответствует решение неравенства (1): на местах с номерами q_1, $q_1 + q_2$, $q_1 + q_2 + q_3$, …, $q_1 + q_2 + \ldots + q_l$ стоят r_1, $r_2 - r_1$, $r_3 - r_2$,…, $r_l - r_{l-1}$, а на остальных местах стоят нули, при этом $q_1 + q_2 + \ldots + q_l \leqslant n$ и $r_1 + (r_2 - r_1) + (r_3 - r_2) + (r_l - r_{l-1}) = r_l \leqslant k$.

Второе доказательство. Всякое решение неравенства $x_1 + x_2 + \ldots + x_l \leqslant n$, в котором значения всех переменных целые и положительные, можно изобразить в виде последовательности из n точек, разделенных l палочками, так что перед первой палочкой стоит x_1 точка, между первой и второй палочкой стоят x_2 точки, между второй и третьей палочкой стоят x_3 точки и т.д., между $l-1$-й и l-й запятой стоят x_l точек. Тогда палочки должны стоять в разных промежутках между точками, а последняя палочка может стоять как между точками (что соответствует строгому неравенству), так и после последней точки (что соответствует равенству). Причем любая такая расстановка палочек даёт решение указанного вида для этого неравенства.

Поэтому число решений указанного вида для этого неравенства равно числу способов выбрать из n промежутков между точками (одно место находится после всех точек) места для l палочек, то есть C_n^l. Поэтому число решений неравенства $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant n$, в котором значения всех переменных целые и неотрицательные и ровно l из них отличны от 0, равно $C_n^l C_k^l$ (C_n^l умножается на количество способов выбрать из k переменных l неотрицательных, т.е. на C_k^l).

Аналогично, число решений неравенства $y_1+y_2+\ldots+y_n \leqslant k$. в котором значения всех переменных целые и неотрицательные и ровно l из них отличны от 0, равно $C_k^l C_n^l$.

Тем самым доказали что для любых натуральных n и k и любого $l: \quad 0 \leqslant l \leqslant \min(n,k)$ неравенства:

$$x_1+\ldots+x_k \leqslant n \quad (1) \qquad \text{и} \qquad y_1+\ldots+y_n \leqslant k \quad (2)$$

имеют одинаковое число решений, в которых значения всех переменных целые неотрицательные и ровно l из них отличны от нуля.

II. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — решение неравенства (1), в котором все $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — целые и ровно l из них отличны от нуля, то из этого решения получаем ровно 2^l различных решений неравенства $|x_1| + \ldots + |x_k| \leqslant n$, заменяя каждое положительное $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ на два значения: x_i и $-x_i$. Отметим, что таким образом мы получим все целочисленные решения неравенства $|x_1| + \ldots + |x_k| \leqslant n$, у которых ровно l значений переменных отличны от нуля. Из этого рассуждения, используя утверждение пункта I, получаем: что для любых натуральных n и k неравенства

$$|x_1| + \ldots + |x_k| \leqslant n \qquad \text{и} \qquad |y_1| + \ldots + |y_n| \leqslant k$$

имеют одинаковое число целочисленных решений, в которых ровно l значений переменных отличны от нуля. Далее, перебирая все значения l от 0 до $\min(n,k)$, получаем доказательство утверждения.

Из приведённых рассуждений следует, что количество целочисленных решений неравенств

$$|x_1| + \ldots + |x_k| \leqslant n \qquad \text{и} \qquad |y_1| + \ldots + |y_n| \leqslant k$$

равно

$$\sum_{l=0}^{\min(n,k)} 2^l C_k^l C_n^l.$$