ЛОМОНОСОВ – 2013. МЕХАНИКА. 9 классы

Краткие решения и критерии оценки задач

1. Гаврила с Глафирой взяли стакан, заполненный до краев водой, и немного воды вылили в три формочки для льда, положив их потом в морозильник. Когда лед замерз, получившиеся три кубика положили обратно в стакан. Гаврила предсказал, что часть воды из стакана выльется, так как при замерзании лед расширился в объеме. Глафира же утверждала, что уровень воды будет ниже края стакана, так как часть плавающего льда будет выступать над поверхностью воды. Кто же прав и почему?

Решение. Пусть V – объем воды в формочках. Тогда объем W льда в формочках можно определить из закона сохранения массы $V \cdot \rho_{\text{воды}} = W \cdot \rho_{\text{льда}}$. При плавании льда объемом W, погруженную в воду часть этого объема U, можно определить из условия плавания тел $U \cdot \rho_{\text{воды}} = W \cdot \rho_{\text{льда}}$. Очевидно поэтому, что $V = U$.

Ответ: Не прав никто. Вода будет заполнять стакан ровно до его краев.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **10 баллов –** правильный ответ, но недостаточно четкое его обоснование.

2. Перворазрядник Чуков пробегает один круг по пересеченной местности на три минуты быстрее, чем его одноклассник Геков (оба они бегут с постоянной скоростью). Если они побегут одновременно из одного места этого круга, но в разные стороны, то встретятся не ранее, чем через две минуты, а если они стартуют из одного места в одну сторону, то Чуков обгонит Гекова на круг не позже, чем через 18 минут. Определите, какие значения может принимать время, за которое Чуков пробегает один круг.

Решение. Если Чуков пробегает круг за t минут, то у Гекова на это уйдет $t+3$ минуты. Если длина круга равна L метров, то скорость Чукова $V_1 = \frac{L}{t}$, а скорость Гекова $V_2 = \frac{L}{t+3}$. По условию $\frac{L}{V_1+V_2} \geqslant 2$, $\frac{L}{V_1-V_2} \leqslant 18$.

Поэтому $\frac{L}{\frac{L}{t}+\frac{L}{t+3}} \geqslant 2$, отсюда $\frac{t(t+3)}{2t+3} \geqslant 2$, $t^2+3t \geqslant 4t+6$, $t^2-t-6 \geqslant 0$. Корни соответствующего уравнения: -2 и 3. Значит, $t \geqslant 3$.

Аналогично $\frac{L}{\frac{L}{t}-\frac{L}{t+3}} \leqslant 18$, отсюда $\frac{t(t+3)}{3} \leqslant 18$, $t^2+3t-54 \leqslant 0$. Корни соответствующего уравнения: -9 и 6. Значит, $t \leqslant 6$. Поэтому ответ: $[3; 6]$.

Ответ: От 3 до 6 минут (включая 3 и 6).

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **10 баллов –** решение доведено до правильных неравенств относительно t, но в дальнейшем сделаны ошибки; **5 баллов –** правильно выписаны уравнение и два неравенства относительно неудачно выбранных неизвестных величин, решение которых или не получено, или получено с ошибками.

3. Из точки, находящейся на поверхности земли, по всем направлениям с одинаковой скоростью 10 м/с выпускают большое количество маленьких шариков. Среди всех шариков, упавших от точки старта на расстоянии не ближе, чем 96% от расстояния, на котором упал дальше всех улетевший шарик, найдите тот, который проведет в полете наибольшее время.

Чему равно это время? Ответ выразите в секундах и округлите до одного знака после запятой. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Решение. Дальность полета тела, брошенного со скоростью V_0 под углом ∝ к горизонту, равна $l=\frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}$, а время полета равно $\tau=\frac{2V_0\sin\alpha}{g}$.

По условию $\frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}\geqslant\frac{96}{100}\frac{V_0^2\sin\left(2\cdot 45^\circ\right)}{g}$, т. е. $\sin 2\alpha\geqslant\frac{96}{100}$. Среди этих шариков нужно выбрать тот, у которого максимально $\tau=\frac{2V_0\sin\alpha}{g}$, т. е. тот, у которого $\sin\alpha$ является наибольшим. Т. к. $\arcsin\frac{24}{25}\leqslant 2\alpha\leqslant\pi-\arcsin\frac{24}{25}$, то $\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}$. Поэтому наибольшим временем полета является $\frac{2V_0}{g}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}\right)=\frac{2V_0}{g}\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}\right)$

$$=\frac{2V_0}{g}\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arcsin\frac{24}{25}\right)}{2}}=\frac{2V_0}{g}\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}}=\frac{2V_0}{g}\sqrt{\frac{16}{25}}=1{,}6\text{ с.}$$

Ответ: 1,6 секунды.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** в основном верное решение, но имеются дефекты (например, не обоснован выбор значения α); **10 баллов –** решение в основном верное, но содержит вычислительные ошибки; **5 баллов –** выписаны верные формулы для дальности и времени полета, но существенного продвижения нет.

4. Три шкива с параллельными осями и одинаковыми радиусами $r=2$ см должны быть соединены плоской ременной передачей. Расстояние между осями вращения шкивов O_1 и O_2 равно 12 см, а между осями вращения шкивов O_1 и O_3 равно 10 см. Расстояние от оси O_3 до плоскости, в которой находятся оси O_1 и O_2, равно 8 см. Определите длину ремня для передачи, который изготавливается путём сшивания концов нерастяжимого прорезиненного шнура (считаем, что длина ремня равна длине этого шнура). Всегда ли для его изготовления хватит шнура длиной 54 см?

Решение. 1) Вначале решается геометрическая задача о нахождении стороны O_2O_3. По условию $\sin\angle O_1=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$; поэтому $\cos\angle O_1=\pm\frac{3}{5}$. Третья сторона находится по теореме косинусов и равняется или 10 см, или $2\sqrt{97}$ см.

2) Периметр фигуры будет равен сумме трех прямолинейных отрезков и сумме трех дуг. Сумма прямолинейных отрезков равна периметру треугольника $O_1O_2O_3$.

3) Сумма длин трех дуг равна $r\cdot(\pi-\alpha)+r\cdot(\pi-\beta)+r\cdot(\pi-\gamma)$ (здесь α, β, γ – углы треугольника $O_1O_2O_3$), что равняется $r\cdot(3\pi-\alpha-\beta-\gamma)=r\cdot(3\pi-\pi)=2\pi r$.

4) В случае остроугольного треугольника требуемая длина ремня есть $12+10+10+2\pi\cdot 2=32+4\pi$ см (для справки: $32+4\pi\approx 44{,}57$). Это очевидно меньше, чем 54, поэтому шнура хватает.

5) В случае тупоугольного треугольника требуемая длина ремня есть $12+10+2\sqrt{97}+2\pi\cdot 2=22+2\sqrt{97}+4\pi$ см (для справки: $22+2\sqrt{97}+4\pi\approx 54{,}26$). Здесь шнура не хватает.

Поэтому ответ: **нет.** Для получения максимального балла требуется аккуратное сравнение $22+2\sqrt{97}+4\pi>54\iff\sqrt{97}+2\pi>16\iff\sqrt{97}+2\pi>9{,}8+6{,}2=16$.

Ответ: а) $32+4\pi$ см или $22+2\sqrt{97}+4\pi$ см; б) не всегда.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** в основном верное решение и верный ответ, но имеются дефекты (например: не проведено или некорректно проведено сравнение чисел в последнем пункте решения; не доказано, что сумма длин дуг равна длине окружности); **10 баллов –** решение в основном верное, но содержит вычислительные ошибки; **5 баллов –** рассмотрен только один из двух случаев, при этом решение и ответ (для данного случая) полностью верные.

5. Сосуд заполнен холодной водой. С этим сосудом проделывают следующую процедуру: отливают три четверти холодной воды и доливают до первоначального объема горячей водой. При этом температура воды в сосуде увеличивается на 16° С. После этого процедуру повторяют несколько раз: отливают три четверти объема воды и доливают до первоначального объема горячей водой (той же температуры).

А) За какое количество процедур температура воды в сосуде будет отличаться от температуры горячей воды на $0,5^\circ$ С?

Б) Возможно ли добиться того, чтобы температура воды в сосуде отличалась от температуры горячей воды ровно на 3° С?

Решение. Обозначим через α – отношение объема доливаемой воды к объему сосуда $\left(\alpha=\frac{3}{4}\right)$. Тогда из уравнения баланса тепла:

$$t_1=(1-\alpha)t_c+\alpha t_h \qquad (1)$$

$$t_2=(1-\alpha)t_1+\alpha t_h \quad \Rightarrow \quad t_2=t_h-(1-\alpha)^2(t_h-t_c) \qquad (2)$$

Аналогично $t_3=t_h-(1-\alpha)^3(t_h-t_c)$ (3)

…

$$t_n=t_h-(1-\alpha)^n(t_h-t_c) \qquad (4)$$

Из условия задачи и из (1) следует, что $t_h-t_c=\frac{64}{3}$. Из (4) получим, что: А) невозможно; Б) невозможно.

Ответ: А) невозможно; Б) невозможно.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** в основном верное решение и верный ответ, но имеются дефекты его обоснования; **10 баллов –** решение в основном верное, но содержит вычислительные ошибки.