Олимпиада «Ломоносов 2012 – 2013» по физике
Решения задач для 10-х – 11-х классов
Отборочный этап

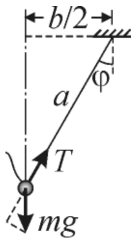
первый тур

1. Поезд начинает двигаться с постоянным ускорением и проходит начальный отрезок пути разгона, составляющий 1/9 часть от полного пути разгона, со средней скоростью $v_{ср}$ = 10 км/ч. Какова скорость v поезда в конце пути разгона? Ответ приведите в км/ч и округлите до целых.

1. Решение. Поскольку движение поезда является равноускоренным с нулевой начальной скоростью, справедливы равенства: $v_{ср}=\frac{v_1}{2}$, $\frac{L}{9}=\frac{v_1 t_1}{2}$, $L=\frac{vt}{2}$. Здесь v_1 – скорость поезда в конце девятой части пути разгона, t_1 – время его движения на 1/9 пути разгона, t – полное время движения поезда на всем пути разгона, L – длина пути разгона. Из этих равенств следует, что $v=18v_{ср}\frac{t_1}{t}$. По законам равноускоренного движения $\left(\frac{t_1}{t}\right)^2=\frac{1}{9}$. **Ответ:** $v=6v_{ср}=60$ км/ч.

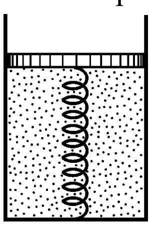
2. Шарик массой $m=100$ г подвешен на двух одинаковых нитях длиной $a=1$ м каждая так, что точки подвеса нитей расположены на одной горизонтали. Расстояние между точками подвеса нитей равно $b=1$ м. Найдите силу натяжения T правой нити сразу после пережигания левой нити. Ускорение свободного падения примите равным $g=10$ м/с^2. Нити считайте нерастяжимыми. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

2. Решение. После того, как одну из нитей пережгут, шарик начнет двигаться по дуге окружности радиуса a. В начальный момент скорость шарика и его центростремительное ускорение будут равны нулю. Отсюда следует, что сумма сил, действующих на шарик в направлении нити, также равна нулю. Величина силы натяжения нити в этот момент определяется формулой $T=mg\cos\varphi$, где g – ускорение свободного падения, φ – начальный угол отклонения нити от вертикали. Косинус этого угла выражается формулой $\cos\varphi=\sqrt{1-(b/2a)^2}$. Отсюда получаем $(T/mg)^2=1-(b/2a)^2$ и $T=mg\sqrt{1-(b/2a)^2}\approx 0{,}87$ Н.



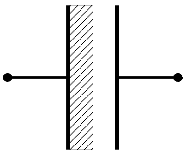
Ответ: $T=mg\sqrt{1-(b/2a)^2}\approx 0{,}87$ Н.

3. В вертикально расположенном цилиндре находится кислород массой $m=64$ г, отделенный от атмосферы поршнем, который соединен с дном цилиндра пружиной жесткостью $k=8{,}3\cdot 10^2$ Н/м. При температуре $T_1=300$ К поршень располагается на расстоянии $h=1$ м от дна цилиндра. До какой температуры T_2 надо нагреть кислород, чтобы поршень расположился на высоте $H=1{,}5$ м от дна цилиндра? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К), молярная масса кислорода $M=32$ г/моль. Ответ приведите по шкале Кельвина, округлив его до одного знака после запятой.



3. Решение. Обозначим через M_0 массу поршня, а через p_0 – атмосферное давление. На поршень действуют в общем случае четыре силы: сила тяжести $M_0 g$, сила упругости пружины kx (x – удлинение пружины) и сила атмосферного давления $p_0 S$, направленные вниз, и сила давления газа в цилиндре pS, направленная вверх. Условия равновесия поршня в начальном и конечном состояниях имеют вид: $M_0 g + p_0 S + kx_1 = p_1 S$, $M_0 g + p_0 S + kx_2 = p_2 S$. Здесь p_1 и p_2 – давления газа в начальном и конечном состояниях. Вычитая из второго уравнения первое, получаем: $p_2 - p_1 = \frac{k}{S}(x_2 - x_1) = \frac{k}{S}(H - h)$. С другой стороны, из уравнения Менделеева–Клапейрона, записанного для начального и конечного состояний газа: $p_1 hS = \frac{m}{M} RT_1$, $p_2 HS = \frac{m}{M} RT_2$, вытекает, что $p_2 - p_1 = \frac{mR}{MS}\left(\frac{T_2}{H} - \frac{T_1}{h}\right)$. Приравнивая разности давлений газа, найденные этими способами, получаем $T_2 = T_1 \frac{H}{h} + \frac{MkH(H-h)}{mR} = 487{,}5$ К.

Ответ: $T_2 = T_1 \frac{H}{h} + \frac{MkH(H-h)}{mR} = 487{,}5$ К.



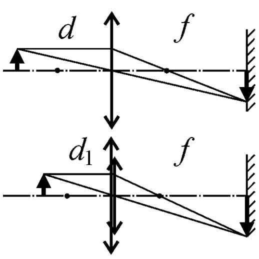
4. В плоский воздушный конденсатор вставили диэлектрическую пластину так, что она заняла половину пространства между обкладками конденсатора (см. рисунок). При этом емкость конденсатора увеличилась в $n = 1{,}6$ раз. Определите диэлектрическую проницаемость ε пластины. Ответ округлите до целых.

4. Решение. Емкость конденсатора с диэлектриком $C = \frac{q}{u}$, где $u = \frac{d}{2} \cdot \left(E + E_0\right)$, d – расстояние между пластинами конденсатора, $E = \frac{E_0}{\varepsilon}$ – напряженность поля в диэлектрике, E_0 – напряженность поля в пространстве, свободном от диэлектрика. Отсюда $C = \frac{2q\varepsilon}{dE_0(\varepsilon + 1)}$. Емкость пустого конденсатора $C_0 = \frac{q}{dE_0}$. Таким образом, $n = \frac{C}{C_0} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1}$. Отсюда $\varepsilon = \frac{n}{2-n} = 4$.

Ответ: $\varepsilon = \frac{n}{2-n} = 4$.

5. На расстоянии *f* = 15 м от объектива проекционного аппарата расположен экран с размерами 2×3 м. На экране получено четкое изображение диапозитива, имеющего размеры 24×36 мм. При этом изображение занимает половину площади экрана. Рассчитайте оптическую силу D тонкой линзы, которую следует вплотную приставить к объективу проекционного аппарата, чтобы четкое изображение точно уложилось в размеры экрана. Объектив проекционного аппарата считайте тонкой линзой. Ответ приведите в диоптриях, округлив до одного знака после запятой

5. Решение. Условие задачи допускает два равноценных подхода к решению. *В первом подходе* естественно предположить, что объектив проекционного аппарата остается неподвижным, а



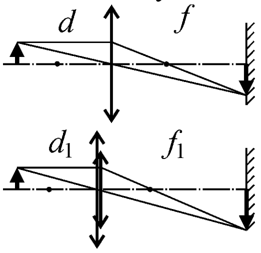
формирование резкого изображения на экране достигается путем перемещения диапозитива. Как известно, линейное увеличение Г, даваемое линзой, может быть рассчитано по формуле $\Gamma = \frac{f}{d}$, где d – расстояние от диапозитива до линзы (объектива), а f – расстояние от линзы до экрана, которое не изменяется. Из формулы тонкой линзы следует, что оптическая сила линзы $D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f}(\Gamma + 1)$.

При сдвинутых вплотную тонких линзах их оптические силы складываются. Обозначив через D_0 оптическую силу объектива диапроектора, а через D – оптическую силу добавочной линзы, имеем:

$D_0 = \frac{1}{f}(\Gamma_0 + 1)$, $D + D_0 = \frac{1}{f}(\Gamma + 1)$, откуда $D = \frac{1}{f}(\Gamma - \Gamma_0)$. Учитывая, что конечное увеличение $\Gamma = \frac{2000}{24} = \frac{3000}{36} \approx 83{,}3$, а начальное $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$, находим, что $D \approx 1{,}6$ дптр.

Ответ: $D = \frac{1}{f}(\Gamma - \Gamma_0) \approx 1{,}6$ дптр, где $\Gamma = \frac{2000}{24} \approx 83{,}3$; $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$.

В рамках *второго подхода* можно считать, что диапозитив остается неподвижным, а после прижимания к объективу дополнительной линзы, для фокусировки изображения на экран перемещают объектив. В этом случае расстояние между диапозитивом и экраном не изменяется, поэтому $d + f = d_1 + f_1$, где d – первоначальное расстояние от диапозитива до объектива, а f – первоначальное расстояние от объектива до экрана, d_1 и f_1 – те же расстояния после прижимания дополнительной линзы (см. рисунок). По формуле линзы имеем $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_0$, $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = D_0 + D$, где D_0 – оптическая сила объектива диапроектора, а D – оптическая сила добавочной линзы. Отсюда $D = \frac{f_1 + d_1}{d_1 f_1} - \frac{f + d}{df} = (f + d)\left(\frac{1}{d_1 f_1} - \frac{1}{df}\right)$. Увеличение, даваемое объективом, $\Gamma_0 = \frac{f}{d}$, увеличение, даваемое объективом с добавочной линзой, $\Gamma = \frac{f_1}{d_1}$, причем $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}}$. Приведем промежуточные преобразования: $d_1 = \frac{f_1}{\Gamma}$, $d_1 + f_1 = f_1\frac{\Gamma + 1}{\Gamma}$, $d = f\frac{\sqrt{2}}{\Gamma}$, $d + f = f\frac{\Gamma + \sqrt{2}}{\Gamma}$, $f_1 = f\frac{\Gamma + \sqrt{2}}{\Gamma + 1}$, $d_1 = f\frac{\Gamma + \sqrt{2}}{\Gamma(\Gamma + 1)}$.

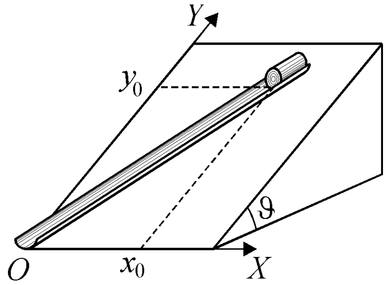


Подставляя записанные выражения в формулу для D, находим, что $D = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\Gamma^2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}(\Gamma + \sqrt{2})f}$. По условию $\Gamma = \frac{2000}{24} = \frac{3000}{36} \approx 83{,}3$. Учитывая, что $\Gamma >> 1$, это выражение можно упростить и привести к виду $D \approx \frac{1}{f}(\Gamma - \Gamma_0)$, где $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$.

Ответ: $D = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\Gamma^2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}(\Gamma + \sqrt{2})f} \approx \frac{1}{f}(\Gamma - \Gamma_0) \approx 1{,}6$ дптр, где $\Gamma = \frac{2000}{24} \approx 83{,}3$; $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$.

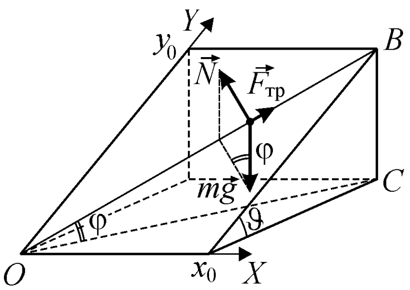
Поскольку увеличение изображения достаточно велико ($\Gamma, \Gamma_0 >> 1$), ответы при обоих подходах практически совпадают. Поэтому оба подхода следует считать правильными.

6. На наклонной плоскости, образующей с горизонтальной поверхностью угол $\vartheta = 30°$, закреплен желоб, как показано на рисунке. С плоскостью связана координатная система XOY, начало которой совмещено с нижней точкой желоба. По желобу из состояния покоя начинает соскальзывать маленькая гирька. Найдите скорость v гирьки в нижней точке желоба, если начальные координаты гирьки $x_0 = 0{,}5$ м, $y_0 = 1$ м, а коэффициент трения между гирькой и желобом $\mu = 0{,}3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до одного знака после запятой.



6. Решение. Гирька движется по желобу вдоль прямой OB, образующей с горизонталью угол φ, под действием сил, изображенных на рисунке. Здесь m – масса гирьки, $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{N}$ –

нормальная составляющая силы реакции желоба, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения, причем $F_{\text{тр}} = \mu N$ и $N = mg\cos\varphi$. Из рисунка видно, что $\cos\varphi = \dfrac{OC}{OB}$, где $OC = \sqrt{x_0^2 + y_0^2\cos^2\vartheta}$, $OB = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Следовательно, $F_{\text{тр}} = \mu mg\dfrac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2\cos^2\vartheta}}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$. Работа силы трения при перемещении гирьки из точки B в точку O равна по модулю $A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot OB = \mu mg\sqrt{x_0^2 + y_0^2\cos^2\vartheta}$. По закону изменения механической энергии $mgy_0\sin\vartheta = \dfrac{mv^2}{2} + \mu mg\sqrt{x_0^2 + y_0^2\cos^2\vartheta}$. Выражая из этого равенства v, получаем, что $v = \sqrt{2g(y_0\sin\vartheta - \mu\sqrt{x_0^2 + y_0^2\cos^2\vartheta})} = 2{,}0$ м/с.



Ответ. $v = \sqrt{2g(y_0\sin\vartheta - \mu\sqrt{x_0^2 + y_0^2\cos^2\vartheta})} = 2{,}0$ м/с.

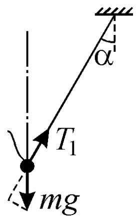
второй тур

1. С поверхности земли подброшен вертикально вверх небольшой шарик с начальной скоростью v_0 = 5 м/с. В тот момент, когда он достиг верхней точки, снизу, с того же места подброшен точно такой же шарик с такой же начальной скоростью. При столкновении шарики слипаются и движутся далее как одно целое. Определите промежуток времени t, в течение которого первый шарик находился в полёте до соприкосновения с поверхностью земли. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2. Ответ округлите до одного знака после запятой.

1. Решение. Выберем систему отсчета с началом на поверхности земли и координатной осью OY, направленной вертикально вверх. Уравнения движения шариков имеют вид: $y_1(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$, $y_2(t) = v_0(t - t_0) - \dfrac{g(t - t_0)^2}{2}$, где $t_0 = \dfrac{v_0}{g}$ – время подъема первого шарика до верхней точки. Из равенства $y_1(t_1) = y_2(t_1)$ находим, что промежуток времени t_1 от момента подбрасывания первого шарика до столкновения шариков $t_1 = \dfrac{3}{2}\dfrac{v_0}{g}$, а высота h, на которой произойдет столкновение, $h = \dfrac{3}{8}\dfrac{v_0^2}{g}$. Непосредственно перед столкновением скорости каждого из шариков по величине равны $v = \dfrac{v_0}{2}$, но направлены в противоположные стороны. По закону сохранения импульса сразу после столкновения скорость слипшихся шариков равна нулю. Время их свободного падения на землю с высоты h равно $t_2 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \dfrac{v_0}{2g}\sqrt{3}$. Общее время полёта первого шарика (т.е. искомый промежуток времени) $t = t_1 + t_2 = \dfrac{v_0}{2g}(3 + \sqrt{3}) \approx 1{,}2$ с. **Ответ:** $t = \dfrac{v_0}{2g}(3 + \sqrt{3}) \approx 1{,}2$ с.

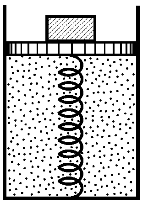
2. При испытании парашютной системы груз подвесили на двух одинаковых стропах так, что стропы составили с вертикалью одинаковые углы. При этом натяжение каждой стропы составило величину $T = 1000$ Н. Затем одну из строп перерезали. В этот момент сила натяжения другой стропы возросла до величины $T_1 = 1200$ Н. Пренебрегая размерами груза, определите его массу m. Стропы считайте невесомыми и нерастяжимыми. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до целых.

2. Решение. Условие равновесия груза, подвешенного на двух стропах, имеет вид $mg = 2T\cos\alpha$, где α – угол, который составляет стропа с вертикалью. В момент, когда одну из строп перерезают, ускорение груза в проекции на направление второй стропы равно нулю. Отсюда $T_1 = mg\cos\alpha$. Решая эту систему уравнений, находим $m = \frac{1}{g}\sqrt{2TT_1} \approx 155$ кг.



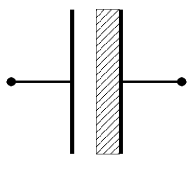
Ответ: $m = \frac{1}{g}\sqrt{2TT_1} \approx 155$ кг.

3. Один моль кислорода находится в гладком вертикальном цилиндре под поршнем с грузом. Поршень связан с дном цилиндра пружиной, коэффициент упругости которой $k = 10^4$ Н/м. Расстояние от поршня до дна цилиндра $h_1 = 0{,}3$ м. После нагрева кислорода до температуры $T_2 = 450$ К расстояние от поршня до дна цилиндра стало равным $h_2 = 0{,}4$ м. Какой была температура кислорода T_1 перед его нагревом? Универсальную газовую постоянную примите равной $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К). Ответ приведите по шкале Кельвина, округлив его до целых.



3. Решение. В исходном состоянии условие равновесия поршня имеет вид: $Mg + p_0S + k\Delta x_1 = p_1S$. Здесь M – масса поршня с грузом, S – площадь поршня, Δx_1 – начальное растяжение пружины, p_0 – атмосферное давление, p_1 – начальное давление кислорода под поршнем. После нагрева кислорода условие равновесия поршня примет вид: $Mg + p_0S + k\Delta x_2 = p_2S$. Здесь Δx_2 – конечное растяжение пружины, p_2 – конечное давление под поршнем. Из уравнения состояния кислорода следует, что $p_1V_1 = RT_1$, $p_2V_2 = RT_2$, откуда $p_2 - p_1 = R\left(\frac{T_2}{V_2} - \frac{T_1}{V_1}\right)$. С другой стороны $p_2 - p_1 = \frac{k(h_2 - h_1)}{S}$. Из записанных выражений получаем, что $T_1 = T_2\frac{h_1}{h_2} - \frac{kh_1(h_2 - h_1)}{R} \approx 301$ К.

Ответ: $T_1 = T_2\frac{h_1}{h_2} - \frac{kh_1(h_2 - h_1)}{R} \approx 301$ К.

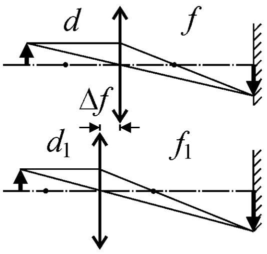


4. Пространство между обкладками плоского конденсатора наполовину заполнено диэлектриком, как показано на рисунке. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика $\varepsilon = 7$. Найдите разность потенциалов между обкладками конденсатора, если напряженность электрического поля в диэлектрике $E = 500$ В/м. Расстояние между обкладками $d = 1$ см. Ответ округлите до целых.

4. Решение. Обозначим через E_1 напряженность поля в воздушном зазоре конденсатора. По определению диэлектрической проницаемости $E = \frac{E_1}{\varepsilon}$ (диэлектрическая проницаемость воздуха ≈ 1). Учитывая связь между напряженностью поля и разностью потенциалов, получаем $U = E_1\frac{d}{2} + E\frac{d}{2} = E\frac{d}{2}(\varepsilon + 1)$. **Ответ:** $U = E\frac{d}{2}(\varepsilon + 1) = 20$ В.

5. Объектив проекционного аппарата находится на расстоянии f = 10 м от экрана, ширина которого 3 м, а высота 2 м. На экране получено четкое изображение диапозитива, занимающее половину площади экрана, причем центр изображения совпадает с центром экрана. На какое расстояние Δf и в какую сторону следует переместить проекционный аппарат, чтобы четкое изображение диапозитива заняло всю площадь экрана? Размеры диапозитива 24×36 мм. Объектив проекционного аппарата считайте тонкой линзой. Ответ округлите до целых. Поставьте перед полученным числом знак «+», если проектор нужно удалить от экрана, или знак «–», если проектор нужно приблизить к экрану.

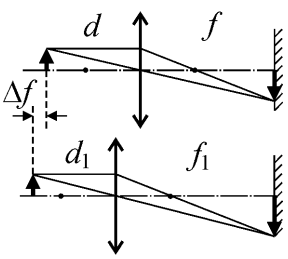
5. Решение. Условие задачи допускает два равноценных подхода к решению. *В первом подходе*



естественно предположить, что объектив неподвижен относительно проекционного аппарата и перемещается вместе с ним, а формирование резкого изображения на экране достигается путем изменения расстояния от диапозитива до объектива. Как известно, линейное увеличение Г, даваемое линзой, может быть рассчитано по формуле $\Gamma=\dfrac{f}{d}$, где d – расстояние от диапозитива до линзы (объектива), а f – расстояние от линзы до экрана. Из формулы тонкой линзы следует, что оптическая сила линзы $D=\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{f}(\Gamma+1)$. Оптическая сила остается неизменной, но изменяется расстояние между линзой и экраном. Поэтому справедливо равенство $\dfrac{1}{f}(\Gamma_0+1)=\dfrac{1}{f_1}(\Gamma+1)$. Отсюда $\Delta f=f_1-f=f\,\dfrac{\Gamma-\Gamma_0}{\Gamma_0+1}$. Учитывая, что конечное увеличение $\Gamma=\dfrac{2000}{24}=\dfrac{3000}{36}\approx 83{,}3$, а начальное $\Gamma_0=\dfrac{\Gamma}{\sqrt{2}}\approx 58{,}9$, находим, что $\Delta f\approx 4$ м, причем проектор следует удалить от экрана. Поскольку $\Gamma,\Gamma_0>>1$, выражение для Δf можно упростить и привести к виду $\Delta f\approx f\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Ответ: $\Delta f=+f\,\dfrac{\Gamma-\Gamma_0}{\Gamma_0+1}\approx f\left(\sqrt{2}-1\right)\approx +4$ м, где $\Gamma=\dfrac{2000}{24}\approx 83{,}3$; $\Gamma_0=\dfrac{\Gamma}{\sqrt{2}}\approx 58{,}9$.

В рамках *второго подхода* можно считать, что диапозитив жестко связан с проектором и перемещается вместе с ним, а фокусировка изображения на экран осуществляется за счет изменения расстояния между



объективом и диапозитивом. Пусть d – первоначальное расстояние от диапозитива до объектива, а f – первоначальное расстояние от объектива до экрана, d_1 и f_1 – те же расстояния после перемещения диапозитива вместе с аппаратом (см. рисунок). По формуле линзы имеем $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}=D$, $\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{f_1}=D$, где D – оптическая сила объектива диапроектора. Искомое смещение аппарата вместе с диапозитивом $\Delta f=d_1+f_1-(d+f)$. Увеличение, даваемое объективом несмещенного аппарата, $\Gamma_0=\dfrac{f}{d}$, увеличение, даваемое объективом смещенного аппарата, $\Gamma=\dfrac{f_1}{d_1}$, причем $\Gamma_0=\dfrac{\Gamma}{\sqrt{2}}$. Приведем промежуточные преобразования: $d_1=\dfrac{f_1}{\Gamma}$, $d_1+f_1=f_1\dfrac{\Gamma+1}{\Gamma}$, $d=f\,\dfrac{\sqrt{2}}{\Gamma}$, $d+f=f\,\dfrac{\Gamma+\sqrt{2}}{\Gamma}$, $\dfrac{f_1+d_1}{d_1 f_1}=\dfrac{f+d}{df}$, $f_1=f\,\dfrac{\sqrt{2}(\Gamma+1)}{\Gamma+\sqrt{2}}$. Из записанных выражений, получаем, что $\Delta f=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\Gamma^2-\sqrt{2})}{\Gamma(\Gamma+\sqrt{2})}f$, причем проектор следует удалить от экрана. По условию

$\Gamma = \frac{2000}{24} = \frac{3000}{36} \approx 83{,}3$. Поскольку $\Gamma >> 1$, последнее выражение можно упростить и привести к виду $\Delta f \approx f\frac{\Gamma - \Gamma_0}{\Gamma_0 + 1} \approx f\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 4{,}14$ м.

Ответ: $\Delta f = \frac{(\sqrt{2}-1)(\Gamma^2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\Gamma_0+1)} f \approx f\frac{\Gamma - \Gamma_0}{(\Gamma_0 + 1)} \approx f\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 4$ м, где $\Gamma = \frac{2000}{24} \approx 83{,}3$; $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$.

Поскольку увеличение изображения достаточно велико ($\Gamma, \Gamma_0 >> 1$), ответы при обоих подходах практически совпадают. Поэтому оба подхода следует считать правильными.

6. Груз массой $M = 1$ кг подвешен к неподвижной опоре на легкой пружине. Удерживая груз в положении равновесия, на него кладут брусок массой $m = 0{,}2$ кг, а затем отпускают. С какой максимальной силой $F_{\max}$ брусок будет действовать на груз в процессе движения? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

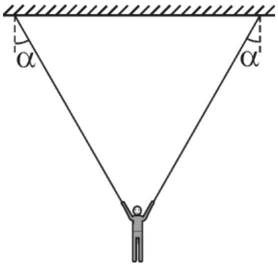
6. Решение. Из условия равновесия неподвижно висящего груза $kx_0 = Mg$ следует, что удлинение пружины при этом равно $x_0 = \frac{Mg}{k}$, где k – жесткость пружины. Выберем начало отсчета потенциальной энергии в точке, совпадающей с концом недеформированной пружины. Учитывая, что при максимальном растяжении пружины ($x = x_{\max}$) скорость груза с бруском обращается в нуль, запишем закон сохранения энергии: $\frac{kx_0^2}{2} - (M+m)gx_0 = \frac{kx_{\max}^2}{2} - (M+m)gx_{\max}$. Подставляя сюда x_0, находим, что $x_{\max} = \frac{(M+2m)g}{k}$. Запишем далее уравнения движения для груза с бруском и отдельно для бруска: $(M+m)a = (M+m)g - kx$, $ma = mg - F$. Отсюда сила, с которой груз действует на брусок, $F = \frac{mkx}{M+m}$. Максимальное значение эта сила принимает при $x = x_{\max}$. Объединяя записанные выражения, получаем, что $F_{\max} = mg\frac{M+2m}{M+m} \approx 2{,}33$ Н. **Ответ.** $F_{\max} = mg\frac{M+2m}{M+m} \approx 2{,}33$ Н.

третий тур

1. Две планеты движутся по круговым орбитам вокруг массивной звезды. Радиус орбиты второй планеты больше радиуса орбиты первой планеты в $k = 4$ раза. Найдите период обращения второй планеты, если известно, что период обращения первой планеты $T_1 = 100$ суток. Гравитационным взаимодействием между планетами можно пренебречь. Ответ приведите в сутках, округлив до целых.

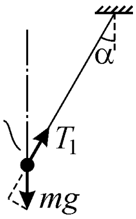
1 Решение. По второму закону Ньютона, используя выражение для центростремительного ускорения и силы всемирного тяготения, имеем $m \cdot \frac{v^2}{R} = G\frac{m \cdot M}{R^2}$. Период обращения по круговой орбите равен

$T = \dfrac{2\pi R}{v}$. Таким образом, $\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^3$, как это и следует из третьего закона Кеплера. Отсюда получаем, что $T_2 = T_1 \cdot \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^{3/2}$. **Ответ:** $T_2 = T_1 \cdot k^{3/2} = 800$ суток.



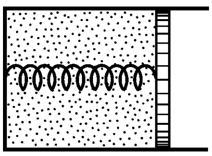
2. Перед выполнением упражнения гимнаст массой 60 кг висит неподвижно, держась за два кольца. При этом канаты, на которых подвешены кольца, образуют с вертикалью одинаковые углы $\alpha = 30°$. На какую величину ΔF увеличится нагрузка на правую руку гимнаста в тот момент, когда он резко отпустит левое кольцо? Размером тела гимнаста по сравнению с длиной канатов можно пренебречь. Канаты считайте невесомыми и нерастяжимыми. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до целых.

2. Решение. В начальном положении сумма сил, действующих на гимнаста, равна нулю. Отсюда $mg = 2T\cos\alpha$, где m – масса гимнаста, g – ускорение свободного падения, T – сила натяжения каната, равная нагрузке на каждую руку спортсмена. В момент, когда гимнаст отпускает левое кольцо, нагрузка на его правую руку выражается формулой $T_1 = mg\cos\alpha$. Это уравнение выражает тот факт, что ускорение спортсмена в направлении каната, а также сумма сил, действующих на него в этом направлении, равны нулю. Отсюда $\Delta F = T_1 - T = mg\left(\cos\alpha - \dfrac{1}{2\cos\alpha}\right) = \dfrac{mg}{2\sqrt{3}} \approx 173$ Н.



Ответ: $\Delta F = mg\left(\cos\alpha - \dfrac{1}{2\cos\alpha}\right) = \dfrac{mg}{2\sqrt{3}} \approx 173$ Н.

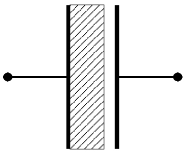
3. В цилиндрическом сосуде, расположенном горизонтально, находится смесь газов, стоящая из $\nu_1 = 0{,}5$ моль азота и $\nu_2 = 0{,}5$ моль аргона при температуре $T_1 = 300$ К. Гладкий подвижный поршень связан с дном сосуда пружиной. Расстояние от поршня до дна цилиндра $h = 0{,}5$ м. После нагрева смеси газов до температуры $T_2 = 420$ К поршень сдвинулся на $\Delta h = 0{,}1$ м. Каков коэффициент жесткости пружины k? Универсальную газовую постоянную примите равной $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К). Ответ приведите в килоньютонах на метр, округлив до одного знака после запятой.



3. Решение. В исходном состоянии смеси газов условие равновесия поршня имеет вид $p_0 S + k\,\Delta x_1 = p_1 S$. Здесь S –площадь поршня, Δx_1 – начальное растяжение пружины, p_0 – атмосферное давление, p_1 – начальное давление газа. После нагрева смеси газов условие равновесия поршня примет вид: $p_0 S + k\,\Delta x_2 = p_2 S$. Здесь Δx_2 – растяжение пружины, а p_2 –давление смеси газов после нагрева. Вычитая из второго уравнения первое, получаем: $p_2 - p_1 = \dfrac{k}{S}(\Delta x_2 - \Delta x_1) = \dfrac{k}{S}\Delta h$. С другой стороны, из уравнения Менделеева–Клапейрона, записанного для начального и конечного состояний смеси газов: $p_1 hS = (\nu_1 + \nu_2)RT_1$, $p_2(h + \Delta h)S = (\nu_1 + \nu_2)RT_2$, вытекает, что $p_2 - p_1 = \dfrac{(\nu_1 + \nu_2)R}{S}\left(\dfrac{T_2}{h + \Delta h} - \dfrac{T_1}{h}\right)$. Приравнивая разности давлений смеси, найденные этими способами, получаем, что $k = \dfrac{(\nu_1 + \nu_2)R\left[T_2 - T_1(1 + \Delta h / h)\right]}{\Delta h(h + \Delta h)}$.

Ответ: $k = \dfrac{(\nu_1 + \nu_2)R\left[T_2 - T_1(1 + \Delta h / h)\right]}{\Delta h(h + \Delta h)} = 8{,}3$ кН/м.

4. Расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора $d = 2$ см. Пространство между пластинами частично заполнено диэлектриком, как показано на рисунке. Толщина слоя диэлектрика $d_1 = 1{,}5$ см. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика $\varepsilon = 5$. Найдите напряженность E электрического поля в воздушном зазоре, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 3{,}2$ В. Ответ округлите до целых.



4. Решение. По определению диэлектрической проницаемости, напряженность поля в диэлектрике равна $\dfrac{E}{\varepsilon}$. Учитывая связь между разностью потенциалов и напряженностью однородного поля, получаем, что $U = E(d-d_1)+\dfrac{E}{\varepsilon}d_1$. Отсюда $E = \dfrac{\varepsilon U}{\varepsilon(d-d_1)+d_1}$. **Ответ:** $E = \dfrac{\varepsilon U}{\varepsilon(d-d_1)+d_1} = 400$ В/м.

5. Объектив проекционного аппарата находится на расстоянии $f = 4{,}0$ м от экрана. При этом резкое изображение диапозитива занимает $k = 0{,}25$ площади экрана. Для того чтобы резкое изображение заняло весь экран, проекционный аппарат пришлось дополнительно отодвинуть от экрана так, что его объектив переместился от своего первоначального положения на $l = 3{,}9$ м. Найдите фокусное расстояние F объектива проекционного аппарата, считая, что он является тонкой линзой, а диапозитив неподвижен относительно корпуса аппарата. Отношение сторон прямоугольного экрана совпадает с отношением сторон диапозитива. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых.

5. Решение. Обозначим через d_1 и d_2 расстояния от диапозитива до объектива проектора в первом и во втором случаях. Увеличения изображения диапозитива в первом и во втором случаях равны соответственно $\Gamma_1 = \dfrac{f}{d_1}$, $\Gamma_2 = \dfrac{f+l}{d_2}$, причем по условию $\dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \sqrt{k}$. Используя формулу линзы для двух положений проектора, а также записанные выше выражения, получаем систему уравнений:

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \qquad \frac{1}{d_2}+\frac{1}{f+l}=\frac{1}{F}, \qquad \frac{f}{d_1}=\sqrt{k}\,\frac{f+l}{d_2}.$$

Исключая из этих уравнений d_1 и d_2, находим $F = \dfrac{f(1-\sqrt{k})-l\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}$.

Ответ: $F = \dfrac{f(1-\sqrt{k})-l\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} = 10$ см.

6. Для полива садового участка используется подсоединенная к водопроводу короткая тонкая труба, установленная у поверхности земли под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. В некоторый момент времени садовод начал плавно открывать кран, подающий воду в трубу, в результате чего скорость v струи, вытекающей из трубы, стала возрастать со временем t по закону $v = kt$, где $k = 2$ м/с^2. Найдите ускорение a, с которым двигалась по горизонтальной поверхности земли точка падения водяной струи. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

6. Решение. Рассмотрим частицу струи, вылетевшую из трубы в момент времени t и имеющую скорость $v = kt$. Длительность полета этой частицы $\tau = \beta t$, ее приземление происходит в момент времени $T = t+\tau = (1+\beta)t$, где для краткости введено обозначение $\beta = \dfrac{2k\sin\alpha}{g}$. Координата точки падения выделенной частицы $x = \dfrac{(kt)^2}{g}\sin 2\alpha$. Искомое ускорение $a = \dfrac{d^2x}{dT^2} = \dfrac{1}{(1+\beta)^2}\dfrac{d^2x}{dt^2}$. Из записанных выражений следует, что $a = \dfrac{2g\,k^2\sin 2\alpha}{(g+2k\sin\alpha)^2} \approx 0{,}48$ м/с^2.

Ответ. $a = \dfrac{2g\,k^2 \sin 2\alpha}{(g + 2k \sin \alpha)^2} \approx 0{,}48$ м/с^2.