

1. Два олигарха Алехандро и Максимилиан за 2012 год взяли и разграбили свою страну. Известно, что состояние Алехандро на конец 2012 года равняется двум состояниям Максимилиана на конец 2011 года. А состояние Максимилиана на конец 2012 года меньше, чем состояние Алехандро на конец 2011 года. Что больше: состояние Максимилиана или национальные богатства страны?

**Ответ:** Состояние Максимилиана больше.

**Решение:** Рассмотрим таблицу, в которой  $z$ ,  $x$  — состояния Алехандро и Максимилиана в 2011 году:

	2011	2012
А	$z$	$2x$
М	$x$	$y$

Тогда  $N = (2x + y) - (x + z)$  — национальные богатства страны. Вычтем из них  $x$ , получаем  $N - x = y - z < 0$ , следовательно, они меньше состояния Максимилиана.

2. В гонке Формула-2013 участвуют 2 гонщика. Первый гонщик проехал 4 круга за то время, пока второй проехал три. В течении следующих трёх кругов из-за быстрой езды первому гонщику пришлось проехать дополнительно 20 метров по питстопу (не останавливаясь). Известно, что когда второй гощик проехал 6 кругов, первый проехал 7,75 круга. Найдите длину круга. (Скорости гонщиков постоянны.)

**Ответ:** 80 метров.

**Решение:** Если бы не остановка на питстопе, то первый гонщик проехал бы ровно 8 кругов за то время, пока второй проехал 6 кругов. Следовательно, питстоп составляет ровно  $\frac{1}{4}$  круга. Тогда весь круг равен 80 метров.

3. За круглым столом собрались несколько юнош и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юнош справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

**Ответ:** 35 человек.

**Решение:** Из условия видно, что девушек ровно 19.

Заметим, что количество девушек, слева от которых сидят юноши равно количеству юношей у которых справа сидят девушки. Таким образом 75% юношей равно 12, т.е. всего за столом сидит 16 юношей. Итого, получим 19 девушек + 16 юношей = 35 человек.

4. На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: “Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек”. Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

**Ответ:** Любое количество.

**Решение:** Рассмотрим следующую расстановку жителей острова (вегетарианцы обозначены буквами «В», каннибалы — буквами «К»)  $VKKVKKKVK \underbrace{K \dots K}_{\text{любое кол-во}}$ .

Каждый вегетарианец стоит либо через 2, либо через 5 от другого вегетарианца, следовательно, для них утверждение истинно. Для каннибалов, которые стоят рядом или через одного с каким-нибудь вегетарианцем утверждение ложно (напомним, что 1 — не простое!). Для каннибалов, стоящих в правой части, либо 1-й, либо 2-й

вегетарианец стоит через четное число людей (больше 2), следовательно для них утверждение тоже ложно. Таким образом, в ряд можно выстроить 6 и более жителей острова.

Непосредственно проверяется, что 1,2,3,4,5 жителей тоже можно выстроить, так, чтобы выполнялось условие задачи. Например брать начальные отрезки предложенного построения.

5. У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она одевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной ручке ровно один раз?

**Ответ:** Нет.

**Решение:** Рассмотрим первый браслет. Он должен побывать в паре с каждым из остальных 99 ровно один раз. Допустим Лиза надевает его  $n$  дней. Тогда он побывает в паре ровно с  $2n$  браслетами, что не может быть равно 99.

6. Найдите сумму цифр числа  $\underbrace{44\dots4}_{2012 \text{ раз}} \cdot \underbrace{99\dots9}_{2012 \text{ раз}}$

**Ответ:** 18108.

**Решение:** Заметим, что  $\underbrace{4\dots4}_{2012} \cdot \underbrace{9\dots9}_{2012} = \underbrace{4\dots40\dots0}_{2012} - \underbrace{4\dots4}_{2012} = \underbrace{4\dots43}_{2011} \underbrace{5\dots56}_{2011}$ .

Сумма цифр равна  $4 \cdot 2011 + 3 + 5 \cdot 2011 + 6 = 18108$ .

7. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы  $100 \times 100$  ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

**Решение:** Если верить Саше, то сумма цифр в каждой строке делится на 9, следовательно общая сумма цифр в таблице тоже будет делиться на 9. Но если верить Максиму, то сумма цифр во всех столбцах кроме одного делится на 9, а следовательно, сумма цифр в таблице не делится на 9. Противоречие.

8. Бешеный маляр бежит по клеткам доски  $2012 \times 2013$ , изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку, эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

**Ответ:** Да, всегда.

**Решение:** Если маляр пробежит от угловой клетки до произвольной белой, потом вернется в угловую клетку по тому же маршруту, то указанная клетка поменяет цвет, а все остальные клетки останутся прежнего цвета. Таким образом можно поменять цвет всех клеток, кроме угловой. Если ее цвет окажется черным, то маляр может просто спрыгнуть. а если белым, то маляр может пробежаться по периметру до нее и вернуться обратно тем же путем. Тогда ее цвет поменяется на черный.