Материалы заданий отборочного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по математике за 2013/2014 учебный год

Тур 1

Участник олимпиады получал две разминочные задачи (каждая оценивалась в 1 балл) и десять задач основного задания (первые две задачи оценивались в 9 баллов, остальные – в 10 баллов). Таким образом, максимально возможная сумма баллов – 100.

При этом каждая из указанных задач предлагалась в нескольких вариантах. Подбор задач для каждого участника производился случайным образом, в результате чего варианты заданий у всех были разные.

Задание для разминки

1. Найдите больший корень уравнения $x^2+4x+3=0$.

Ответ: -1.

2. Две стороны прямоугольного треугольника равны 5 и 4. Какое наименьшее значение может принимать третья сторона?

Ответ: 3.

Основное задание

(первое число в номере задачи – порядковый номер задачи;
второе число – номер варианта)

1.1. Шариковая ручка стоит 10 рублей, гелевая – 50 рублей, а перьевая – 80 рублей. Какое наибольшее количество гелевых ручек можно купить при условии, что всего нужно купить ровно 20 ручек и среди них должны быть ручки всех трех типов, а истратить на них нужно ровно 1000 рублей?

Ответ: 13. *Решение.* Если куплено x шариковых ручек, y – гелевых и z – перьевых, то имеем два уравнения: $x+y+z=20$; $10x+50y+80z=1000$ (или $x+5y+8z=100$). Вычитая из второго уравнения первое, получим $4y+7z=80$. Отсюда следует, что z должно делиться на 4, т. е. $z=4n$. Значит, $4y+7\cdot 4n=80$, т. е. $y=20-7n$. Соответственно $x=20-y-z=3n$. Положительные решения получаются при $n=1$ и $n=2$. В итоге решением являются две тройки целых чисел: $(3, 13, 4)$ и $(6, 6, 8)$. Наибольшее возможное y равно 13.

1.2. Шариковая ручка стоит 10 рублей, гелевая – 40 рублей, а перьевая – 60 рублей. Какое наибольшее количество шариковых ручек можно купить при условии, что всего нужно купить ровно 15 ручек и среди них должны быть ручки всех трех типов, а истратить на них нужно ровно 500 рублей?

Ответ: 6. *Комментарии.* Решением являются две тройки целых чисел $(6, 5, 4)$ и $(4, 10, 1)$.

1.3. Шариковая ручка стоит 10 рублей, перьевая – 60 рублей, а гелевая – 70 рублей. Какое наибольшее количество перьевых ручек можно купить при условии, что всего нужно купить ровно 25 ручек и среди них должны быть ручки всех трех типов, а истратить на них нужно ровно 1000 рублей?

Ответ: 9. *Комментарии.* Решением являются две тройки целых чисел $(11, 9, 5)$ и $(12, 3, 10)$.

1.4. Шариковая ручка стоит 10 рублей, гелевая – 30 рублей, а перьевая – 60 рублей. Какое наибольшее количество шариковых ручек можно купить при условии, что всего нужно купить ровно 20 ручек и среди них должны быть ручки всех трех типов, а истратить на них нужно ровно 500 рублей?

Ответ: 11. *Комментарии.* Решением являются две тройки целых чисел $(11, 5, 4)$ и $(8, 10, 2)$.

2.1. Найдите наименьшее значение *a*, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна 0,28.

Ответ: $-0,2$ *Решение.* По теореме Виета $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (3a)^2 - 2a^2 = 7a^2$. По условию $7a^2 = \frac{28}{100}$, отсюда $a^2 = \frac{1}{25}$ и $a = \pm 0,2$. Важно при этом, что при $a = \pm 0,2$ дискриминант $D = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 > 0$.

2.2. Найдите наименьшее значение a, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2+3ax+a^2=0$ равна 2,52.

Ответ: $-0,6$

2.3. Найдите наименьшее значение a, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2+4ax+2a^2=0$ равна 1,08.

Ответ: $-0,3$

2.4. Найдите наименьшее значение a, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2+4ax+a^2=0$ равна 2,24.

Ответ: $-0,4$

3.1. Плоскость, параллельная основанию четырехугольной пирамиды объема 81, отсекает от нее пирамиду объема 3. Найдите объем пирамиды, четыре вершины которой совпадают с вершинами сечения, а пятая лежит в плоскости основания большей пирамиды.

Ответ: 6. *Решение*. Если обозначить первый данный в условии объем V, а второй v (в данном случае $V=81,\ v=3$), то большая пирамида и меньшая пирамида подобны с коэффициентом подобия $\sqrt[3]{\frac{V}{v}}$. Поэтому высота H большей пирамиды относится к высоте h меньшей как $\sqrt[3]{\frac{V}{v}}$. Так как высоте пирамиды, объем которой нужно найти, равна $H-h$, то $\frac{H-h}{h}=\sqrt[3]{\frac{V}{v}}-1$. Значит, объем искомой пирамиды равен $v\left(\sqrt[3]{\frac{V}{v}}-1\right)$.

3.2. Плоскость, параллельная основанию четырехугольной пирамиды объема 54, отсекает от нее пирамиду объема 16. Найдите объем пирамиды, четыре вершины которой совпадают с вершинами сечения, а пятая лежит в плоскости основания большей пирамиды.

Ответ: 8.

3.3. Плоскость, параллельная основанию четырехугольной пирамиды объема 27, отсекает от нее пирамиду объема 8. Найдите объем пирамиды, четыре вершины которой совпадают с вершинами сечения, а пятая лежит в плоскости основания большей пирамиды.

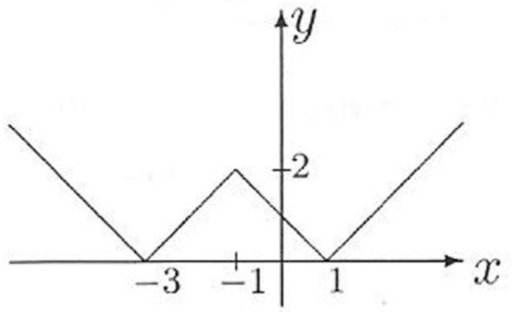
Ответ: 4.

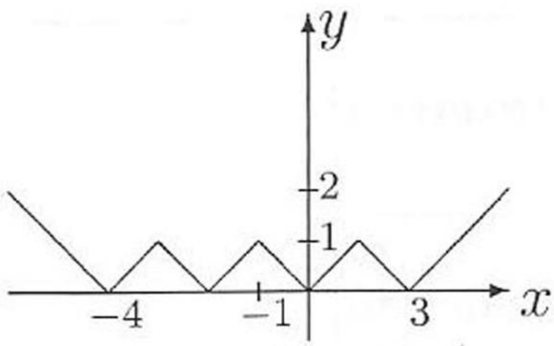
3.4. Плоскость, параллельная основанию четырехугольной пирамиды объема 54, отсекает от нее пирамиду объема 2. Найдите объем пирамиды, четыре вершины которой совпадают с вершинами сечения, а пятая лежит в плоскости основания большей пирамиды.

Ответ: 4.

4.1. Дана функция $f(x)=\left||x+1|-2\right|$. Сколько корней имеет уравнение $f\left(f\left(\ldots f\left(f(x)\right)\ldots\right)\right)=\frac{1}{2}$, в котором функция f берется 2013 раз?

Ответ: 4030. *Решение.* Рассматривая график функции f (*см. рис. 1*), приходим к выводу, что $|f(x)+1|=f(x)+1$ и $|f(x)+1|-2=f(x)-1$. Поэтому график функции $f\left(f(x)\right)$





имеет вид как на *рис. 2*.

Рис. 1

Рис. 2

Уравнение $f\left(f(x)\right)=\frac{1}{2}$ имеет 8 решений. Заметим, что между лучами $y=-x-4$, $x\le-4$ и $y=x-3$, $x\ge3$ находится ровно три треугольника, длины оснований которых равны 2, а высоты – 1. Следующая подстановка $f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ меняет график следующим образом: лучи $y=-x-4$, $x\le-4$ и $y=x-3$, $x\ge3$ перейдут в лучи $y=-x-5$, $x\le-5$ и $y=x-4$, $x\ge4$, а между ними появится еще один треугольник, длина основания которого равна 2, а высота – 1. Поэтому уравнение $f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)=\frac{1}{2}$ имеет 10 решений. Каждая следующая подстановка $f\left(...\right)$ меняет график функции аналогично: сдвигает на 1 крайние лучи влево и вправо соответственно и добавляет между лучами еще один треугольник, длина основания которого равна 2, а высота – 1. Таким образом, начиная с функции $f\left(f\left(x\right)\right)$, каждая следующая подстановка $f\left(...\right)$ увеличивает количество решений предыдущего уравнения на два. Получаем, что если применить функцию 2013 раз, то количество корней такого уравнения равно $8+2\cdot 2011=4030$.

4.2. Дана функция $f\left(x\right)=\left|\left|x+2\right|-4\right|$. Сколько корней имеет уравнение $f\left(f\left(...f\left(f\left(x\right)\right)...\right)\right)=1$, в котором функция f берется 2014 раз?

Ответ: 4032.

4.3. Дана функция $f\left(x\right)=\left|\left|x+1,5\right|-3\right|$. Сколько корней имеет уравнение $f\left(f\left(...f\left(f\left(x\right)\right)...\right)\right)=0,5$, в котором функция f берется 2012 раз?

Ответ: 4028.

4.4. Дана функция $f\left(x\right)=\left|\left|x+2,5\right|-5\right|$. Сколько корней имеет уравнение $f\left(f\left(...f\left(f\left(x\right)\right)...\right)\right)=1$, в котором функция f берется 2015 раз?

Ответ: 4034.

5.1. Укажите целое число, ближайшее к числу

$$\sqrt{2012-\sqrt{2013\cdot 2011}}+\sqrt{2010-\sqrt{2011\cdot 2009}}+...+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}.$$

Ответ: 31. *Решение.* Данное в условии число равно

$$\frac{\sqrt{4024-2\sqrt{2013\cdot 2011}}+\sqrt{4010-2\sqrt{2011\cdot 2009}}+...+\sqrt{4-2\sqrt{3\cdot 1}}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2013}-\sqrt{2011}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2011}-\sqrt{2009}\right)^2}+\ldots+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)^2}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2013}-\sqrt{2011}+\sqrt{2011}-\sqrt{2009}+\ldots+\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2013}-1}{\sqrt{2}}.$$

Так как $\frac{\sqrt{2013}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2012}{\sqrt{2013\cdot 2}+\sqrt{2}}>\frac{2012}{64+1,5}=\frac{4024}{131}>30,7$, и

$\frac{\sqrt{2013}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2012}{\sqrt{2013\cdot 2}+\sqrt{2}}<\frac{2012}{63+1}=\frac{503}{16}<31,5$, то искомое целое число равно 31.

5.2. Укажите целое число, ближайшее к числу

$\sqrt{10000-\sqrt{10001\cdot 9999}}+\sqrt{9998-\sqrt{9999\cdot 9997}}+\ldots+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}$.

Ответ: 70.

5.3. Укажите целое число, ближайшее к числу

$\sqrt{20000-\sqrt{20001\cdot 19999}}+\sqrt{19998-\sqrt{19999\cdot 19997}}+\ldots+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}$.

Ответ: 99.

5.4. Укажите целое число, ближайшее к числу

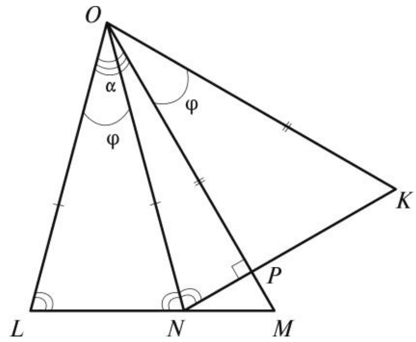
$\sqrt{5000-\sqrt{5001\cdot 4999}}+\sqrt{4998-\sqrt{4999\cdot 4997}}+\ldots+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}$.

Ответ: 49.

6. Треугольник *LOM* с углом $\angle LOM=\alpha°$ повернули на некоторый острый угол вокруг точки *O*. При этом точка *L* переходит в точку *N*, лежащую на стороне *LM*, а точка *M* – в такую точку *K*, что $OM\perp NK$. Найдите угол поворота (в градусах).

Примечание: В разных вариантах задавались разные значения для α : 21, 24, 27, 33, 39, 42, 48, 51, 54, 57, 63, 66, 69, 72, 78.

Ответ: $\frac{2}{3}\alpha$. *Решение*. Обозначим угол поворота через φ . Тогда $\angle LON = \angle MOK = \varphi$. Так как $ON = OL$ (свойство поворота), то $\angle OLN = \angle ONL = 90° - \frac{\varphi}{2}$.



Кроме того, $\angle ONK = \angle OLN = 90° - \frac{\varphi}{2}$ (следствие равенства ΔLOM и ΔNOK).

Поэтому $\angle NOP = \frac{\varphi}{2}$. Это означает, что $\alpha = \frac{3\varphi}{2}$, то есть $\varphi = \frac{2\alpha}{3}$.

7.1. Найдите количество всех целочисленных решений неравенства $\sqrt{1-\sin\frac{\pi x}{4}-3\cos\frac{\pi x}{2}}-\sqrt{6}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}\geq 0$, принадлежащих отрезку $[1991; 2013]$.

Ответ: 8. *Решение.* Обозначив $\sin\frac{\pi x}{4}=t$, получим $\sqrt{1-t-3\left(1-2t^2\right)}\geq\sqrt{6}\cdot t$, или $\sqrt{6t^2-t-2}\geq\sqrt{6}\cdot t$. При неотрицательных t получаем $6t^2-t-2\geq 6t^2$, или $t\leq -2$, то есть решений нет. При $t<0$ условие $6t^2-t-2\geq 0$ дает $t\leq -\frac{1}{2}$. Таким образом, получаем решение $\sin\frac{\pi x}{4}\leq -\frac{1}{2}$, откуда $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k\leq\frac{\pi x}{4}\leq -\frac{\pi}{6}+2\pi k$, или $-\frac{10}{3}+8k\leq x\leq -\frac{2}{3}+8k$.

Целые решения: $5+8k$, $6+8k$, $7+8k$. Из заданного промежутка в ответ войдут: 1991, 1997, 1998, 1999, 2005, 2006, 2007, 2013 – 8 чисел.

7.2. Найдите количество всех целочисленных решений неравенства $\sqrt{3\cos\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{4}+1}-\sqrt{6}\cdot\cos\frac{\pi x}{4}\geq 0$, принадлежащих отрезку $[1991; 2013]$.

Ответ: 9. *Комментарии.* Решение неравенства: $\frac{8}{3}+8k\leq x\leq\frac{16}{3}+8k$. Из заданного промежутка в ответ войдут: 1995, 1996, 1997, 2003, 2004, 2005, 2011, 2012, 2013 – 9 чисел.

7.3. Найдите количество всех целочисленных решений неравенства $\sqrt{1+\sin\frac{\pi x}{4}-3\cos\frac{\pi x}{2}}+\sqrt{6}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}\geq 0$, принадлежащих отрезку $[1991; 2013]$.

Ответ: 9. *Комментарии.* Решение неравенства: $\frac{2}{3}+8k\leq x\leq\frac{10}{3}+8k$. Из заданного промежутка в ответ войдут: 1993, 1994, 1995, 2001, 2002, 2003, 2009, 2010, 2011 – 9 чисел.

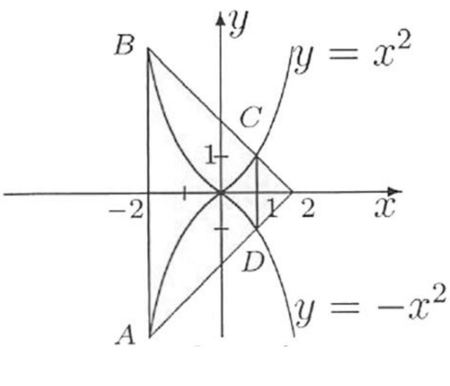
7.4. Найдите количество всех целочисленных решений неравенства $\sqrt{3\cos\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{4}+1}+\sqrt{6}\cdot\cos\frac{\pi x}{4}\geq 0$, принадлежащих отрезку $[1991; 2013]$.

Ответ: 9. *Комментарии.* Решение неравенства: $-\frac{4}{3}+8k\leq x\leq\frac{4}{3}+8k$. Из заданного промежутка в ответ войдут: 1991, 1992, 1993, 1999, 2000, 2001, 2007, 2008, 2009 – 9 чисел.

8.1. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $2(2-x)\geq|y-x^2|+|y+x^2|$.

Ответ: 15. *Решение.* В области над графиками функций $y=x^2$ и $y=-x^2$ исходное неравенство принимает вид $2-x\geq y$. В области под графиками функций $y=x^2$ и $y=-x^2$ исходное неравенство принимает вид $2-x\geq -y$, т. е. $y\geq x-2$. В области, лежащей над графиком функции $y=-x^2$ и под графиком функции $y=x^2$, исходное неравенство имеет вид $2-x\geq x^2$.

Поэтому точки (x, y), удовлетворяющие данному неравенству, образуют на координатной плоскости трапецию *ABCD*, ограниченную прямыми $y=-x+2$, $y=x-2$, $x=-2$ и $x=1$ (*см. рисунок*), вершины которой находятся в точках $(-2; -4)$, $(-2; 4)$, $(1;1)$ и $(1;-1)$.



Так как $AB=8$, $CD=2$, а высота трапеции равна 3, то искомая площадь равна $\frac{8+2}{2}\cdot 3=15$.

8.2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $2(3-2x)\ge|y-x^2|+|y+x^2|$.

Ответ: 40.

8.3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $|2y-x^2|+|2y+x^2|\le 4+2x$.

Ответ: 7,5.

8.4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $|y-2x^2|+|y+2x^2|\le 4(x+2)$.

Ответ: 30.

9.1. Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается на школьное крыльцо по лестнице, имеющей 10 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо подняться на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вверх (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами?

Ответ: 89. *Решение.* Заметим, что на крыльцо из одной ступеньки Маша может подняться одним способом, а на крыльцо из двух ступенек – двумя: либо наступив на каждую ступеньку, либо, перешагнув через первую ступеньку, попасть сразу на вторую.

Пусть a_n – количество способов, которыми Маша может подняться на крыльцо, имеющее *n* ступенек. Так как на *n*-ю ступеньку Маша может подняться либо с $(n-1)$-й ступеньки, либо с $(n-2)$-й ступеньки, то $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$.

Последовательно вычисляем: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=1+2=3$, $a_4=2+3=5$, $a_5=3+5=8$, $a_6=5+8=13$, $a_7=8+13=21$, $a_8=13+21=34$, $a_9=21+34=55$, $a_{10}=34+55=89$.

Заметим, что числа, построенные по правилу $F_0=0$, $F_1=1$, $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$ $(n\ge 2)$, называются числами Фибоначчи. Таким образом, $a_n=F_{n+1}$.

9.2. Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается на школьное крыльцо по лестнице, имеющей 9 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо подняться на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вверх (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами?

Ответ: 55.

9.3. Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается на школьное крыльцо по лестнице, имеющей 11 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо подняться на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вверх (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами?

Ответ: 144.

9.4. Первоклассница Маша, выходя из школы, каждый раз спускается со школьного крыльца по лестнице, имеющей 10 ступенек. Находясь вверху лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо спуститься на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вниз (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно выйти из школы, чтобы спуститься с крыльца всеми возможными способами?

Ответ: 89.

9.5. Первоклассница Маша, выходя из школы, каждый раз спускается со школьного крыльца по лестнице, имеющей 9 ступенек. Находясь вверху лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо спуститься на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вниз (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно выйти из школы, чтобы спуститься с крыльца всеми возможными способами?

Ответ: 55.

9.6. Первоклассница Маша, выходя из школы, каждый раз спускается со школьного крыльца по лестнице, имеющей 11 ступенек. Находясь вверху лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо спуститься на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вниз (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно выйти из школы, чтобы спуститься с крыльца всеми возможными способами?

Ответ: 144.

10.1. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени $x^6+a_1x^5+...+a_5x+a_6$ с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$, впишите в ответ сумму его коэффициентов $a_1+a_2+...+a_6$.

Ответ: -47. *Решение*. $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{5} \Rightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)^3=5 \Rightarrow x^3-3x^2\sqrt{2}+3x\cdot 2-2\sqrt{2}=5$

$\Rightarrow x^3+6x-5=\left(3x^2+2\right)\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \left(x^3+6x-5\right)^2=\left(3x^2+2\right)^2\cdot 2$

$\Rightarrow P_6\left(x\right)=\left(x^3+6x-5\right)^2-2\left(3x^2+2\right)^2$. При этом сам многочлен в явном виде получать не нужно (для справки заметим, что это многочлен $x^6-6x^4-10x^3+12x^2-60x+17$), так как нам нужна сумма: $a_1+...+a_6=P_6\left(1\right)-1=2^2-2\cdot 5^2-1=-47$.

10.2. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени $x^6+a_1x^5+...+a_5x+a_6$ с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число $\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}$, впишите в ответ сумму его коэффициентов $a_1+a_2+...+a_6$.

Ответ: 93.

10.3. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени $x^6+a_1x^5+...+a_5x+a_6$ с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$, впишите в ответ сумму его коэффициентов $a_1+a_2+...+a_6$.

Ответ: 49.

10.4. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени $x^6 + a_1x^5 + ... + a_5x + a_6$ с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$, впишите в ответ сумму его коэффициентов $a_1 + a_2 + ... + a_6$.

Ответ: -35.

10.5. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени $x^6 + a_1x^5 + ... + a_5x + a_6$ с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число $\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}$, впишите в ответ сумму его коэффициентов $a_1 + a_2 + ... + a_6$.

Ответ: -84.

10.6. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени $x^6 + a_1x^5 + ... + a_5x + a_6$ с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число $\sqrt{3} - \sqrt[3]{5}$, впишите в ответ сумму его коэффициентов $a_1 + a_2 + ... + a_6$.

Ответ: 116.

Материалы заданий отборочного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по математике за 2013/2014 учебный год

Тур 2

Участник олимпиады получал две разминочные задачи (каждая оценивалась в 1 балл) и десять задач основного задания (первые две задачи оценивались в 9 баллов, остальные – в 10 баллов). Таким образом, максимально возможная сумма баллов – 100.

При этом каждая из указанных задач предлагалась в нескольких вариантах. Подбор задач для каждого участника производился случайным образом, в результате чего варианты заданий у всех были разные.

Задание для разминки

1. Найдите 20% от 6.

Ответ: 1,2.

2. Найдите периметр прямоугольника, если сумма длин его различных трёх сторон может равняться 6 или 9.

Ответ: 10. Комментарии: прямоугольник со сторонами 1, 1, 4, 4.

Основное задание

(первое число в номере задачи – порядковый номер задачи;
второе число – номер варианта)

1.1. Сколько страниц в книжке, если для полной нумерации ее страниц (от первой до последней) потребовалось 708 цифр?

Ответ: 272. *Решение.* Однозначными и двузначными числами занумеровано 99 страниц – на это ушло $9\cdot 1+90\cdot 2=189$ цифр. Значит, осталось $708-189=519$ цифр, которыми записано $519:3=173$ трехзначных числа.

1.2. Сколько страниц в книжке, если для полной нумерации ее страниц (от первой до последней) потребовалось 900 цифр?

Ответ: 336.

1.3. Сколько страниц в книжке, если для полной нумерации ее страниц (от первой до последней) потребовалось 804 цифры?

Ответ: 304.

1.4. Сколько страниц в книжке, если для полной нумерации ее страниц (от первой до последней) потребовалось 996 цифр?

Ответ: 368.

2.1. Найдите сумму всех таких целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-2012; 2013]$, при которых уравнение $(a-3)x^2+2(3-a)x+\dfrac{a-7}{a+2}=0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 2011. *Решение.* При $a=3$ решений нет. При остальных *a* должно быть $\dfrac{D}{4}=(a-3)^2-\dfrac{(a-3)(a-7)}{a+2}\geq 0$. Последнее неравенство (плюс учет условия $a\neq 3$) имеет решение $a\in(-\infty;-2)\cup\{1\}\cup(3;+\infty)$. Искомая сумме равна:
$-2012-2011-...-5-4-3+1+4+5+...2013\ =-3+1+2013\ =2011$.

2.2. Найдите сумму всех таких целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-2012; 2013]$, при которых уравнение $(a-1)x^2-2(1-a)x+\dfrac{a-5}{a+4}=0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 2021.

2.3. Найдите сумму всех таких целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-2012; 2013]$, при которых уравнение $(a+1)x^2+2(1+a)x+\dfrac{a-3}{a+6}=0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 2031.

2.4. Найдите сумму всех таких целых значений a, принадлежащих отрезку $[-2012;\, 2013]$, при которых уравнение $(a+2)x^2+2(2+a)x+\dfrac{a-2}{a+7}=0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 2036.

3.1. Из сосуда, до краев наполненного вкусным 100%-м соком, пятиклассница Маша за день отпила 1 л сока, а вечером долила в сосуд 1 л воды. На следующий день после тщательного перемешивания она выпила 1 л смеси и вечером долила 1 л воды. На третий день, снова перемешав смесь, она выпила 1 л этой смеси и вечером долила 1 л воды. Утром следующего дня родители выяснили, что объем воды в сосуде на 1,5 л больше объема оставшегося сока. Сколько литров сока выпила в итоге Маша? Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 1,75. *Решение*. Пусть объем сосуда в литрах равен x. После первого дня в сосуде останется $(x-1)$ литр сока, после второго дня – $\dfrac{(x-1)^2}{x}$ литров сока, а после третьего дня – $\dfrac{(x-1)^3}{x^2}$ литров сока. Согласно условию получаем уравнение $x-\dfrac{(x-1)^3}{x^2}=\dfrac{(x-1)^3}{x^2}+1{,}5$ $\Leftrightarrow$ $x^3-(x-1)^3=(x-1)^3+\dfrac{3}{2}x^2$ $\Leftrightarrow$ $2x^3-9x^2+12x-4=0$ $\Leftrightarrow$ $(x-2)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=0$. По условию $x>1$, следовательно $x=2$ (это объем сосуда), сока осталось $\dfrac{(2-1)^3}{2^2}=\dfrac{1}{4}$ литра. Значит, Маша выпила $2-0{,}25=1{,}75$ литра.

3.2. Из сосуда, до краев наполненного вкусным 100%-м соком, пятиклассница Маша за день отпила 0,5 л сока, а вечером долила в сосуд 0,5 л воды. На следующий день после тщательного перемешивания она выпила 0,5 л смеси и вечером долила 0,5 л воды. На третий день, снова перемешав смесь, она выпила 0,5 л этой смеси и вечером долила 0,5 л воды. Утром следующего дня родители выяснили, что объем воды в сосуде на 0,75 л больше объема оставшегося сока. Сколько литров сока было первоначально в сосуде? Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 1.

3.3. Из сосуда, до краев наполненного вкусным 100%-м соком, пятиклассница Маша за день отпила 2 л сока, а вечером долила в сосуд 2 л воды. На следующий день после тщательного перемешивания она выпила 2 л смеси и вечером долила 2 л воды. На третий день, снова перемешав смесь, она выпила 2 л этой смеси и вечером долила 2 л воды. Утром следующего дня родители выяснили, что объем воды в сосуде на 3 л больше объема оставшегося сока. Сколько литров сока осталось в сосуде? Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 0,5.

3.4. Из сосуда, до краев наполненного вкусным 100%-м соком, пятиклассница Маша за день отпила 1 л сока, а вечером долила в сосуд 1 л воды. На следующий день после тщательного перемешивания она выпила 1 л смеси и вечером долила 1 л воды. На третий день, снова перемешав смесь, она выпила 1 л этой смеси и вечером долила 1 л воды. Утром следующего дня родители выяснили, что объем оставшегося сока в сосуде на 1,5 л меньше объема воды. Сколько литров сока осталось в сосуде? Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 0,25.

4.1. Точка *O* является точкой пересечения высот остроугольного треугольника *ABC*. Найдите *OC*, если $AB = 4$ и $\sin\angle C = \frac{5}{13}$.

Ответ: 9,6. Решение. Из подобия треугольников ABB_1 и OCB_1 (здесь BB_1 – высота) следует $\frac{AB}{OC} = \frac{BB_1}{CB_1} = \mathrm{tg}C$. По условию $\sin C = \frac{5}{13}$, поэтому $\cos C = \frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}C = \frac{5}{12}$. Значит, $OC = \frac{AB}{\mathrm{tg}C} = \frac{4\cdot 12}{5} = 9{,}6$.

4.2. Точка *O* является точкой пересечения высот остроугольного треугольника *ABC*. Найдите *OA*, если $BC = 6$ и $\sin\angle A = \frac{12}{13}$.

Ответ: 2,5.

4.3. Точка *O* является точкой пересечения высот остроугольного треугольника *ABC*. Найдите *OC*, если $AB = 12$ и $\sin \angle C = \frac{8}{17}$.

Ответ: 22,5.

4.4. Точка *O* является точкой пересечения высот остроугольного треугольника *ABC*. Найдите *OA*, если $BC = 9$ и $\sin \angle A = \frac{15}{17}$.

Ответ: 4,8.

5.1. Среди чисел, превышающих 2013, найдите наименьшее четное число *N*, при котором дробь $\frac{15N-7}{22N-5}$ сократима.

Ответ: 2144. *Решение:* Наличие общего множителя у чисел $15N-7$ и $22N-5$ влечет за собой наличие такого же множителя у числа $(22N-5)-(15N-7) = 7N+2$, а далее последовательно у чисел $(15N-7)-2\cdot(7N+2) = N-11$, $(7N+2)-7\cdot(N-11) = 79$. Так как 79 – простое число, то дробь сократима на 79, поэтому $N-11 = 79m$, $N = 11+79m$. По условию *N* – четное, поэтому $N = 90+158p$. Нужное значение достигается при $p = 13$.

5.2. Найдите наибольшее нечетное число *N*, не превышающее 2013, при котором дробь $\frac{15N-7}{22N-5}$ сократима.

Ответ: 1907.

5.3. Найдите наибольшее четное число *N*, не превышающее 2013, при котором дробь $\frac{13N-10}{19N-9}$ сократима.

Ответ: 1910.

5.4. Среди чисел, превышающих 2013, найдите наименьшее нечетное число N, при котором дробь $\dfrac{13N-10}{19N-9}$ сократима.

Ответ: 2129.

6.1. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $\sqrt{\arcsin\frac{x}{3}} \le \sqrt{\arccos\frac{y}{3}}$. В ответе укажите целое число, ближайшее к найденному значению площади.

Ответ: 16. *Решение.* Область допустимых значений неравенства определяется системой $\begin{cases} \arcsin\frac{x}{3} \ge 0, \\ \arccos\frac{y}{3} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ -3 \le y \le 3. \end{cases}$ Если $-3 \le y \le 0$, то $\arccos\frac{y}{3} \ge \frac{\pi}{2} \ge \arcsin\frac{x}{3}$.

Следовательно, весь квадрат $\{0 \le x \le 3, -3 \le y \le 0\}$ площади 9 входит в искомое множество.

На оставшемся множестве $\{0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3\}$ справедливы неравенства $0 \le \arcsin\frac{x}{3} \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \arccos\frac{y}{3} \le \frac{\pi}{2}$, и, так как функция $\sin t$ возрастает при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, получим равносильные неравенства $\sin\left(\arcsin\frac{x}{3}\right) \le \sin\left(\arccos\frac{y}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{3} \le \sqrt{1-\left(\frac{y}{3}\right)^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 9$.

Поэтому здесь в искомое множество входит четверть круга, площадь которой $\dfrac{\pi \cdot 3^2}{4}$.

Суммарно искомая площадь равна $9\left(1+\frac{\pi}{4}\right) \approx 16,069...$

6.2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $\sqrt{\arcsin\frac{x}{5}} \le \sqrt{\arccos\frac{y}{5}}$. В ответе укажите целое число, ближайшее к найденному значению площади.

Ответ: 45.

6.3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $\sqrt{\arccos\frac{x}{8}} \geq \sqrt{\arcsin\frac{y}{8}}$. В ответе укажите целое число, ближайшее к найденному значению площади.

Ответ: 114.

6.4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $\sqrt{\arccos\frac{x}{6}} \geq \sqrt{\arcsin\frac{y}{6}}$. В ответе укажите целое число, ближайшее к найденному значению площади.

Ответ: 64.

7.1. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна 3. Найдите сумму пятых членов этих прогрессий, если сумма шестых членов равна 573. Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 161. *Решение*. Пусть знаменатели прогрессий равны p и q. Согласно условию, получаем: $\begin{cases} p+q=3, \\ p^5+q^5=573 \end{cases}$. Найти требуется p^4+q^4. Обозначив $p+q=a$, $pq=b$, выразим:

$$p^4+q^4=\left((p+q)^2-2pq\right)^2-2p^2q^2 =\left(a^2-2b\right)^2-2b^2 =a^4-4a^2b+2b^2;$$

$$p^5+q^5=(p+q)\left(p^4-p^3q+p^2q^2-pq^3+q^4\right) =(p+q)\left(p^4+q^4-pq\left(p^2+q^2\right)+p^2q^2\right)$$

$$=a\left(a^4-4a^2b+2b^2-b\left(a^2-2b\right)+b^2\right) =a\left(a^4-5a^2b+5b^2\right).$$

По условию $\begin{cases} a=3, \\ a\left(a^4-5a^2b+5b^2\right)=573 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3, \\ 81-45b+5b^2=191 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3, \\ b^2-9b-22=0 \end{cases}$.

Отсюда $b=11$ или $b=-2$. Так как система $\begin{cases} p+q=3, \\ pq=11 \end{cases}$ решений не имеет, то $b=-2$.

Поэтому $a=3$ и $b=-2$. Значит, $p^4+q^4 =a^4-4a^2b+2b^2 =81+72+8=161$.

7.2. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна (-4). Найдите сумму пятых членов этих прогрессий, если сумма шестых членов равна (-724). Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 194.

7.3. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна 2. Найдите сумму пятых членов этих прогрессий, если сумма шестых членов равна 242. Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 82.

7.4. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна (-1). Найдите сумму пятых членов этих прогрессий, если сумма шестых членов равна (-31). Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 17.

7.5. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна (-1). Найдите сумму пятых членов этих прогрессий, если сумма шестых членов равна (-61). Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 31.

8.1. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos 4x-\cos 8x-5}$.

Ответ: 0,5. *Решение*. Оценим модуль данного в условии выражения:

$$\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos 4x-\cos 8x-5}\right| \le \frac{1}{5-2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos 4x+\cos 8x}$$

$$=\frac{1}{4-4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 4x+2\cos^2 4x} = \frac{1}{4+2\left(\cos 4x-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} \le \frac{1}{2}.$$

Верхняя граница может быть достигнута, если $\begin{cases}\cos 4x=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1,\end{cases}$ и действительно достигается при $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$.

8.2. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)\cos 3x-\cos 6x-7}$.

Ответ: $-0,25$.

8.3. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)\cos 6x-\cos 12x-7}$.

Ответ: 0,25.

8.4. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)\cos 6x-\cos 12x-5}$.

Ответ: $-0,5$.

9.1. Хорды AA', BB' и CC' одной сферы пересекаются в общей точке *S*. Найдите сумму $SA'+SB'+SC'$, если $AS=6$, $BS=3$, $CS=2$, а объемы пирамид $SABC$ и $SA'B'C'$ относятся как $2:9$. Если в ответе получится не целое число, округлите его до сотых.

Ответ: 18. *Решение.* Если *a, b, c* – данные ребра, *x, y, z* – соответствующие им ребра-продолжения, а *k* – данное отношение, то по теореме об отрезках пересекающихся хорд и лемме об отношении объемов пирамид с равными (вертикальными) трехгранными углами при вершине имеем: $\begin{cases} ax = by = cz \\ abc : xyz = k \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{abcxyz} = \sqrt[3]{\dfrac{(abc)^2}{k}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{b^2c^2}{ak}}$, откуда получаем

$$p = x + y + z = x\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right) = \sqrt[3]{\frac{b^2c^2}{ak}}\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right).$$

Здесь $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$, $k = \dfrac{2}{9} \Rightarrow p = \sqrt[3]{\dfrac{3^2 \cdot 2^2 \cdot 9}{6 \cdot 2}}\left(1 + \dfrac{6}{3} + \dfrac{6}{2}\right) = 18$.

9.2. Хорды AA', BB' и CC' одной сферы пересекаются в общей точке *S*. Найдите сумму $SA' + SB' + SC'$, если $AS = 10$, $BS = 5$, $CS = 2$, а объемы пирамид *SABC* и $SA'B'C'$ относятся как $5:4$. Если в ответе получится не целое число, округлите его до сотых.

Ответ: 16.

9.3. Хорды AA', BB' и CC' одной сферы пересекаются в общей точке *S*. Найдите сумму $SA' + SB' + SC'$, если $AS = 9$, $BS = 6$, $CS = 3$, а объемы пирамид *SABC* и $SA'B'C'$ относятся как $9:2$. Если в ответе получится не целое число, округлите его до сотых.

Ответ: 11.

9.4. Хорды AA', BB' и CC' одной сферы пересекаются в общей точке *S*. Найдите сумму $SA' + SB' + SC'$, если $AS = 10$, $BS = 4$, $CS = 2$, а объемы пирамид *SABC* и $SA'B'C'$ относятся как $4:5$. Если в ответе получится не целое число, округлите его до сотых.

Ответ: 17.

10.1. Найдите сумму всех таких целых $a \in [0; 400]$, при каждом из которых уравнение $x^4 - 6x^2 + 4 = \sin\dfrac{\pi a}{200} - 2\left[x^2\right]$ имеет ровно шесть корней. Здесь используется стандартное обозначение: $[t]$ – целая часть числа *t* (наибольшее целое число, не превышающее *t*).

Ответ: 60100. *Решение*. Пусть $b=\sin\dfrac{\pi a}{200}$, $t=x^2$. Используя равенство $[t]=t-\{t\}$ (здесь $\{t\}$ – дробная часть *t*), получаем, что исходное уравнение равносильно уравнению $t^2-6t+4=b-2t+2\{t\}$. При этом заметим, что любому положительному *t* соответствуют два различных *x*, двум различным положительным *t* соответствует четыре различных *x*, трём различным положительным *t* – шесть различных *x* и т. д.

Решаем уравнение:

$$t^2-4t+4=b+2\{t\},\ b\in[-1;1]. \qquad (1)$$

Поскольку правая его часть принадлежит интервалу $[-1;3)$, то левая часть не выходит за рамки этого интервала при $(t-2)^2<3$, т. е. при $t\in\left(2-\sqrt{3};\,2+\sqrt{3}\right)$.

Рассмотрим четыре случая:

1) Пусть $t\in\left(2-\sqrt{3};1\right)$. Тогда $\{t\}=t$, и исходное уравнение принимает вид: $t^2-6t+4=b$, откуда $t_1^{\pm}=3\pm\sqrt{5+\sin b}$. Из этих корней интервалу $\left(2-\sqrt{3};1\right)$ принадлежит только t_1^- при $b\in(-1;1]$.

2) Пусть $t\in[1;\,2)$. Тогда $\{t\}=t-1$, и исходное уравнение принимает вид: $t^2-6t+6=b$, откуда $t_2^{\pm}=3\pm\sqrt{3+\sin b}$. Из этих корней интервалу $[1;\,2)$ принадлежит только t_2^- при любом $b\in[-1;1]$.

3) Пусть $t\in[2;\,3)$. Тогда $\{t\}=t-2$, и исходное уравнение принимает вид: $t^2-6t+8=b$, откуда $t_3^{\pm}=3\pm\sqrt{1+\sin b}$. Из этих корней интервалу $[2;\,3)$ принадлежит только t_3^- при $b\in[-1;\,0]$.

4) Пусть $t\in\left[3;\,2+\sqrt{3}\right)$. Тогда $\{t\}=t-3$, и исходное уравнение принимает вид: $t^2-6t+10=b$, откуда $(t-3)^2+(1-b)=0$. Данное уравнение имеет единственное решение $t_4=3$ при $b=1$ (напомним, что $b\in[-1;1]$).

В итоге получаем:

при $b=-1$ уравнение (1) имеет одно положительно решение по *t*, а именно t_2^-, откуда исходное уравнение имеет два различных решения по переменной *x*;

при $b \in (0;1)$ уравнение (1) имеет два различных положительных решения по переменной *t*, а именно t_1^-, t_2^-, откуда исходное уравнение имеет четыре различных решения по переменной *x*;

при $b \in (-1;0] \cup \{1\}$ уравнение (1) имеет три различных положительных решения по переменной *t*, а именно t_1^-, t_2^-, t_3^- для $b \in (-1;0]$ и t_1^-, t_2^-, t_4 для $b = 1$, откуда исходное уравнение имеет шесть различных решений по переменной *x*.

Поскольку $b = \sin\frac{\pi a}{200}$, то для $a \in [0;400]$ получаем, что при $a \in \{0\} \cup \{100\} \cup [200;300) \cup (300;400]$ будет шесть решений у исходного уравнения.

Получаем ответ: $0 + 100 + (200 + 201 + \ldots + 400) - 300 = \frac{200+400}{2} \cdot 201 - 200 = 60100$.

10.2. Найдите сумму всех таких целых $a \in [0;600]$, при каждом из которых уравнение $x^4 - 8x^2 + 9 = \cos\frac{\pi a}{300} - 2[x^2]$ имеет ровно шесть корней. Здесь используется стандартное обозначение: $[t]$ – целая часть числа *t* (наибольшее целое число, не превышающее *t*).

Ответ: 90600.

10.3. Найдите сумму всех таких целых $a \in [0;800]$, при каждом из которых уравнение $x^4 - 10x^2 + 16 = \sin\frac{\pi a}{400} - 2[x^2]$ имеет ровно шесть корней. Здесь используется стандартное обозначение: $[t]$ – целая часть числа *t* (наибольшее целое число, не превышающее *t*).

Ответ: 240200.

10.4. Найдите сумму всех таких целых $a \in [0;800]$, при каждом из которых уравнение $x^4 - 12x^2 + 25 = \cos\frac{\pi a}{400} - 2[x^2]$ имеет ровно шесть корней. Здесь используется стандартное обозначение: $[t]$ – целая часть числа *t* (наибольшее целое число, не превышающее *t*).

Ответ: 160800.

Материалы заданий отборочного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по математике за 2013/2014 учебный год

Тур 3

Участник олимпиады получал две разминочные задачи (каждая оценивалась в 1 балл) и десять задач основного задания (первые две задачи оценивались в 9 баллов, остальные – в 10 баллов). Таким образом, максимально возможная сумма баллов – 100.

При этом каждая из указанных задач предлагалась в нескольких вариантах. Подбор задач для каждого участника производился случайным образом, в результате чего варианты заданий у всех были разные.

Задание для разминки

1. Найдите 15% от 9.

Ответ: 1,35. **Решение.** $9\cdot\frac{15}{100}=1{,}35$.

2. Карандаш весит 10 грамм. Сколько граммов велит другой карандаш, все размеры которого в 3 раза больше?

Ответ: 270. **Решение.** Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому другой карандаш весит $10\cdot 3^3=270$ грамм.

Основное задание

(первое число в номере задачи – порядковый номер задачи; второе число – номер варианта)

1.1. Маша задумала 10-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 9-значного числа равен 7. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 5. **Решение.** По признаку делимости на 9 остаток от деления суммы цифр числа на 9 равен 3 (поэтому сумма цифр этого числа равна $9n+3$), а остаток от деления суммы цифр получившегося числа на 9 равен 7 (поэтому сумма цифр получившегося числа равна $9k+7$). Если зачеркнутая цифра равна *x*, то $9n+3-x=9k+7$, отсюда $x=9(n-k)+3-7$, то есть зачеркнутая цифра равна $9+3-7=5$.

1.2. Маша задумала 11-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 10-значного числа равен 8. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 4.

1.3. Маша задумала 9-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 5. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 8-значного числа равен 7. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 7.

1.4. Маша задумала 12-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 1. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 11-значного числа равен 8. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 2.

1.5. Маша задумала 12-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 11-значного числа равен 8. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 4.

1.6. Маша задумала 11-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 10-значного числа равен 5. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 7.

1.7. Маша задумала 9-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 8-значного числа равен 4. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 8.

1.8. Маша задумала 10-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 5. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 9-значного числа равен 6. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 8.

1.9. Маша задумала 11-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 5. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 10-значного числа равен 8. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 6.

1.10. Маша задумала 13-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 1. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 12-значного числа равен 7. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 3.

1.11. Маша задумала 11-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 1. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 10-значного числа равен 6. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 4.

1.12. Маша задумала 10-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 1. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 9-значного числа равен 4. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 6.

2.1. Трапеция *ABCD* с основанием $AD = 6$ вписана в окружность. Касательная к окружности в точке *A* пересекает прямые *BD* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите *AN*, если $AB \perp MD$ и $AM = 3$.

Ответ: 12. **Решение.** Условие $AB \perp MD$ означает, что $\angle ABD = 90^\circ$, то есть основание *AD* – диаметр окружности. Так как трапеция вписанная, то она равнобедренная. ΔDNA и ΔDAC подобны как прямоугольные с общим углом. Из равенства углов $\angle CAD$ и $\angle BDA$ вытекает подобие ΔDAC и ΔMDA. Значит, $\Delta DNA \sim \Delta MDA$, то есть $\dfrac{AN}{AD} = \dfrac{AD}{AM} = 2$, отсюда $AN = 12$.

2.2. Трапеция *ABCD* с основанием $AD = 4$ вписана в окружность. Касательная к окружности в точке *A* пересекает прямые *BD* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите *AM*, если $AB \perp MD$ и $AN = 8$.

Ответ: 2.

2.3. Около трапеции *ABCD* с основанием $AD = 24$ описана окружность. Касательная к окружности в точке *A* пересекает прямые *BD* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите *ND*, если $AB \perp MD$ и $MD = 30$.

Ответ: 40.

2.4. Около трапеции *ABCD* с основанием $AD = 12$ описана окружность. Касательная к окружности в точке *A* пересекает прямые *BD* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите *MD*, если $AB \perp MD$ и $ND = 20$.

Ответ: 15.

3.1. Парабола $y = x^2$ пересекается с прямой $y = 25$. На отрезке между точками пересечения параболы и прямой как на диаметре построена окружность. Найдите площадь выпуклого многоугольника, вершины которого – точки пересечения данной окружности и параболы. В ответе укажите ближайшее к величине этой площади целое число.

Ответ: 10. **Решение.** Парабола $y = x^2$ пересекается с прямой $y = a$ в точках с координатами $\left(\pm\sqrt{a};\, a\right)$. Каждая из точек пересечения указанной в условии окружности и параболы имеет координаты $\left(x;\, x^2\right)$. Для нее расстояние до прямой $y = a$ равно $\left|a - x^2\right|$, расстояние до оси ординат равно $|x|$, а расстояние до точки пересечения этих прямых (центра окружности) равно $\sqrt{a}$. По теореме Пифагора $x^2 + \left(a - x^2\right)^2 = a$, то есть $\left(a - x^2\right)\left(a - x^2 - 1\right) = 0$, и, помимо двух точек с координатами $\left(\pm\sqrt{a};\, a\right)$, окружность и парабола пересекаются также в двух точках $\left(\pm\sqrt{a-1};\, a-1\right)$, лежащих на прямой $y = a - 1$.

Таким образом, указанный в условии многоугольник является трапецией с высотой 1 и основаниями $2\sqrt{a}$ и $2\sqrt{a-1}$. Его площадь равна $\sqrt{a} + \sqrt{a-1}$. При $a = 25$ получаем $5 + \sqrt{24} \approx 9{,}898979\ldots$.

3.2. Парабола $y = x^2$ пересекается с прямой $y = 9$. На отрезке между точками пересечения параболы и прямой как на диаметре построена окружность. Найдите площадь выпуклого многоугольника, вершины которого – точки пересечения данной окружности и параболы. В ответе укажите ближайшее к величине этой площади целое число.

Ответ: 6.

3.3. Парабола $y = x^2$ пересекается с прямой $y = 16$. На отрезке между точками пересечения параболы и прямой как на диаметре построена окружность. Найдите площадь выпуклого многоугольника, вершины которого – точки пересечения данной окружности и параболы. В ответе укажите ближайшее к величине этой площади целое число.

Ответ: 8.

3.4. Парабола $y = x^2$ пересекается с прямой $y = 36$. На отрезке между точками пересечения параболы и прямой как на диаметре построена окружность. Найдите площадь выпуклого многоугольника, вершины которого – точки пересечения данной окружности и параболы. В ответе укажите ближайшее к величине этой площади целое число.

Ответ: 12.

4.1. Решите уравнение $\left(x^2 - 2x + 4\right)^{x^2-2x+3} = 625$. В ответе укажите сумму квадратов всех его корней. Если корней нет, поставьте 0.

Ответ: 6. **Решение.** Так как $x^2 - 2x + 3 > 0$, то $x^2 - 2x + 4 > 1$. Функция $f(z) = z^{z-1}$ возрастает при $z > 1$ (если $1 < z_1 < z_2$, то $f(z_1) = z_1^{z_1-1} < z_1^{z_2-1} < z_2^{z_2-1} = f(z_2)$. Поэтому исходное уравнение, имеющее вид $f\left(x^2 - 2x + 4\right) = f(5)$, будет равносильно уравнению $x^2 - 2x + 4 = 5$. Отсюда $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Сумма квадратов корней уравнения равна $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1-\sqrt{2}\right)^2 = 6$.

4.2. Решите уравнение $\left(x^2 - 4x + 7\right)^{x^2-4x+6} = 625$. В ответе укажите сумму квадратов всех его корней. Если корней нет, поставьте 0.

Ответ: 12.

4.3. Решите уравнение $\left(x^2 - 6x + 12\right)^{x^2-6x+11} = 625$. В ответе укажите сумму квадратов всех его корней. Если корней нет, поставьте 0.

Ответ: 22.

4.4. Решите уравнение $\left(x^2 - 8x + 19\right)^{x^2-8x+18} = 625$. В ответе укажите сумму квадратов всех его корней. Если корней нет, поставьте 0.

Ответ: 36.

5.1. Вычислите: $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+2013\cdot 2014}{(1+2+3+...+2014)\cdot\dfrac{1}{5}}$. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 6710. **Решение.** Подсчитаем сумму в числителе: $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$ $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Здесь использована известная формула для суммы квадратов чисел натурального ряда, которую можно доказать разными способами (эти доказательства легко можно найти в литературе).

Значит, указанная в условии дробь равна $\dfrac{2013\cdot 2014\cdot 2015\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 2014\cdot 2015} = \dfrac{2013\cdot 10}{3} = 6710$.

5.2. Вычислите: $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+2014\cdot 2015}{(1+2+3+...+2014)\cdot\dfrac{1}{4}}$. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 5376.

5.3. Вычислите: $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+2013\cdot 2014}{(1+2+3+...+2013)\cdot\dfrac{1}{6}}$. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 8060.

5.4. Вычислите: $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+2014\cdot 2015}{(1+2+3+...+2015)\cdot\dfrac{1}{3}}$. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 4028.

6.1. Найдите наибольший корень уравнения

$\left|\sin(2\pi x)-\cos(\pi x)\right|=\left|\left|\sin(2\pi x)\right|-\left|\cos(\pi x)\right|\right|$, принадлежащий промежутку $\left(\frac{1}{4};2\right)$.

Ответ: 1,5. **Решение.** Так как $|A-B|=\big||A|-|B|\big| \Leftrightarrow A^2-2AB+B^2=A^2-2|AB|+B^2 \Leftrightarrow$ $AB=|AB| \Leftrightarrow AB\geq 0$, то $\sin 2\pi x\cdot\cos\pi x\geq 0 \Leftrightarrow 2\sin\pi x\cdot\cos^2\pi x\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\pi x=0,\\ \sin\pi x\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{c}\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ 2\pi n\leq\pi x\leq\pi+2\pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x=-\frac{1}{2}+2p,\\ 2n\leq x\leq 1+2n.\end{array}\right.$ В заданный в условии промежуток попадают $x\in\left(\frac{1}{4};1\right]\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

6.2. Найдите наименьший корень уравнения

$\left|\sin(2\pi x)+\cos(\pi x)\right|=\left|\left|\sin(2\pi x)\right|-\left|\cos(\pi x)\right|\right|$, принадлежащий промежутку $\left(-2;-\frac{1}{4}\right)$.

Ответ: $-1{,}5$.

6.3. Найдите наименьший корень уравнения

$\left|\sin(2\pi x)-\sin(\pi x)\right|=\left|\left|\sin(2\pi x)\right|-\left|\sin(\pi x)\right|\right|$, принадлежащий промежутку $\left(\frac{3}{4};3\right)$.

Ответ: 1.

6.4. Найдите наибольший корень уравнения

$\left|\sin(2\pi x)+\sin(\pi x)\right|=\left|\left|\sin(2\pi x)\right|-\left|\sin(\pi x)\right|\right|$, принадлежащий промежутку $\left(-4;-\frac{7}{4}\right)$.

Ответ: -2.

7.1. Команда спортсменов, третья часть которых – сноубордисты, спустилась с горы. При этом некоторые из них сели в вагон фуникулера, вмещающий не более 10 человек, а все остальные спустились самостоятельно, причём их число оказалось больше 45%, но меньше 50% от общего количества. Определите количество сноубордистов (если оно определяется из условия задачи неоднозначно, то впишите в ответ сумму всех возможных его значений).

Ответ: 5. **Решение.** Если было *x* сноубордистов, а на фуникулере спустились *y* человек, то всего было 3*x* спортсменов и $\begin{cases} \dfrac{9}{20}=\dfrac{45}{100}<\dfrac{3x-y}{3x}<\dfrac{50}{100}=\dfrac{10}{20}, \\ y\le 10 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x<\dfrac{20}{30}y\le\dfrac{20}{3}<7, \\ y\in\left(\dfrac{30}{20}x;\dfrac{33}{20}x\right). \end{cases}$$

Перебирая значения $x=1,2,\ldots,6$, находим, что только при $x=5$ полученный промежуток $y\in\left(\dfrac{30}{20}x;\dfrac{33}{20}x\right)$ содержит целое число ($y=8$).

7.2. Команда спортсменов, третья часть которых – сноубордисты, спустилась с горы. При этом некоторые из них сели в вагон фуникулёра, вмещающий не более 11 человек, а все остальные спустились самостоятельно, причём их число оказалось больше 40%, но меньше 44% от общего количества. Определите количество сноубордистов (если оно определяется из условия задачи неоднозначно, то впишите в ответ сумму всех возможных его значений).

Ответ: 4.

7.3. Команда спортсменов, третья часть которых – сноубордисты, спустилась с горы. При этом некоторые из них сели в вагон фуникулёра, вмещающий не более 12 человек, а все остальные спустились самостоятельно, причём их число оказалось больше 20%, но меньше 24% от общего количества. Определите количество сноубордистов (если оно определяется из условия задачи неоднозначно, то впишите в ответ сумму всех возможных его значений).

Ответ: 3.

8.1. На боковом ребре *SB* правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* выбрана точка *P* так, что *SP* в 10 раз больше, чем *PB*. Пирамиду рассекли на две части плоскостью, проходящей через точку *P* параллельно ребрам *SE* и *FE*. Найдите отношение объема большей из этих частей к объему меньшей части. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 116,44. **Решение.** Обозначим $SP = cx$, $PB = bx$ (для исходной задачи $c = 10$, $b = 1$). Проведем параллельно *EF* прямую из точки *P*, обозначим пересечение этой прямой с ребром *SC* через *Q*. Через точки *P* и *Q* проведём плоскости, перпендикулярные *PQ* (рис. 1). Они, очевидно, будут перпендикулярны плоскости основания.

Отсекаемое тело состоит из призмы (рис. 1) и двух пирамид (рис. 2).

Обозначим: *H* и H_P – перпендикуляры, проведенные на основание из точек *S* и *P* соответственно; $S_\perp$ и $P_\perp$ – основания этих перпендикуляров; B_1 – точка пересечения *BF* с плоскостью сечения; *a* – длина ребра основания.

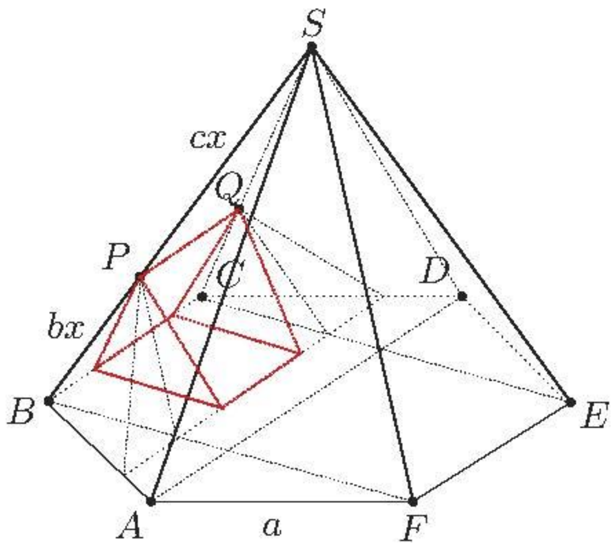


Рис. 1

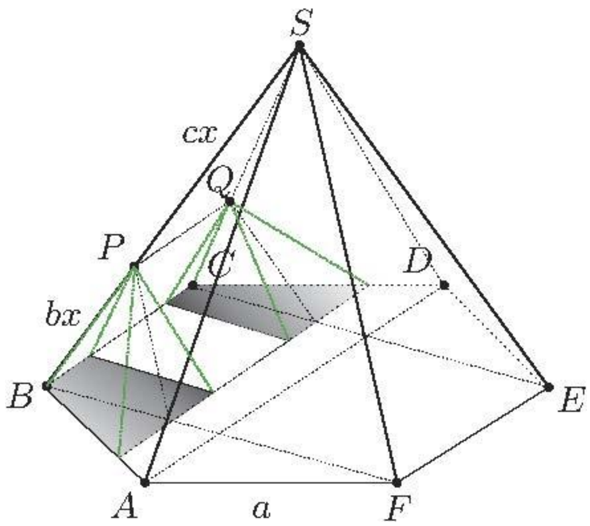


Рис. 2

Тогда получаем (обозначения см. на рис. 1 – 3):

$$H_P = \frac{b}{b+c} H \quad \text{(из подобия } \Delta BPP_\perp \text{ и } \Delta BSS_\perp\text{);}$$

$$BB_1 = \frac{b}{b+c} \cdot BF = \frac{b}{b+c} \cdot \sqrt{3}a \quad \text{(из подобия } \Delta BPB_1 \text{ и } \Delta BSF\text{)}$$

$A_1B_1 = \dfrac{BB_1}{BG} \cdot AG = \dfrac{2b}{b+c} \cdot AG = \dfrac{ab}{b+c}$ (из подобия ΔA_1BB_1 и ΔABG);

$PQ = \dfrac{c}{b+c} BC = \dfrac{ac}{b+c}$ (из подобия ΔSPQ и ΔSBC).

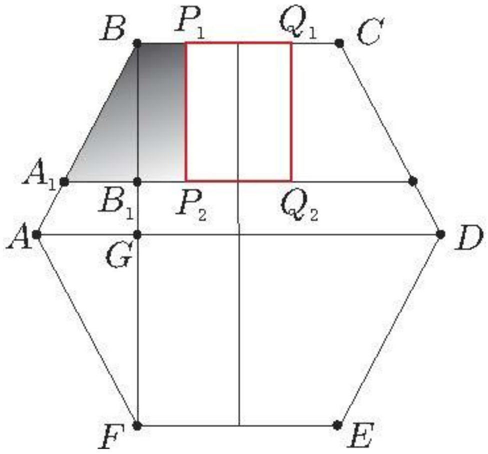


Рис. 3

Объём исходной пирамиды равен: $V = V_{ABCDEF} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{6 \cdot a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2} H$;

Объём призмы (см. рис. 1) равен: $V_{приз.} = PQ \cdot S_{PP_1P_2} = PQ \cdot \dfrac{H_P}{2} \cdot BB_1 = \dfrac{b^2c}{2(b+c)^3} \cdot \sqrt{3}a^2H$.

Так как $S_{A_1BP_1P_2} = S_{A_1BB_1} + S_{B_1BP_1P_2} = BB_1\left(\dfrac{A_1B_1}{2} + BP_1\right) = BB_1\left(\dfrac{A_1B_1}{2} + \dfrac{a-PQ}{2}\right)$

$= \left(\dfrac{b}{b+c}\right)^2 \cdot \sqrt{3}a^2$, то объём каждой из двух пирамид (см. рис. 2) с вершинами в точках P и Q

соответственно равен: $V_{пир.} = \dfrac{1}{3} S_{A_1BP_1P_2} \cdot H_P = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b}{b+c}\right)^3 \cdot \sqrt{3}a^2H$.

Следовательно, $\dfrac{V_{больш.часть}}{V_{меньш.часть}} = \dfrac{V - V_{приз.} - 2V_{пир.}}{V_{приз.} + 2V_{пир.}} = \dfrac{(b+c)^3 - b^2\left(c + \frac{4}{3}b\right)}{b^2\left(c + \frac{4}{3}b\right)}$.

Обозначив, $\dfrac{c}{b} = n$, получим искомое отношение: $\dfrac{(1+n)^3 - n - \frac{4}{3}}{n + \frac{4}{3}}$. По условию $n = 10$,

тогда ответ: $\dfrac{3959}{34} =$ 116,44117…

8.2. На боковом ребре *SB* правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* выбрана точка *P* так, что *SP* в 13 раз больше, чем *PB*. Пирамиду рассекли на две части плоскостью, проходящей через точку *P* параллельно ребрам *SE* и *FE*. Найдите отношение объема большей из этих частей к объему меньшей части. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 190,44.

8.3. На боковом ребре *SB* правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* выбрана точка *P* так, что *SP* в 9 раз больше, чем *PB*. Пирамиду рассекли на две части плоскостью, проходящей через точку *P* параллельно ребрам *SE* и *FE*. Найдите отношение объема большей из этих частей к объему меньшей части. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 95,77.

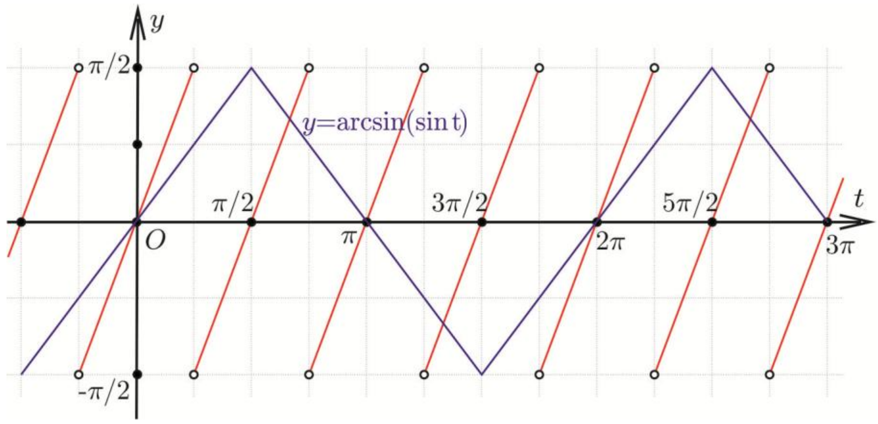
8.4. На боковом ребре *SB* правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* выбрана точка *P* так, что *SP* в 6 раз больше, чем *PB*. Пирамиду рассекли на две части плоскостью, проходящей через точку *P* параллельно ребрам *SE* и *FE*. Найдите отношение объема большей из этих частей к объему меньшей части. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 45,77.

9.1. Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{13\pi^2+12\pi x-12x^2}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{13\pi^2}{4}+3\pi x-3x^2}\right).$$

Ответ: 9. **Решение.** Сделаем замену $t=\sqrt{\frac{13\pi^2}{4}+3\pi x-3x^2}$. Так как $\frac{13\pi^2}{4}+3\pi x-3x^2=4\pi^2-3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$, то $0\le t\le 2\pi$. Исходное уравнение после указанной замены переходит в уравнение $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}2t)=\arcsin(\sin t)$.



Графики функций $f(t)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}2t)$ и $g(t)=\arcsin(\sin t)$ на отрезке $[0;2\pi]$ имеют пять точек пересечения: $t_1=0$, $t_2\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, $t_3=\pi$, $t_4\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ и $t_5=2\pi$.

Значение t_2 находится из системы: $\begin{cases} y=\pi-t, \\ y=2\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow t_2=\frac{2\pi}{3}$.

Аналогично находим t_4: $\begin{cases} y=\pi-t, \\ y=2\left(t-\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow t_4=\frac{4\pi}{3}$.

Уравнения $\sqrt{4\pi^2-3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=t_k$ имеют по два различных решения при $k=1,2,3,4$.

Уравнение $\sqrt{4\pi^2-3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=t_6$ имеет единственное решение. Итого получаем 9 решений.

9.2. Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{\pi^2+16\pi x-8x^2}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+4\pi x-2x^2}\right).$$

Ответ: 8.

9.3. Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{35\pi^2+4\pi x-4x^2}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{35\pi^2}{4}+\pi x-x^2}\right).$$

Ответ: 13.

9.4. Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{17\pi^2+16\pi x-8x^2}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{17\pi^2}{4}+4\pi x-2x^2}\right).$$

Ответ: 10.

9.5. Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{23\pi^2}{4}+4\pi x-8x^2}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{23\pi^2}{16}+\pi x-2x^2}\right).$$

Ответ: 6.

9.6. Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{41\pi^2+16\pi x-8x^2}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{41\pi^2}{4}+4\pi x-2x^2}\right).$$

Ответ: 16.

10.1. Найдите сумму всех целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-10;10]$, при каждом из которых из двойного неравенства $5\le x\le 10$ следует неравенство $ax+3a^2-12a+12>a^2\sqrt{x-1}$.

Ответ: -47. **Решение.** Пусть $t=\sqrt{x-1}$, тогда исходная задача сводится к нахождению таких значений *a*, при каждом из которых неравенство $f(t)\equiv at^2-a^2t+3a^2-11a+12>0$ выполняется при всех $t\in[2;3]$. Это означает, что минимум функции $f(t)$ на отрезке $2\le t\le 3$ положителен.

Если $a=0$, то $f(t)\equiv 12$. Если же $a\neq 0$,то возможны два случая:

а) $\begin{cases} f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}(a-2)(a-4)(a-6)>0, \\ 2\le\dfrac{a}{2}\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow\ 4<a<6$;

б) $\begin{cases} a\in(-\infty;4)\cup(6;+\infty), \\ f(2)=(a-3)(a-4)>0, \\ f(3)=2(6-a)>0 \end{cases} \Leftrightarrow\ a<3$.

В итоге $a\in(-\infty;3)\cup(4;6)$, и сумма искомых значений *a* на отрезке $[-10;10]$ равна: $-10-9-8-\ldots-1+0+1+2+5\ =(-10-9-\ldots-6)-4-3=-47$.

10.2. Найдите сумму всех целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-12;12]$, при каждом из которых из двойного неравенства $3\le x\le 8$ следует неравенство $ax+3a^2-10a+12>a^2\sqrt{x+1}$.

Ответ: -70.

10.3. Найдите сумму всех целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-9;9]$, при каждом из которых из двойного неравенства $-7\le x\le -2$ следует неравенство $ax+3a^2+9a+12>a^2\sqrt{2-x}$.

Ответ: 37.

10.4. Найдите сумму всех целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-6;11]$, при каждом из которых из двойного неравенства $-1\le x\le 0$ следует неравенство $-5ax+3a^2+2a+12>a^2\sqrt{5x+9}$.

Ответ: 58.

Материалы заданий заключительного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по математике за 2013/2014 учебный год

Каждая из восьми задач варианта оценивалась в 15 баллов.

Участники заключительного этапа олимпиады, набравшие в сумме от 100 до 120 баллов, получали оценку 100. Участники олимпиады, набравшие менее 15 баллов, получали оценку 2.

Оценка каждого из остальных участников равнялась сумме набранных этим участником баллов.

Вариант 1

1. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена $x^2+2ax+4a$ равна 3.

2. Маша выписала на доске подряд все натуральные числа от 2 до 2015. Пришёл Ваня и заменил каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришла Таня и сделала то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?

3. Среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба, наибольшую площадь имеет прямоугольник, отношение сторон которого равно 2. Найдите острый угол ромба.

4. Найдите все пары (a, b), при которых множество решений неравенства $\log_{2014}(x-a) > 2x^2-x-b$ совпадает с промежутком (0; 1).

5. Найдите все значения α, при каждом из которых нули функций

$$f(x)=\sin\left(\frac{3x}{2}-\alpha\right) \quad \text{и} \quad g(x)=2\sin 2x-4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$$

строго чередуются на числовой оси.

6. Для охраны объекта в течение 5 суток заказчик договорился с охранниками о следующем: все они укажут отрезки времени своих предполагаемых дежурств с единственным условием, чтобы их объединение составляло заданные 5 суток, а он выберет из этих отрезков любой набор, удовлетворяющий тому же условию, и оплатит работу из расчета 500 руб. в час каждому дежурному. Какая наименьшая сумма денег, заранее подготовленная заказчиком, позволит ему наверняка расплатиться с охранниками?

7. В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписан шар радиуса $\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку A и середины рёбер BB_1 и CC_1.

8. Прямоугольная таблица состоит из 5681 одинаковой клетки. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами 1, 2, …, 5681 подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася – по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 5 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?

Решения задач варианта 1

1. Ответ: $-\dfrac{1}{2}$. **Решение.** Уравнение имеет корни при $a^2-4a\ge 0$, то есть при $a\le 0$ и при $a\ge 4$. По теореме Виета: $\left(|x_1|+|x_2|\right)^2=x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|=\left(x_1+x_2\right)^2+2\left(|x_1x_2|-x_1x_2\right)\ =4a^2+8\left(|a|-a\right)$. По условию $4a^2+8\left(|a|-a\right)=9$. При $a\le 0$ получаем $4a^2-16a=9$, откуда $a=-\dfrac{1}{2}$ или $a=\dfrac{9}{2}$ (посторонний корень). При $a\ge 4$ получаем $4a^2=9$, откуда $a=\pm\dfrac{3}{2}$ – оба корня меньше 4.

2. Ответ: 10 070. **Решение.** Число a и сумма цифр числа a при делении на 9 дают одинаковые остатки, поэтому в итоге на доске останется ряд чисел: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, …, 9, 1, 2, и так далее. Так как $2014=9\cdot 223+7$, то в этом ряду 223 раза встретится последовательность от 1 до 9 и будет ещё 7 цифр. Значит, ряд заканчивается цифрой 8, и искомая сумма чисел равна $\left(1+2+...+9\right)\cdot 224-1-9\ =45\cdot 224-10=10\,070$.

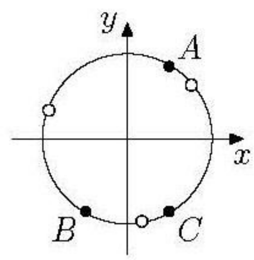
3. Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$**. Решение.** Обозначим острый угол и сторону ромба через α и a соответственно. Пусть расстояние от вершины при остром угле ромба до вершины прямоугольника, лежащей на смежной с углом стороне равно x. Тогда стороны вписанного в ромб прямоугольника равны $2x\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и $2\left(a-x\right)\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Площадь прямоугольника $S=2x\left(a-x\right)\sin\alpha$ будет максимальной при $x=\dfrac{a}{2}$ (вершина параболы). Следовательно, стороны прямоугольника равны $a\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и $a\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Поскольку отношение сторон равно 2, то $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$, откуда $\alpha=2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$**.**

4. Ответ: $a=-\dfrac{1}{2013}$**,** $b=\log_{2014}2013$**. Решение.** Из выпуклости вверх графика функции $y=\log_{2014}\left(x-a\right)$ и выпуклости вниз графика функции $2x^2-x-b$ следует, что промежуток $\left(0;1\right)$ является множеством решений неравенства тогда и только тогда, когда числа $x=0$ и $x=1$ – решения соответствующего уравнения: $\log_{2014}\left(x-a\right)=2x^2-x-b$. Следовательно,

$$\begin{cases}\log_{2014}\left(-a\right)=-b,\\ \log_{2014}\left(1-a\right)=1-b\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}\log_{2014}\left(-a\right)=-b,\\ \log_{2014}\left(\dfrac{a-1}{a}\right)=1,\end{cases}$$ откуда $a=-\dfrac{1}{2013}$**,** $b=\log_{2014}2013$.

5. Ответ: $\alpha\in\left(\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$. **Решение.** $g\left(x\right)=0\ \Leftrightarrow\ 2\sin 2x-4\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow\ \left(2\sin x+\sqrt{3}\right)\left(2\cos x-1\right)=0\ \Leftrightarrow\ \cos x=\dfrac{1}{2},\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \Leftrightarrow\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ x=\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k$, $n, k\in\mathbb{Z}$. Расстояния на тригонометрической окружности против часовой стрелки между нулями функции g (точки A, B и C), считая от точки A, равны π, $\dfrac{\pi}{3}$ и $\dfrac{2\pi}{3}$.



Нули функции f равны $\dfrac{2\alpha}{3}+\dfrac{2\pi m}{3}$, $m\in\mathbb{Z}$ и на тригонометрической окружности образуют правильный треугольник. Расстояния между этими точками равны $\dfrac{2\pi}{3}$. Необходимое и достаточное условие чередования нулей этих функций состоит в том, что на дуге *BC* содержится нуль функции *f*, следовательно, в точках *B* и *C* функция *f* принимает разные знаки: $f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\cdot f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)<0 \Leftrightarrow \sin(2\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)<0 \Leftrightarrow \sin 2\alpha>0 \Leftrightarrow$

$\alpha\in\left(\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.

6. Ответ: $2\cdot 5\cdot 24\cdot 500=120$ тыс. руб. **Решение.** 1. Двойной оплаты времени охраны точно хватит, поскольку из любого покрытия отрезка конечной системой отрезков можно выбрать не более чем двукратное подпокрытие (если какая-то точка покрыта более чем двумя отрезками, то можно оставить только два из них — с самым левым концом и с самым правым, а остальные выбросить).

2. Менее чем двойной оплаты может не хватить при грамотных действиях охранников: они могут поставить свои дежурства так, чтобы ни одного из них выбросить было нельзя, а суммарная длина дежурств была сколь угодно близкой к удвоенному периоду наблюдения.

7. Ответ: $\dfrac{12\pi}{5}$ **Решение.** Обозначим через *r* радиус шара, а через $D,\ D_1$, *M* и *N* – середины рёбер $BC,\ B_1C_1,\ BB_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость AA_1D_1 есть центральное сечение шара. Пусть *h* – высота цилиндра, тогда радиус его основания равен $R=\sqrt{r^2-\dfrac{h^2}{4}}$. Пусть *P* – точка пересечения отрезков DD_1 и MN. Справедливы соотношения $OP=r,\ PD=r,\ AD=3r$, где *O* – центр шара. Если O_1 – проекция точки *O* на основание цилиндра, то из подобия прямоугольных треугольников APD и OO_1P получаем

$$\frac{OO_1}{OP}=\frac{PD}{AP} \Leftrightarrow \frac{OO_1}{r}=\frac{r}{\sqrt{9r^2+r^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Тогда $OO_1=\dfrac{r\sqrt{10}}{10},\ h=2\cdot OO_1=\dfrac{r\sqrt{10}}{5}$. Значит, $R=\dfrac{3r\sqrt{10}}{10}$.

Площадь боковой поверхности $S_{бок.}=2\pi Rh=\dfrac{6\pi r^2}{5}$.

8. Ответ: 450. **Решение.** Пусть в таблице *m* строк и *n* столбцов, а клетка, получившая одинаковые номера, расположена в строке с номером *i* и в столбце с номером *j*. Тогда, если считать по строкам, в этой клетке стоит число $(i-1)\cdot n+j$, а если считать по столбцам, то это число равно $(j-1)\cdot m+i$. Следовательно, $(i-1)\cdot n+j=(j-1)\cdot m+i \Leftrightarrow$ $(i-1)\cdot(n-1)=(j-1)\cdot(m-1)$.

Если $m=1$ или $n=1$, то номера Пети и Васи совпадут во всех клетках. Значит, $m>1$ и $n>1$. Пусть $d=\text{НОД}(n-1,m-1)$, тогда $n-1=pd,\ m-1=qd$, где $\text{НОД}(p,q)=1$. Получаем $(i-1)\cdot p=(j-1)\cdot q$. Поэтому $i-1=qk,\ j-1=pk,\ k=0,1,\dots,d$. Следовательно, количество клеток, получивших одинаковые номера, равно $d+1=\text{НОД}(n-1,m-1)+1$.

Так как $5681=13\cdot 19\cdot 23$, то $n=13,\ m=19\cdot 23=437$ или, наоборот, $n=437,\ m=13$. В любом случае $m+n=450$.

Вариант 2

1. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена $x^2-3ax+4a$ равна 5.

2. Ваня выписал на доске подряд все натуральные числа от 9 до 2022. Пришла Маша и заменила каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришёл Миша и сделал то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?

3. Прямоугольник, отношение сторон которого равно 3, имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба. Найдите острый угол ромба.

4. Найдите все пары (a, b), при которых множество решений неравенства

$2\log_{2014}(x+a) > x^2-x-2b$ совпадает с промежутком (1; 2).

5. Найдите все значения α, при каждом из которых нули функций

$$f(x)=2\sin 2x-4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3} \quad \text{и} \quad g(x)=\sin\left(\frac{3x}{2}+\alpha\right)$$

строго чередуются на числовой оси.

6. Для охраны объекта заказчик договорился с охранниками о следующем: все они укажут отрезки времени своих предполагаемых дежурств с единственным условием, чтобы их объединение составляло заранее заданный заказчиком отрезок времени, а он выберет из этих отрезков любой набор, удовлетворяющий тому же условию, и оплатит работу из расчета 250 руб. в час каждому дежурному. Какой наибольший отрезок времени заказчик может задать, чтобы наверняка уложиться в 80 000 руб?

7. В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписан шар радиуса $\sqrt{5}$. Найдите объём вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку A и середины рёбер BB_1 и CC_1.

8. Прямоугольная таблица состоит из 4147 одинаковых клеток. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами 1, 2, …, 4147 подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася – по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 7 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?

Вариант 3

1. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена $x^2+3ax+4a$ равна 2.

2. Таня выписала на доске подряд все натуральные числа от 4 до 2017. Пришёл Миша и заменил каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришла Маша и сделала то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?

3. Среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба, наибольшую площадь имеет прямоугольник, отношение сторон которого равно 4. Найдите острый угол ромба.

4. Найдите все пары (a, b), при которых множество решений неравенства

$\log_{2014}(2x-a) > 3x^2-2x-b$ совпадает с промежутком (0; 1).

5. Найдите все значения α, при каждом из которых нули функций

$$f(x)=2\sin 2x-4\cos\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)-\sqrt{3} \quad \text{и} \quad g(x)=\sin\left(\frac{3x}{2}-\alpha\right)$$

строго чередуются на числовой оси.

6. Для охраны объекта в течение 10 суток заказчик договорился с охранниками о следующем: все они укажут отрезки времени своих предполагаемых дежурств с единственным условием, чтобы их объединение составляло заданные 10 суток, а он выберет из этих отрезков любой набор, удовлетворяющий тому же условию, и оплатит работу из расчета 400 руб. в час каждому дежурному. Какая наименьшая сумма денег, заранее подготовленная заказчиком, позволит ему наверняка расплатиться с охранниками?

7. В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписан шар радиуса $\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку A и середины рёбер BB_1 и CC_1.

8. Прямоугольная таблица состоит из 5797 одинаковых клеток. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами 1, 2, …, 5797 подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася – по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 5 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?

Вариант 4

1. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена $x^2-5ax+4a$ равна 3.

2. Миша выписал на доске подряд все натуральные числа от 7 до 2020. Пришла Маша и заменила каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришёл Ваня и сделал то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?

3. Прямоугольник, отношение сторон которого равно 5, имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба. Найдите острый угол ромба.

4. Найдите все пары (a, b), при которых множество решений неравенства

$\log_{2014}(2x+a) > x^2-2x-b$ совпадает с промежутком (1; 2).

5. Найдите все значения α, при каждом из которых нули функций

$$f(x)=\sin\left(\frac{3x}{2}+\alpha\right) \quad \text{и} \quad g(x)=2\sin 2x+4\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$$

строго чередуются на числовой оси.

6. Для охраны объекта заказчик договорился с охранниками о следующем: все они укажут отрезки времени своих предполагаемых дежурств с единственным условием, чтобы их объединение составляло заранее заданный заказчиком отрезок времени, а он выберет из этих отрезков любой набор, удовлетворяющий тому же условию, и оплатит работу из расчета 300 руб. в час каждому дежурному. Какой наибольший отрезок времени заказчик может задать, чтобы наверняка уложиться в 90 000 руб?

7. В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписан шар радиуса $\sqrt{10}$. Найдите объём вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку A и середины рёбер BB_1 и CC_1.

8. Прямоугольная таблица состоит из 5863 одинаковых клеток. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами 1, 2, …, 5863 подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася – по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 7 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?

Ответы к задачам варианта 2

1. -1.

2. 10 065.

3. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \equiv \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

4. $a=-\frac{2012}{2013}$, $b=\log_{2014}2013$.

5. $\alpha \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. $\frac{80000}{2\cdot 250}=160$ ч.

7. $\frac{9\pi\sqrt{2}}{2}$.

8. 332.

Ответы к задачам варианта 3

1. $-\frac{2}{9}$.

2. 10 075.

3. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} \equiv \operatorname{arctg}\frac{8}{15}$.

4. $a=-\frac{2}{2013}$, $b=\log_{2014}\left(\frac{2013}{2}\right)$.

5. $\alpha \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. $2\cdot 10\cdot 24\cdot 400=192$ тыс. руб.

7. $\frac{18\pi}{5}$.

8. 358.

Ответы к задачам варианта 4

1. $-\dfrac{9}{25}$.

2. 10 069.

3. $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} \equiv \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}$.

4. $a = -\dfrac{4024}{2013}$, $b = \log_{2014}\left(\dfrac{2013}{4028}\right)$.

5. $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$.

6. $\dfrac{90000}{2 \cdot 300} = 150$ ч.

7. 18π.

8. 464.

2013/2014 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[1]

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ»

по МАТЕМАТИКЕ для 5-9 классов

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **90** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **50** баллов до **89** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **95** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **80** баллов до **94** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **60** баллов до **79** баллов включительно.*

---

[1] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по математике.*

2013/2014 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[2]

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ»

по МАТЕМАТИКЕ для 10-11 классов

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **91** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **70** баллов до **90** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **85** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **70** баллов до **84** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **55** баллов до **69** баллов включительно.*

---

[2] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по математике.*

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

7–9 классы

На первой странице работы (перед решениями задач) поместите таблицу ответов к ним. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в соответствующей графе поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не нужно.

Задача	*Ответ*	*Балл*
...	...	...

В решении задачи оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста. Все решения должны быть полными и обоснованными, ссылки на вычисления на калькуляторе и использование результатов, полученных с помощью специализированных компьютерных программ, запрещены. Работы с идентичными решениями не смогут претендовать на высокую оценку.

Не советуем прибегать к услугам репетиторов или более подготовленных товарищей, так как если Вас пригласят на следующий (очный) тур олимпиады, факт помощи станет очевидным, и Вы почувствуете себя неловко.

Призываем всех участников присылать свои работы, независимо от того, сколько задач вы смогли решить. Опыт предыдущих олимпиад показал, что шансы на участие в очном туре есть у всех! Удачи и сил!

7 класс

1. Два олигарха Алехандро и Максимилиан за 2012 год взяли и разграбили свою страну. Известно, что состояние Алехандро на конец 2012 года равняется двум состояниям Максимилиана на конец 2011 года. А состояние Максимилиана на конец 2012 года меньше, чем состояние Алехандро на конец 2011 года. Что больше: состояние Максимилиана на конец 2011 года или национальные богатства страны?

2. В гонке Формула-2013 участвуют 2 гонщика. Первый гонщик проехал 4 круга за то время, пока второй проехал три. В течение следующих трёх кругов из-за быстрой езды первому гонщику пришлось проехать дополнительно 20 метров по питстопу (не останавливаясь). Известно, что когда второй гонщик проехал 6 кругов, первый проехал 7,75 круга. Найдите длину круга. (Скорости гонщиков постоянны.)

3. За круглым столом собрались несколько юношей и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юношей справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

4. На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: “Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек”. Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

5. У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она надевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной руке ровно один раз?

6. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{44\ldots4}_{2012\text{ раз}}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2012\text{ раз}}$

7. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы 100×100 ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

8. Бешеный маляр бегает по клеткам доски 2012×2013, изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку (маляр может переходить только на соседнюю по стороне клетку), эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

8 класс

1. Два олигарха Алехандро и Максимилиан за 2012 год взяли и разграбили свою страну. Известно, что состояние Алехандро на конец 2012 года равняется двум состояниям Максимилиана на конец 2011 года. А состояние Максимилиана на конец 2012 года меньше, чем состояние Алехандро на конец 2011 года. Что больше: состояние Максимилиана или национальные богатства страны?

2. За круглым столом собрались несколько юношей и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юношей справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

3. У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она надевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной руке ровно один раз?

4. На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: "Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек". Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

5. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{44\ldots4}_{\text{2012 раз}}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{\text{2012 раз}}$

6. Бешеный маляр бегает по клеткам доски 2012×2013, изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку, эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

7. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы 100×100 ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

8. Точка P лежит внутри треугольника ABC. Её соединили со всеми вершинами треугольника, а также опустили перпендикуляры из неё на стороны, образовав 6 треугольников. Оказалось, что 4 из них равны. Всегда ли это означает, что треугольник равнобедренный?

9. Множество натуральных чисел называется *плохим*, если из него можно выбрать несколько чисел так, чтобы они в сумме давали 2012. Найдите наименьшее такое n, что числа 503, 504, ..., 2011 можно разбить на n множеств так, что все эти множества не были бы плохими.

9 класс

1. За круглым столом собрались несколько юношей и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юношей справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

2. На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: “Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек”. Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

3. У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она надевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной руке ровно один раз?

4. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{44\ldots4}_{2012\text{ раз}}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2012\text{ раз}}$

5. Бешеный маляр бегает по клеткам доски 2012×2013, изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку, эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

6. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы 100×100 ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

7. Точка P лежит внутри треугольника ABC. Её соединили со всеми вершинами треугольника, а также опустили перпендикуляры из неё на стороны, образовав 6 треугольников. Оказалось, что 4 из них равны. Всегда ли это означает, что треугольник равнобедренный?

8. Множество натуральных чисел называется *плохим*, если из него можно выбрать несколько чисел так, чтобы они в сумме давали 2012. Найдите наименьшее такое n, что числа 503, 504, …, 2011 можно разбить на n множеств так, что все эти множества не были бы плохими.

9. На стороне AC остроугольного треугольника ABC взята точка M. Из точки M на стороны AB и BC опущены перпендикуляры MN и MP. Где должна находиться точка M, чтобы длина отрезка NP была минимальной?

10. Решите уравнение:
$$\frac{8}{\{x\}}=\frac{9}{x}+\frac{10}{[x]},$$
где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\}=x-[x]$.

10–11 классы

На первой странице работы (перед решениями задач) поместите таблицу ответов к ним. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в соответствующей графе поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не нужно.

Задача	*Ответ*	*Балл*
№1		
№2		
№3		
№4		
№5		
№6		
№7		
№8		
№9		
№10		

В решении задачи оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста. Все решения должны быть полными и обоснованными, ссылки на вычисления на калькуляторе и использование результатов, полученных с помощью специализированных компьютерных программ, запрещены. Работы с идентичными решениями не смогут претендовать на высокую оценку.

Не советуем прибегать к услугам репетиторов или более подготовленных товарищей, так как если Вас пригласят на следующий (очный) тур олимпиады, факт помощи станет очевидным, и Вы почувствуете себя неловко.

Призываем всех участников присылать свои работы, независимо от того, сколько задач вы смогли решить. Опыт предыдущих олимпиад показал, что шансы на участие в очном туре есть у всех! Удачи и сил!

10–11 классы

1. Знайка сообщил коротышкам, что в декабре и в январе потребление арбузного сиропа в Зеленом городе в среднем составило 10 бочек в день и 5 бочек в день соответственно. Отсюда Незнайка сделал вывод, что дней, в которые потребление сиропа составляло не менее чем по 10 бочек, в декабре непременно было больше, чем в январе. Прав ли Незнайка?

2. Котёнок откусывает четверть сосиски с одного конца, после чего щенок откусывает треть оставшегося куска сосиски с противоположного конца, затем снова котенок — четверть со своего конца, а щенок — треть со своего конца и т. д. Требуется заранее перевязать сосиску поперек ниткой так, чтобы нитку никто не съел. В каком отношении она должна разделить сосиску?

3. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задана равенствами
$$a_1 = 100, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Найдите целое число, ближайшее к a_{2013}.

4. Участникам викторины было задано четыре вопроса: на первый вопрос правильно ответили 90 участников, на второй — 50, на третий — 40, а на четвертый — 20, причем никто не смог правильно ответить более чем на два вопроса. Каково наименьшее число участников викторины при этих условиях?

5. Фиксированный луч света падает на зеркало, образуя со своей проекцией на плоскость зеркала острый угол α. Зеркало поворачивают вокруг указанной проекции на острый угол β. Найдите угол между двумя отраженными лучами, полученными до и после поворота.

6. Фигура на координатной плоскости состоит из точек (x, y), удовлетворяющих при любом $t \in \mathbb{R}$ двум неравенствам
$$x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2, \quad \cos y < 2 + \cos 2x + \cos x(4 \sin t - 1) - \cos 2t.$$
Найдите площадь этой фигуры.

7. Вовочка написал на доске равенство $101 = 11011$. Учитель информатики сказал, что это равенство будет верным, если понимать его как запись одного и того же числа, но в разных системах счисления. Найдите основания этих систем.

8. Найдите минимальное значение дискриминанта квадратного трёхчлена, график которого не имеет общих точек с областями, расположенными ниже оси абсцисс и над графиком функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL, BM и CN, причем $\angle ANM = \angle ALC$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника LMN, две стороны которого равны 3 и 4.

10. При каких натуральных n и k неравенства $|x_1| + \ldots + |x_k| \leqslant n$ и $|y_1| + \ldots + |y_n| \leqslant k$ имеют одинаковые количества целочисленных решений $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$?

Олимпиада школьников
«Ломоносов», 2013
Ответы заданий заочного тура олимпиады по математике,
10 и 11 класс

Задача	*Ответ*
1	Нет
2	$1:1$
3	118
4	100
5	$\arccos(1-2\sin^2\alpha\sin^2\beta)$
6	$\pi^3-2\pi^2$
7	18 и 4
8	-4
9	2
10	Для любых натуральных n и k

Решение заочного задания олимпиады школьников «Ломоносов — 2012» по математике, 11 класс

1. Знайка сообщил коротышкам, что в декабре и в январе потребление арбузного сиропа в Зеленом городе в среднем составило 10 бочек в день и 5 бочек в день соответственно. Отсюда Незнайка сделал вывод, что дней, в которые потребление сиропа составляло не менее чем по 10 бочек, в декабре непременно было больше, чем в январе. Прав ли Незнайка?

   Ответ: нет.

   Решение. Приведем пример, показывающий, что Незнайка не прав. Пусть с 1 по 30 декабря коротышки выпивали 0 бочек, а 31 декабря выпили 310 бочек. Тогда в среднем за декабрь они выпили $\dfrac{310}{31} = 10$ бочек сиропа. Пусть с 1 по 15 января коротышки выпивали по 10 бочек, 16 января — пять, а с 17 по 31 января — 0. Тогда среднее потребление сиропа в январе равно $\dfrac{15 \cdot 10 + 5}{31} = 5$.

2. Котёнок откусывает четверть сосиски с одного конца, после чего щенок откусывает треть оставшегося куска сосиски с противоположного конца, затем снова котенок — четверть со своего конца, а щенок — треть со своего конца и т. д. Требуется заранее перевязать сосиску поперек ниткой так, чтобы нитку никто не съел. В каком отношении она должна разделить сосиску?

   Ответ: 1 : 1.

   Решение. Пусть ℓ длина сосиски, оставшейся после одинакового числа «откусываний» котёнка и щенка. Тогда на следующем шаге котёнок откусит $\dfrac{\ell}{4}$, а щенок — $\dfrac{1}{3}\dfrac{3\ell}{4} = \dfrac{\ell}{4}$. Значит и тот и другой съедят одинаковые части сосиски.

3. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задана равенствами

$$a_1 = 100, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Найдите целое число, ближайшее к a_{2013}.

   Ответ: 118.

   Решение.

$$a_{2013}^2 = \left(a_{2012} + \frac{1}{a_{2012}}\right)^2 = a_{2012}^2 + 2 + \frac{1}{a_{2012}^2} = a_{2011}^2 + 2 \cdot 2 + \frac{1}{a_{2011}^2} + \frac{1}{a_{2012}^2} = \ldots$$
$$= a_1^2 + 2 \cdot 2012 + \frac{1}{a_1^2} + \ldots + \frac{1}{a_{2011}^2} + \frac{1}{a_{2012}^2}.$$

   Поэтому с одной стороны

$$a_{2013}^2 > a_1^2 + 2 \cdot 2012 = 10000 + 4024 = 14024 > 118^2 = 13924,$$

   с другой стороны

$$a_{2013}^2 < a_1^2 + 2 \cdot 2012 + \frac{2012}{100^2} < 14024 + 1 < 118{,}5^2.$$

   Поэтому $118 < a_{2013} < 118{,}5$, и ближайшим целым является 118.

4. Участникам викторины было задано четыре вопроса: на первый вопрос правильно ответили 90 участников, на второй — 50, на третий — 40, а на четвертый — 20, причем никто не смог правильно ответить более чем на два вопроса. Каково наименьшее число участников викторины при этих условиях?

   Ответ: 100.

Решение. Суммарное количество ответов равно 200. Так как ни один человек не ответил более чем на два вопроса, то наименьшее возможное количество участников викторины равно 100 и в этом случае каждый участник викторины должен правильно ответить ровно на 2 вопроса. Приведем пример викторины, в которой описанная ситуация реализуется. Пронумеруем участников от 1 до 100. Пусть на первый вопрос ответили участники с номерами от 1 до 90, на второй — с 91 по 100 и с 1-го по 40, на третий — с 41 по 80 и на 4-ый — с 81 по 100.

5. Фиксированный луч света падает на зеркало, образуя со своей проекцией на плоскость зеркала острый угол α. Зеркало поворачивают вокруг указанной проекции на острый угол β. Найдите угол между двумя отраженными лучами, полученными до и после поворота.

   Ответ: $\arccos(1 - 2\sin^2\alpha \sin^2\beta)$.

   Решение. Пусть AO — падающий луч, ON_1 — нормаль к первоначальному положению зеркала, а ON_2 — нормаль ко второму положению зеркала. Рассмотрим трехгранный угол OAN_1N_2. Его плоские углы равны: $\angle AON_1 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle N_1ON_2 = \beta$, обозначим $\angle AON_2 = \gamma$. Пусть φ — линейный угол двугранного угла с ребром AO (см. рис. 1). По теореме косинусов для трёхгранного угла получаем

$$\cos\varphi = \frac{\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\gamma}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\gamma} = \frac{\cos\beta - \sin\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha\sin\gamma}. \qquad (1)$$

Так как двугранный угол $\angle N_1$ с ребром ON_1 — прямой (нормаль ON_2 поворачивается в плоскости, перпендикулярной прямой ℓ — проекция луча на плоскость первоначального положения зеркала), то опять из теоремы косинусов для трёхгранного угла OAN_1N_2 получаем

$$0 = \cos\angle N_1 = \frac{\cos\gamma - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta},$$

откуда

$$\cos\gamma = \sin\alpha\cos\beta. \qquad (2)$$

Пусть OA_1 — луч, отраженный от первоначального положения зеркала, а OA_2 — луч, отраженный от второго положения зеркала. Рассмотрим трехгранный угол OAA_1A_2. Его плоские углы равны: $\angle AOA_1 = \pi - 2\alpha$, $\angle AOA_2 = 2\gamma$, $\angle A_1OA_2$ — искомый. По теореме косинусов для трёхгранного угла OAA_1A_2

$$\cos\varphi = \frac{\cos\angle A_1OA_2 - \cos(\pi - 2\alpha)\cos 2\gamma}{\sin(\pi - 2\alpha)\sin 2\gamma} = \frac{\cos\angle A_1OA_2 + \cos 2\alpha\cos 2\gamma}{\sin 2\alpha\sin 2\gamma} \qquad (3)$$

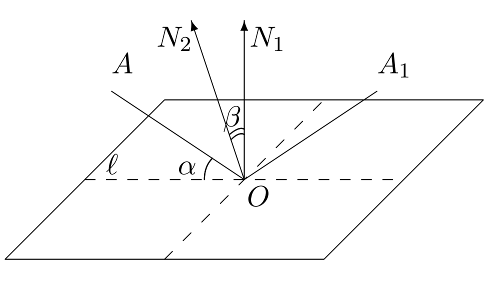


Рис. 1

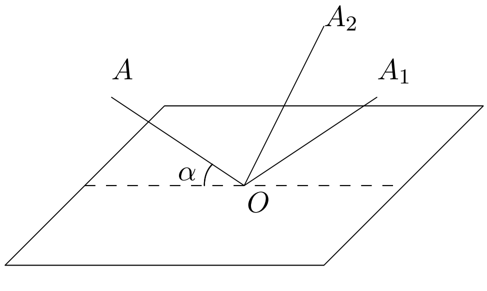


Рис. 2

Из формул (1)–(3) получаем

$$\cos\angle A_1OA_2 = 4\cos^2\beta\cos^2\alpha\sin^2\alpha - (2\cos^2\alpha - 1)(2\cos^2\gamma - 1) = 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\beta - 1 =$$
$$= 2 - 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\beta - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta.$$

6. Фигура на координатной плоскости состоит из точек (x, y), удовлетворяющих при любом $t \in \mathbb{R}$ двум неравенствам

$$x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2, \quad \cos y < 2 + \cos 2x + \cos x(4\sin t - 1) - \cos 2t.$$

Найдите площадь этой фигуры.

Ответ: $\pi^3 - 2\pi^2$**.**

Решение. Фигура, координаты точек которой удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2$ при всех t, представляет собой круг, заданный условием $x^2 + y^2 < \pi^2$.

Преобразуем второе неравенство к виду

$$\cos y < 2\cos^2 x + 4\cos x \sin t - \cos x + 2\sin^2 t \Leftrightarrow 2(\cos x + \sin t)^2 > \cos y + \cos x.$$

Из последнего неравенства следует, что (x, y) удовлетворяющие этому неравенству при всех t, это в точности (x, y) удовлетворяющие неравенству

$$\cos y + \cos x < 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} < 0.$$

Ввиду периодичности задачи по каждой переменной, выпишем решение последнего неравенства на периоде

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} > 0, \\ \cos\dfrac{x-y}{2} < 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} < 0, \\ \cos\dfrac{x-y}{2} > 0. \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x - \pi < y < -x + \pi, \\ x + \pi < y < x + 3\pi. \end{cases} \\ \begin{cases} -x + \pi < y < -x + 3\pi, \\ x - \pi < y < x + \pi. \end{cases} \end{array}\right.$$

Фигура, заданная этими неравенствами представляет собой два квадратика, а с учётом периодичности — «паркет» из квадратиков (см. рис. 3).

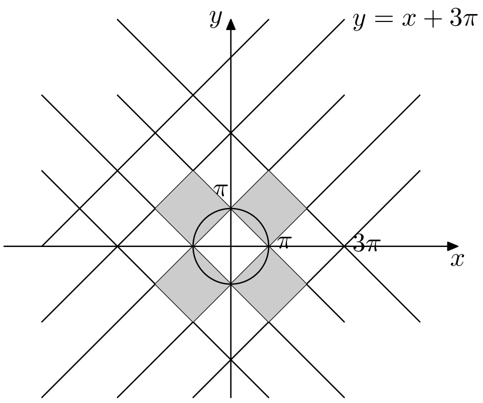


Рис. 3

Пересечение круга с «паркетом квадратиков» состоит из четырех круговых сегментов, суммарную площадь которых проще искать как площадь дополнения к квадрату, заданному условием $|x| + |y| \leqslant \pi$, в круге $x^2 + y^2 \leqslant \pi^2$). Поэтому искомая площадь равна $\pi^3 - 2\pi^2$.

7. Вовочка написал на доске равенство $101 = 11011$. Учитель информатики сказал, что это равенство будет верным, если понимать его как запись одного и того же числа, но в разных системах счисления. Найдите основания этих систем.

Ответ: 18 и 4.

Решение. Пусть основание счисления первого числа равно n, а второго — k. Тогда равенство, написанное Вовочкой, равносильно уравнению

$$n^2 + 1 = k^4 + k^3 + k + 1 \Leftrightarrow n^2 = k^4 + k^3 + k, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Умножим последнее уравнение на 4 и выделим полные квадраты:

$$(2n)^2 = (2k^2 + k)^2 + 4k - k^2.$$

Так как при $k > 4$ выполнено неравенство $4k - k^2 < 0$, то при $k > 4$ верно неравенство $(2n)^2 < (2k^2 + k)^2$. Сравним $(2n)^2$ с квадратом предыдущего числа $(2k^2 + k - 1)^2 = 4k^4 + 4k^3 - 3k^2 - 2k + 1$:

$$(2n)^2 > 4k^4 + 4k^3 - 3k^2 - 2k + 1 \Leftrightarrow 4k^4 + 4k^3 + 4k > 4k^4 + 4k^3 - 3k^2 - 2k + 1 \Leftrightarrow 3k^2 + 6k - 1 > 0.$$

Решения последнего неравенства образуют числа, принадлежащие множеству

$$\left(-\infty; \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right),$$

поэтому указанное неравенство выполняется для всех натуральных k (так как $\frac{-3+2\sqrt{3}}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 + 2\sqrt{3} < 3 \Leftrightarrow \sqrt{12} < 6$). Следовательно, при $k > 4$ выполнены неравенства
$(2k^2 + k - 1)^2 < (2n)^2 < (2k^2 + k)^2$, что невозможно.

Остаётся перебрать значения $k = 1, 2, 3, 4$. Проверка показывает, что подходят только $k = 4$, $n = 18$.

8. Найдите минимальное значение дискриминанта квадратного трёхчлена, график которого не имеет общих точек с областями, расположенными ниже оси абсцисс и над графиком функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Ответ: -4.

Решение. Так как дискриминант квадратного трёхчлена

$$D = b^2 - 4ac,$$

то будем искать максимальное значение произведения ac.Так как для всех x выполнено неравенство $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, то $a \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. Пусть

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - (ax^2 + bx + c).$$

Так как для всех $|x| < 1$ верно $f(x) \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} - (a + 2c).$$

Значит $a + 2c \leqslant 2\sqrt{2}$ поэтому из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем:

$$2\sqrt{2} \geqslant a + 2c \geqslant 2 \cdot \sqrt{a \cdot 2c} = 2\sqrt{2}\sqrt{ac}.$$

Следовательно, $ac \leqslant 1$.

Докажем, что 1 — это максимум ac. Действительно, пусть $a = 2c = \sqrt{2}$, $b = 0$, тогда исходное неравенство принимает вид:

$$\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - 1)^2(x^2 + 1) \geqslant 0, \\ |x| < 1. \end{cases}$$

Поэтому для дискриминанта квадратного трёхчлена справедливы неравенства

$$D = b^2 - 4ac \geqslant -4ac \geqslant -4$$

и его наименьшее значение равно -4.

9. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL, BM и CN, причем $\angle ANM = \angle ALC$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника LMN, две стороны которого равны 3 и 4.

Ответ: 2

Решение.

Справедливо следующее утверждение:

Пусть AL, BM и CN — биссектрисы внутренних углов треугольника. Если $\angle ANM = \angle ALC$, то $\angle BCA = 120°$.

Доказательство. Проведём $MD \parallel AL$, тогда $\angle CMD = \frac{\alpha}{2}$. Угол ALC — внешний угол треугольника ALB, следовательно $\angle ANM = \angle ALC = \frac{\alpha}{2} + \beta$. Угол BMC — внутренний угол треугольника BMC, значит, $\angle BMC = \pi - \frac{\beta}{2} - \gamma = \alpha + \frac{\beta}{2}$. Поэтому $\angle BMD = \alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Угол NMC — внешний угол треугольника ANM, значит, $\angle NMC = \frac{3\alpha}{2} + \beta$. Поэтому $\angle BMN = \frac{3\alpha}{2} + \beta - \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Значит треугольники BMN и BMD равны, поэтому $NM = MD$ и $\angle MDN = \frac{\pi-(\alpha+\beta)}{2} = \frac{\gamma}{2}$. Поэтому точки N, M, C и D лежат на одной окружности, а так как NM и ND — хорды, стягивающие равные дуги, то $NM = ND$, т.е. треугольник NMD — правильный, значит $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{3}$. Значит $\angle BCA = 120°$ (см. Рис. 4).

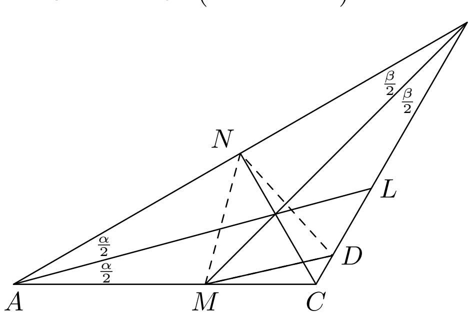


Рис. 4

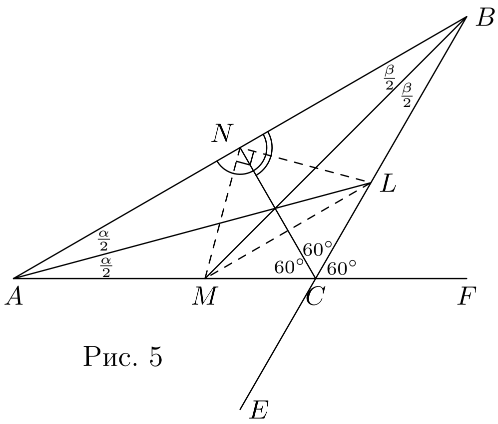


Рис. 5

Замечание. Справедливо и обратное утверждение: *если $\angle BCA = 120°$ и AL, BM и CN — биссектрисы внутренних углов треугольника, то $\angle ANM = \angle ALC$.*

Прямая CB является биссектрисой угла NCF ($\Rightarrow$ точка L равноудалена от прямых CN и CF), а прямая AL — биссектрисой угла BAF ($\Rightarrow$ точка L равноудалена от прямых $AN = NB$ и $AF = CF$). Следовательно, точка L равноудалена от прямых NC и NB, т.е. прямая NL — биссектриса угла BNC. Аналогично, прямая CA — биссектриса угла ECN ($\Rightarrow$ точка M равноудалена от прямых CN и CE), а прямая BM — биссектриса угла ABC ($\Rightarrow$ точка M равноудалена от прямых $BA = NA$ и $BE = CE$). Следовательно, точка M равноудалена от прямых NA и NC, т.е прямая NM — биссектриса угла ANC. Поэтому $\angle MNL = 90°$ (см. Рис. 5).

Оценим, какие значения могут принимать тангенсы острых углов $\triangle LMN$.

Из $\triangle ANC$ получаем, что $\angle ANC = 120° - \alpha \Rightarrow \angle MNC = 60° - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle NMC = 60° + \frac{\alpha}{2}$.

Из $\triangle BNC$ получаем, что $\angle BNC = 120° - \beta \Rightarrow \angle LNC = 60° - \frac{\beta}{2} \Rightarrow \angle NLC = 60° + \frac{\beta}{2}$.

По теореме синусов для $\triangle NMC$ получаем: $\dfrac{NC}{\sin\angle NMC} = \dfrac{NM}{\sin\angle NCM} \Rightarrow NC = \dfrac{2NM\sin\left(60° + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{3}}$.

По теореме синусов для $\triangle NLC$ получаем: $\dfrac{NC}{\sin\angle NLC} = \dfrac{NL}{\sin\angle NCL} \Rightarrow NC = \dfrac{2NL\sin\left(60° + \frac{\beta}{2}\right)}{\sqrt{3}}$.

С учётом равенства $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 30°$ из последних двух соотношений получаем, что

$$\operatorname{tg}\angle NLM = \frac{NM}{NL} = \frac{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(60° + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Так как $\frac{\alpha}{2} \in (0^\circ, 30^\circ)$ и функция $y = \sin t$ возрастает в первой четверти, то $\operatorname{tg} \angle NLM \in \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Если 3 и 4 — длины катетов $\triangle NLM$, то либо $\operatorname{tg} \angle NLM = \dfrac{3}{4}$, либо $\operatorname{tg} \angle NLM = \dfrac{4}{3}$. Но так как $\dfrac{3}{4} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}}$, то этот случай невозможен. Следовательно, возможен лишь случай, когда $ML = 4$ (гипотенуза), а 3 — длина одного из катетов. Длина другого катета по теореме Пифагора равна $\sqrt{7}$. Так как справедливы неравенства $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \dfrac{\sqrt{7}}{3} < \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} < \dfrac{7}{9} < \dfrac{4}{3}$, то этот случай реализуется. Так как в прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, то

$$R = \frac{ML}{2} = 2.$$

10. При каких натуральных n и k неравенства $|x_1| + \ldots + |x_k| \leqslant n$ и $|y_1| + \ldots + |y_n| \leqslant k$ имеют одинаковые количества целочисленных решений $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$?

Ответ: для любых натуральных n и k.

Решение.

I. Вначале докажем, что для любых натуральных n и k и любого l неравенства:

$$x_1 + \ldots + x_k \leqslant n \quad (1) \qquad \text{и} \qquad y_1 + \ldots + y_n \leqslant k \quad (2)$$

имеют одинаковое число решений, в которых значения всех переменных целые неотрицательные и ровно l из них отличны от нуля.

Первое доказательство. Действительно, если $l = 0$ то у каждого неравенства единственное решение ($x_1 = \ldots = x_k = 0$ и $y_1 = \ldots = y_n = 0$). Если же $l > 0$, то каждому такому решению неравенства (1) однозначно сопоставим такое же решение неравенства (2): рассмотрим произвольное решение неравенства (1), в котором m_1, m_2, $\ldots$, m_l ($m_1 < m_2 < \ldots < m_l$) — номера переменных, отличных от нуля и переменные, стоящие на указанных местах принимают положительные значения: p_1, p_2, $\ldots p_l$. По этому решению построим решение неравенства (2): на местах с номерами p_1, $p_1 + p_2$, $p_1 + p_2 + p_3$, $\ldots$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_l$ поставим m_1, $m_2 - m_1$, $m_3 - m_2$,$\ldots$, $m_l - m_{l-1}$, а на остальных местах поставим нули. Так как $m_1 > 0$, $m_2 - m_1 > 0$, $m_3 - m_2 > 0$,$\ldots$, $m_l - m_{l-1} > 0$ и $m_1 + (m_2 - m_1) + (m_3 - m_2) + (m_l - m_{l-1}) = m_l \leqslant n$, то построено нужное решение неравенства (2). Аналогично: рассмотрим произвольное решение неравенства (2), в котором r_1, r_2, $\ldots$, r_l ($r_1 < r_2 < \ldots < r_l$) номера переменных, отличных от нуля и переменные, стоящие на указанных местах принимают положительные значения: q_1, q_2, $\ldots q_l$. Тогда этому решению соответствует решение неравенства (1): на местах с номерами q_1, q_1+q_2, $q_1+q_2+q_3$, $\ldots$, $q_1+q_2+\ldots+q_l$ стоят r_1, r_2-r_1, r_3-r_2,$\ldots$, r_l-r_{l-1}, а на остальных местах стоят нули, при этом $q_1+q_2+\ldots+q_l \leqslant n$ и $r_1 + (r_2 - r_1) + (r_3 - r_2) + (r_l - r_{l-1}) = r_l \leqslant k$.

Второе доказательство. Всякое решение неравенства $x_1 + x_2 + \ldots + x_l \leqslant n$, в котором значения всех переменных целые и положительные, можно изобразить в виде последовательности из n точек, разделенных l палочками, так что перед первой палочкой стоит x_1 точка, между первой и второй палочкой стоят x_2 точки, между второй и третьей палочкой стоят x_3 точки и т.д., между $l-1$-й и l-й запятой стоят x_l точек. Тогда палочки должны стоять в разных промежутках между точками, а последняя палочка может стоять как между точками (что соответствует строгому неравенству), так и после последней точки (что соответствует равенству). Причем любая такая расстановка палочек даёт решение указанного вида для этого неравенства.

Поэтому число решений указанного вида для этого неравенства равно числу способов выбрать из n промежутков между точками (одно место находится после всех точек) места для l палочек, то есть C_n^l. Поэтому число решений неравенства $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant n$, в котором значения всех переменных целые и неотрицательные и ровно l из них отличны от 0, равно $C_n^l C_k^l$ (C_n^l умножается на количество способов выбрать из k переменных l неотрицательных, т.е. на C_k^l).

Аналогично, число решений неравенства $y_1+y_2+\ldots+y_n \leqslant k$. в котором значения всех переменных целые и неотрицательные и ровно l из них отличны от 0, равно $C_k^l C_n^l$.

Тем самым доказали что для любых натуральных n и k и любого $l: \quad 0 \leqslant l \leqslant \min(n,k)$ неравенства:

$$x_1+\ldots+x_k \leqslant n \quad (1) \qquad \text{и} \qquad y_1+\ldots+y_n \leqslant k \quad (2)$$

имеют одинаковое число решений, в которых значения всех переменных целые неотрицательные и ровно l из них отличны от нуля.

II. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — решение неравенства (1), в котором все $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — целые и ровно l из них отличны от нуля, то из этого решения получаем ровно 2^l различных решений неравенства $|x_1| + \ldots + |x_k| \leqslant n$, заменяя каждое положительное $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ на два значения: x_i и $-x_i$. Отметим, что таким образом мы получим все целочисленные решения неравенства $|x_1| + \ldots + |x_k| \leqslant n$, у которых ровно l значений переменных отличны от нуля. Из этого рассуждения, используя утверждение пункта I, получаем: что для любых натуральных n и k неравенства

$$|x_1|+\ldots+|x_k| \leqslant n \qquad \text{и} \qquad |y_1|+\ldots+|y_n| \leqslant k$$

имеют одинаковое число целочисленных решений, в которых ровно l значений переменных отличны от нуля. Далее, перебирая все значения l от 0 до $\min(n,k)$, получаем доказательство утверждения.

Из приведённых рассуждений следует, что количество целочисленных решений неравенств

$$|x_1|+\ldots+|x_k| \leqslant n \qquad \text{и} \qquad |y_1|+\ldots+|y_n| \leqslant k$$

равно

$$\sum_{l=0}^{\min(n,k)} 2^l C_k^l C_n^l.$$

Решение задач для 9 класса

1. За круглым столом собрались несколько юнош и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юнош справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

Ответ: 35 человек.

Решение: Из условия видно, что девушек ровно 19.

Заметим, что количество девушек, слева от которых сидят юноши равно количеству юношей у котрых справа сидят девушки. Таким образом 75% юношей равно 12, т.е. всего за столом сидит 16 юношей. Итого, получим 19 девушек + 16 юношей = 35 человек.

2. На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: "Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек". Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

Ответ: Любое количество.

Решение: Рассмотрим следующую расстановку жителей острова (вегетарианцы обозначены буквами «В», каннибалы — буквами «К») $BKKBKKBK\ \underbrace{K\ldots K}_{\text{любое кол–во}}$. Каждый вегетарианец стоит либо через 2, либо через 5 от другого вегетарианца, следовательно, для них утверждение истинно. Для каннибалов, которые стоят рядом или через одного с каким–нибудь вегетарианцем утверждение ложно (напомним, что 1 — не простое!). Для каннибалов, стоящих в правой части, либо 1–й, либо 2–й вегетарианец стоит через четное число людей (большее 2), следовательно для них утверждение тоже ложно. Таким образом, в ряд можно выстроить 6 и более жителей острова.

Непосредственно проверяется, что 1,2,3,4,5 жителей тоже можно выстроить, так, чтобы выполнялось условие задачи. Например брать начальные отрезки предложенного построения.

3. У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она одевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной ручке ровно один раз?

Ответ: Нет.

Решение: Рассмотрим первый браслет. Он должен побывать в паре с каждым из остальных 99 ровно один раз. Допустим Лиза надевает его n дней. Тогда он побывает в паре ровно с $2n$ браслетами, что не может быть равно 99.

4. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{44\ldots4}_{2012\text{ раз}}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2012\text{ раз}}$

Ответ: 18108.

Решение: Заметим, что $\underbrace{4\ldots4}_{2012}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{2012} = \underbrace{4\ldots4}_{2012}\underbrace{0\ldots0}_{2012} - \underbrace{4\ldots4}_{2012} = \underbrace{4\ldots4}_{2011}3\underbrace{5\ldots5}_{2011}6$. Сумма цифр равна $4\cdot 2011 + 3 + 5\cdot 2011 + 6 = 18108$.

5. Бешеный маляр бегает по клеткам доски 2012×2013, изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку, эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

Ответ: Да, всегда.

Решение: Если маляр пробежит от угловой клетки до произвольной белой, потом вернется в угловую клетку по тому же маршруту, то указанная клетка поменяет цвет, а все остальные клетки останутся прежнего цвета. Таким образом можно поменять цвет всех клеток, кроме угловой. Если ее цвет окажется черным, то маляр может просто спрыгнуть. а если белым, то маляр может пробежаться по периметру до нее и вернуться обратно тем же путем. Тогда ее цвет поменяется на черный.

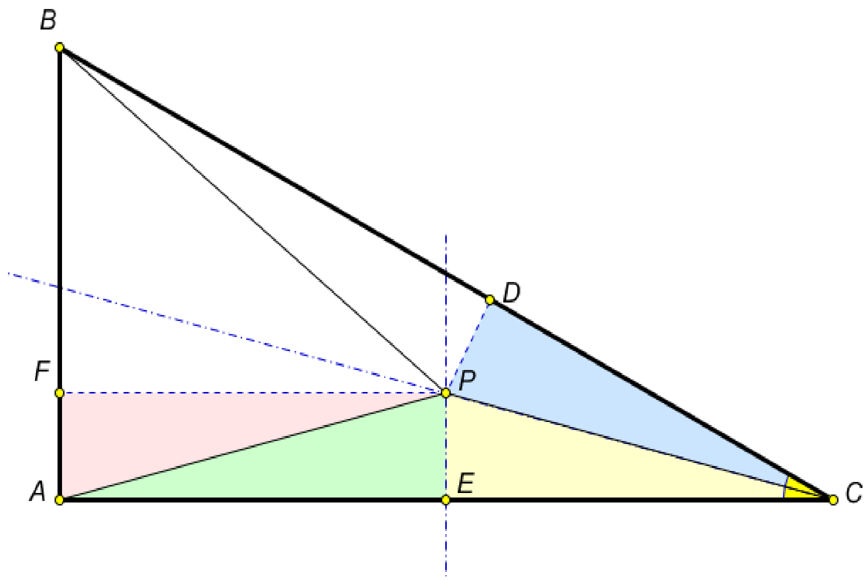
6. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы 100×100 ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

Решение: Если верить Саше, то сумма цифр в кадой строке делится на 9, следовательно общая сумма цифр в таблице тоже будет делиться на 9. Но если верить Максиму, то сумма цифр во всех столбцах кроме одного делится на 9, а следовательно, сумма цифр в таблице не делится на 9. Противоречие.

7. Точка P лежит внутрит треугольника ABC. Еч соединили со всеми вершинами треугольника, а также опустили перпендикуляры из неч на стороны, образовав 6 треугольников. Оказалось, что 4 из них равны. Всегда ли это означает, что треугольник равнобедренный?

Ответ: Не обязательно..

Решение: Пример такого треугольника, не являющегося равнобедренным. Здесь, $\triangle ABC$ — прямоугольный треугольник, точка P получена перечесением биссектрисы угла $\angle BCA$ и серединного перпендикуляра к стороне AC.



8. Множество натуральных чисел называется *плохим*, если из него можно выбрать несколько чисел так, чтобы они в сумме давали 2012. Найдите наименьшее такое n, что числа 503, 504, $\ldots$, 2011 можно разбить на n множеств так, что все эти множества не были бы плохими.

Ответ: $n = 2$.

Решение: Покажем, что указанное множество можно разбить на два подмножества, так, чтобы оба не были плохими. Рассмотрим множества $M_1 = \{503, 504, \ldots, 671\}$, $M_2 = \{672, 673, \ldots, 1006\}$, $M_3 = \{1007, 1008, \ldots, 1340\}$, $M_4 = \{1341, 1342, \ldots, 2011\}$ и покажем, что $M_1 \cup M_3$ и $M_2 \cup M_4$ не являются плохими.

Докажем, что $M_1 \cup M_3$ не плохое. Рассмотрим варианты:

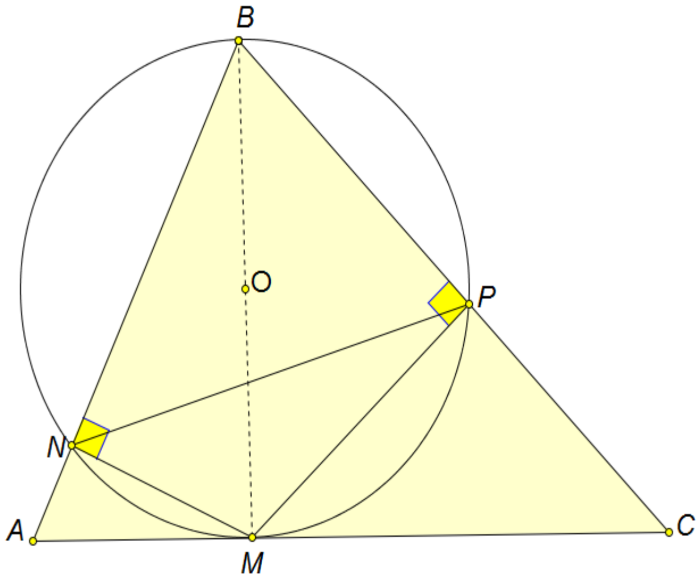
- Четыре числа из множества M_1 дают сумму $S \geqslant 503 + 504 + 505 + 506 = 2018 > 2012$;
- Три числа из множества M_1 дают сумму $S \leqslant 669 + 670 + 671 = 2010 < 2012$;
- Два числа из множества M_1 и одно из M_3 дают сумму $S \geqslant 503 + 504 + 1007 = 2014 > 2012$;
- Одно число из множества M_1 и одно из M_3 дают сумму $S \leqslant 671 + 1340 = 2011 < 2012$;
- Два числа из M_3 дают сумму $S \geqslant 1007 * 3 = 2021 > 2012$;

Аналогично доказывается для $M_2 \cup M_4$.

9. На стороне AC остроугольного треугольника ABC взята точка M. Из точки M на стороны AB и BC опущены перпендикуляры MN и MP. Где должна находиться точка M, чтобы длина отрезка NP была минимальной?

Ответ: Точка M должна быть основанием высоты, опущенной из точки B.

Решение: Построим окружность с диаметром BM, очевидно, что точки N и P будут лежать на ней.



На хорду NP опирается фиксированный угол $\angle ABC$, следовательно, ее длина минимальна, если минимален диаметр окружности. А диаметр, равный MB минимален тогда, когда BM — высота.

10. Решите уравнение:

$$\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{x} + \frac{10}{[x]},$$

где $[x]$ — наименьшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Решение: Заметим, что x не может быть отрицательным, т.к. в таком случае правая часть была бы отрицательной. Кроме того, x не может быть целым, т.к. дробная часть была бы равна 0, и не может принадлежать интервалу $[0, 1)$, т.к. целая часть была бы равна 0. Рассмотрим возможные варианты:

- Если $[x] = 1$, то $\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{1+\{x\}} + 10$. Тогда $\{x\} = \frac{1}{2}$, следовательно $x = \frac{3}{2}$;
- Если $[x] = 2$ то $\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{2+\{x\}} + 5$, откуда получаем $\{x\} = 1$, что невозможно.
- Если $[x] \geqslant 3$, то $\frac{9}{x} + \frac{10}{[x]} < 3 + \frac{10}{3} < 8 < \frac{8}{\{x\}}$.

Решение задач для 8 класса

1. Два олигарха Алехандро и Максимилиан за 2012 год взяли и разграбили свою страну. Известно, что состояние Алехандро на конец 2012 года равняется двум состояниям Максимилиана на конец 2011 года. А состояние Максимилиана на конец 2012 года меньше, чем состояние Алехандро на конец 2011 года. Что больше: состояние Максимилиана или национальные богатства страны?

Ответ: Состояние Максимилиана больше.

Решение: Рассмотрим таблицу, в которой z, x — состояния Алехандро и Максимилиана в 2011 году:

	2011	2012
А	z	$2x$
М	x	y

Тогда $N = (2x+y)-(x+z)$ — национальные богатства страны. Вычтем из них x, получаем $N - x = y - z < 0$, следовательно, они меньше состояния Максимилиана.

2. За круглым столом собрались несколько юнош и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юнош справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

Ответ: 35 человек.

Решение: Из условия видно, что девушек ровно 19.

Заметим, что количество девушек, слева от которых сидят юноши равно количеству юношей у котрых справа сидят девушки. Таким образом 75% юношей равно 12, т.е. всего за столом сидит 16 юношей. Итого, получим 19 девушек + 16 юношей = 35 человек.

3. У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она одевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной ручке ровно один раз?

Ответ: Нет.

Решение: Рассмотрим первый браслет. Он должен побывать в паре с каждым из остальных 99 ровно один раз. Допустим Лиза надевает его n дней. Тогда он побывает в паре ровно с $2n$ браслетами, что не может быть равно 99.

4. На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: "Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек". Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

Ответ: Любое количество.

Решение: Рассмотрим следующую расстановку жителей острова (вегетарианцы обозначены буквами «В», каннибалы — буквами «К») $BKKBKKBK\ \underbrace{K\ldots K}_{\text{любое кол–во}}$.

Каждый вегетарианец стоит либо через 2, либо через 5 от другого вегетарианца, следовательно, для них утверждение истинно. Для каннибалов, которые стоят рядом или через одного с каким–нибудь вегетарианцем утверждение ложно (напомним, что 1 — не простое!). Для каннибалов, стоящих в правой части, либо 1–й, либо 2–й вегетарианец стоит через четное число людей (большее 2), следовательно для них утверждение тоже ложно. Таким образом, в ряд можно выстроить 6 и более жителей острова.

Непосредственно проверяется, что 1,2,3,4,5 жителей тоже можно выстроить, так, чтобы выполнялось условие задачи. Например брать начальные отрезки предложенного построения.

5. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{44\ldots4}_{2012 \text{ раз}} \cdot \underbrace{99\ldots9}_{2012 \text{ раз}}$

Ответ: 18108.

Решение: Заметим, что $\underbrace{4\ldots4}_{2012} \cdot \underbrace{9\ldots9}_{2012} = \underbrace{4\ldots4}_{2012}\underbrace{0\ldots0}_{2012} - \underbrace{4\ldots4}_{2012} = \underbrace{4\ldots4}_{2011}3\underbrace{5\ldots5}_{2011}6$. Сумма цифр равна $4 \cdot 2011 + 3 + 5 \cdot 2011 + 6 = 18108$.

6. Бешеный маляр бегает по клеткам доски 2012×2013, изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку, эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

Ответ: Да, всегда.

Решение: Если маляр пробежит от угловой клетки до произвольной белой, потом вернется в угловую клетку по тому же маршруту, то указанная клетка поменяет цвет, а все остальные клетки останутся прежнего цвета. Таким образом можно поменять цвет всех клеток, кроме угловой. Если ее цвет окажется черным, то маляр может просто спрыгнуть. а если белым, то маляр может пробежаться по периметру до нее и вернуться обратно тем же путем. Тогда ее цвет поменяется на черный.

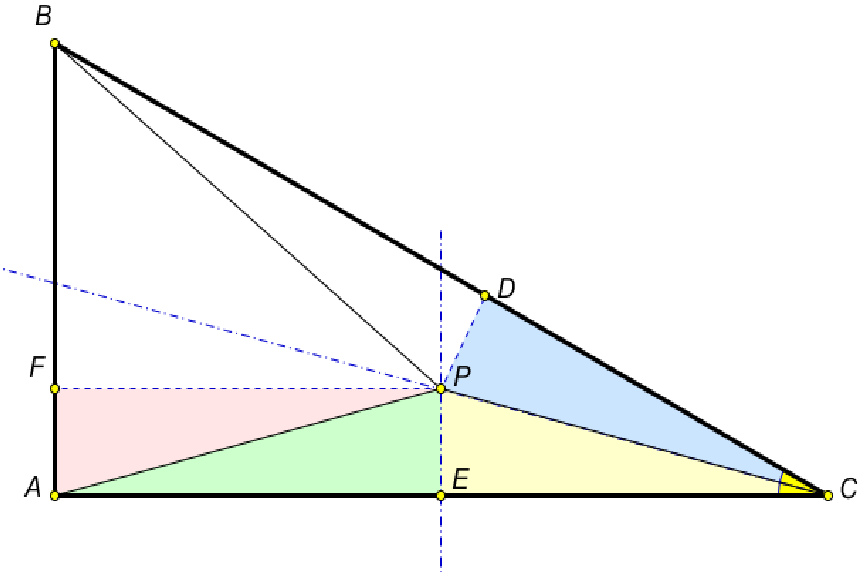
7. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы 100×100 ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

Решение: Если верить Саше, то сумма цифр в кадой строке делится на 9, следовательно общая сумма цифр в таблице тоже будет делиться на 9. Но если верить Максиму, то сумма цифр во всех столбцах кроме одного делится на 9, а следовательно, сумма цифр в таблице не делится на 9. Противоречие.

8. Точка P лежит внутрит треугольника ABC. Ецсоединили со всеми вершинами треугольника, а также опустили перпендикуляры из нец на стороны, образовав 6 треугольников. Оказалось, что 4 из них равны. Всегда ли это означает, что треугольник равнобедренный?

Ответ: Не обязательно..

Решение: Пример такого треугольника, не являющегося равнобедренным. Здесь, $\triangle ABC$ — прямоугольный треугольник, точка P получена перечесением биссектрисы угла $\angle BCA$ и серединного перпендикуляра к стороне AC.



9. Множество натуральных чисел называется *плохим*, если из него можно выбрать несколько чисел так, чтобы они в сумме давали 2012. Найдите наименьшее такое n, что числа 503, 504, $\ldots$, 2011 можно разбить на n множеств так, что все эти множества не были бы плохими.

Ответ: $n = 2$.

Решение: Покажем, что указанное множество можно разбить на два подмножества, так, чтобы оба не были плохими. Рассмотрим множества $M_1 = \{503, 504, \ldots, 671\}$, $M_2 = \{672, 673, \ldots, 1006\}$, $M_3 = \{1007, 1008, \ldots, 1340\}$, $M_4 = \{1341, 1342, \ldots, 2011\}$ и покажем, что $M_1 \cup M_3$ и $M_2 \cup M_4$ не являются плохими.

Докажем, что $M_1 \cup M_3$ не плохое. Рассмотрим варианты:

- Четыре числа из множества M_1 дают сумму $S \geqslant 503 + 504 + 505 + 506 = 2018 > 2012$;
- Три числа из множества M_1 дают сумму $S \leqslant 669 + 670 + 671 = 2010 < 2012$;
- Два числа из множества M_1 и одно из M_3 дают сумму $S \geqslant 503 + 504 + 1007 = 2014 > 2012$;
- Одно число из множества M_1 и одно из M_3 дают сумму $S \leqslant 671 + 1340 = 2011 < 2012$;
- Два числа из M_3 дают сумму $S \geqslant 1007 * 3 = 2021 > 2012$;

Аналогично доказывается для $M_2 \cup M_4$.

Решение задач для 7 класса

1. Два олигарха Алехандро и Максимилиан за 2012 год взяли и разграбили свою страну. Известно, что состояние Алехандро на конец 2012 года равняется двум состояниям Максимилиана на конец 2011 года. А состояние Максимилиана на конец 2012 года меньше, чем состояние Алехандро на конец 2011 года. Что больше: состояние Максимилиана или национальные богатства страны?

Ответ: Состояние Максимилиана больше.

Решение: Рассмотрим таблицу, в которой z, x — состояния Алехандро и Максимилиана в 2011 году:

	2011	2012
А	z	$2x$
М	x	y

Тогда $N = (2x+y)-(x+z)$ — национальные богатства страны. Вычтем из них x, получаем $N - x = y - z < 0$, следовательно, они меньше состояния Максимилиана.

2. В гонке Формула-2013 учавствуют 2 гонщика. Первый гонщик проехал 4 круга за то время, пока второй проехал три. В течении следующих трчх кругов из-за быстрой езды первому гонщику пришлось проехать дополнительно 20 метров по питстопу (не останавливаясь). Известно, что когда второй гощик проехал 6 кругов, первый проехал 7,75 круга. Найдите длину круга. (Скорости гонщиков постоянны.)

Ответ: 80 метров.

Решение: Если бы не остановка на питстопе, то первый гонщик проехал бы ровно 8 кругов за то время, пока второй проехал 6 кругов. Следовательно, питстоп составляет ровно $\frac{1}{4}$ круга. Тогда весь круг равен 80 метров.

3. За круглым столом собрались несколько юнош и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юнош справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

Ответ: 35 человек.

Решение: Из условия видно, что девушек ровно 19.

Заметим, что количество девушек, слева от которых сидят юноши равно количеству юношей у котрых справа сидят девушки. Таким образом 75% юношей равно 12, т.е. всего за столом сидит 16 юношей. Итого, получим 19 девушек + 16 юношей = 35 человек.

4. На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: "Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек". Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

Ответ: Любое количество.

Решение: Рассмотрим следующую расстановку жителей острова (вегетарианцы обозначены буквами «В», каннибалы — буквами «К») $BKKBKKBK\underbrace{K\ldots K}_{\text{любое кол–во}}$.

Каждый вегетарианец стоит либо через 2, либо через 5 от другого вегетарианца, следовательно, для них утверждение истинно. Для каннибалов, которые стоят рядом или через одного с каким–нибудь вегетарианцем утверждение ложно (напомним, что 1 — не простое!). Для каннибалов, стоящих в правой части, либо 1–й, либо 2–й вегетарианец стоит через четное число людей (большее 2), следовательно для них утверждение тоже ложно. Таким образом, в ряд можно выстроить 6 и более жителей острова.

Непосредственно проверяется, что 1,2,3,4,5 жителей тоже можно выстроить, так, чтобы выполнялось условие задачи. Например брать начальные отрезки предложенного построения.

5. У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она одевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной ручке ровно один раз?

Ответ: Нет.

Решение: Рассмотрим первый браслет. Он должен побывать в паре с каждым из остальных 99 ровно один раз. Допустим Лиза надевает его n дней. Тогда он побывает в паре ровно с $2n$ браслетами, что не может быть равно 99.

6. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{44\ldots4}_{2012\text{ раз}}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2012\text{ раз}}$

Ответ: 18108.

Решение: Заметим, что $\underbrace{4\ldots4}_{2012}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{2012}=\underbrace{4\ldots4}_{2012}\underbrace{0\ldots0}_{2012}-\underbrace{4\ldots4}_{2012}=\underbrace{4\ldots4}_{2011}3\underbrace{5\ldots5}_{2011}6.$ Сумма цифр равна $4\cdot2011+3+5\cdot2011+6=18108$.

7. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы 100×100 ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

Решение: Если верить Саше, то сумма цифр в кадой строке делится на 9, следовательно общая сумма цифр в таблице тоже будет делиться на 9. Но если верить Максиму, то сумма цифр во всех столбцах кроме одного делится на 9, а следовательно, сумма цифр в таблице не делится на 9. Противоречие.

8. Бешеный маляр бегает по клеткам доски 2012×2013, изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку, эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

Ответ: Да, всегда.

Решение: Если маляр пробежит от угловой клетки до произвольной белой, потом вернется в угловую клетку по тому же маршруту, то указанная клетка поменяет цвет, а все остальные клетки останутся прежнего цвета. Таким образом можно поменять цвет всех клеток, кроме угловой. Если ее цвет окажется черным, то маляр может просто спрыгнуть. а если белым, то маляр может пробежаться по периметру до нее и вернуться обратно тем же путем. Тогда ее цвет поменяется на черный.

Вариант 1.

1. На покраску дома жёлтой краски потребовалось больше, чем белой на 20%, а коричневой краски – на 25% меньше, чем жёлтой. На сколько процентов коричневой и жёлтой краски суммарно потребовалось больше, чем белой?

Ответ: На 110%.

2. Решить уравнение $\sqrt{6}\cos x + \sqrt{2}|\sin x| = 2$.

Ответ: $x = \pm\frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

3. Решить неравенство $\log_{x^2+4x+3}(x-4)^2 \cdot \log_{-x^2+3x+4}(3-x)^3 \le 0$.

Ответ: $x \in \left(\frac{3-\sqrt{21}}{2};\ -2+\sqrt{2}\right) \cup [2;\ 3)$.

4. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, а диагонали пересекаются в точке O, на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 2 : 3$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 3 : 2$. Найти площадь треугольника COD, если $AD = 7$, $BC = 3$, $KM = 6$ а $\cos\angle CAD = 1/5$.

Ответ: $S_{COD} = \frac{126\sqrt{6}}{125}$.

5. Функция $f(t)$ с областью определения $D(f) = [1, +\infty)$ удовлетворяет уравнению $f\left(\frac{4^y+4^{-y}}{2}\right) = y$ для любого $y \ge 0$. Для каждого значения $a \ne 0$ найти все решения неравенства $f\left(\frac{a}{x+2a}\right) \le 1$.

Ответ: При $a > 0$: $x \in \left[-\frac{26a}{17};-a\right]$. При $a < 0$: $x \in \left[-a;\ -\frac{26a}{17}\right]$.

6. В коробке у Маши лежит 25 новогодних шаров, которыми Маша начинает украшать елку. Каждый шар она сначала в течении 10 секунд выбирает в коробке, а затем в течение 15 секунд вешает на елку. Два ее младших брата Саша и Паша незаметно снимают шары с елки и прячут среди своих игрушек. Дождавшись момента, когда Маша начинает искать в коробке очередной шар, один из братьев (но не оба) может снять с елки один шар (на это ему требуется ровно 10 секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный шар, у Саши уходит 50 секунд, после чего он готов украсть с елки следующий шар, а Паша прячет шар за одну минуту и 50 секунд. Какое наименьшее число шаров может висеть на елке в тот момент, когда Маша повесит свой последний шар?

Ответ: 12.

7. Три велосипедиста одновременно начинают двигаться в одной плоскости по трем концентрическим окружностям с общим центром O и радиусами $R_1 = 20$м для первого, $R_2 = 40$м для второго и $R_3 = 80$м для третьего велосипедиста. В начальный момент времени велосипедисты находятся на одном луче с вершиной в точке O. Все велосипедисты двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями, причем скорость первого велосипедиста в два раза больше скорости второго, но в два раза меньше скорости третьего. Велосипедисты продолжают свое движение до тех пор, пока не закончит свой полный круг последний из них (тот, кто потратит на объезд своего круга больше всего времени). Сколько раз за это время они окажутся на одной прямой, не проходящей через центр O?

Ответ: 2 раза.

8. В пирамиде $FABC$ $AB = BC$, $FB = FK$, где K — середина отрезка AC, а тангенс угла между плоскостями FAB и ABC оотносится к тангенсу угла между плоскостями FBC и ABC как $1 : 3$. Плоскость π паралаллельна AB, делит ребро FC в отношении $1 : 4$, считая от вершины F, и проходит через основание O высоты FO пирамиды $FABC$. Найти отношение объемов многогранников, на которые делит эта плоскость пирамиду $FABC$.

Ответ: $5 : 11$ или $1 : 19$.

Вариант 2.

1. Фермер вырастил свёклы меньше, чем моркови на 50%, а свёклы и моркови суммарно вырастил меньше, чем картофеля на 40%. На сколько процентов он вырастил меньше моркови, чем картофеля?

Ответ: На 60%.

2. Решить уравнение $\sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}|\cos x| = 2$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \frac{11\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Решить неравенство

$$\log_{x^2+3x+2}(x-5)^2 \cdot \log_{-x^2+4x+5}(4-x)^3 \leq 0.$$

Ответ: $x \in \left(2-2\sqrt{2};\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) \cup [3;\ 4)$.

4. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, а диагонали пересекаются в точке O, на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 2 : 1$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 1 : 2$. Найти площадь треугольника COD, если $AD = 5$, $BC = 2$, $KM = 7/3$ а $\cos\angle CAD = 1/3$.

Ответ: $S_{COD} = \frac{20\sqrt{2}}{27}$.

5. Функция $f(t)$ с областью определения $D(f) = [1, +\infty)$ удовлетворяет уравнению $f\left(\frac{2^y+2^{-y}}{2}\right) = y$ для любого $y \leq 0$. Для каждого значения $b \neq 0$ найти все решения неравенства $f\left(\frac{3b}{x+b}\right) \geq -2$.

Ответ: При $b > 0$: $x \in \left[\frac{7b}{17};\ 2b\right]$. При $b < 0$: $x \in \left[2b;\ \frac{7b}{17}\right]$.

6. В коробке у Вани лежит 32 новогодних шара, которыми Ваня начинает украшать елку. Каждый шар он сначала в течении 15 секунд выбирает в коробке, а затем в течение 20 секунд вешает на елку. Две его младших сестры Аня и Таня незаметно снимают шары с елки и прячут среди своих игрушек. Дождавшись момента, когда Ваня начинает искать в коробке очередной шар, одна из сестер (но не обе) может снять с елки один шар (на это ей требуется ровно 15 секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный шар, у Ани уходит одна минута и 45 секунд, после чего она готова украсть с елки следующий шар, а Таня прячет шар за три минуты и 45 секунд. Какое наименьшее число шаров может висеть на елке в тот момент, когда Ваня повесит свой последний шар?

Ответ: 19.

7. Три черепахи одновременно начинают двигаться в одной плоскости по трем концентрическим окружностям с общим центром O и радиусами $R_1 = 2$м для первой, $R_2 = 3$м для второй и $R_3 = 9$м для третьей черепахи. В начальный момент времени черепахи находятся на одном луче с вершиной в точке O. Все черепахи двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями, причем скорость третьей черепахи в шесть раз больше скорости второй, и относится к скорости первой черепахи как $9 : 4$. Черепахи продолжают свое движение до тех пор, пока не закончит свой полный круг последняя из них (та, что потратит на обход своего круга больше всего времени). Сколько раз за это время они окажутся на одной прямой, не проходящей через центр O?

Ответ: 2 раза.

8. В пирамиде $SABC$ $AB = BC$, $SB = SN$, где N — середина отрезка AC, а тангенс угла между плоскостями SAB и ABC оотносится к тангенсу угла между плоскостями SBC и ABC как $5 : 2$. Плоскость π паралаллельна BC, делит ребро SA в отношении $1 : 2$, считая от вершины S, и проходит через основание O высоты SO пирамиды $SABC$. Найти отношение объемов многогранников, на которые делит эта плоскость пирамиду $SABC$.

Ответ: $27 : 71$ или $1 : 53$.

Вариант 3.

1. Детская машина с педалями дешевле самоката на 25%, но общая стоимость машины с педалями и самоката на 25% больше стоимости велосипеда. На сколько процентов велосипед дороже самоката?

Ответ: На 40%.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}|\sin x| = 2.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

3. Решить неравенство

$$\log_{x^2+6x+8}(x-7)^2 \cdot \log_{-x^2+5x+14}(3-x)^3 \leq 0.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{5-\sqrt{77}}{2};\ -3+\sqrt{2}\right) \cup [2;\ 3)$.

4. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, а диагонали пересекаются в точке O, на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 1 : 3$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 3 : 1$. Найти площадь треугольника COD, если $AD = 9$, $BC = 5$, $KM = \frac{21}{2}$ а $\cos\angle CAD = 1/4$.

Ответ: $\frac{135\sqrt{15}}{64}$

5. Функция $f(t)$ с областью определения $D(f) = [1, +\infty)$ удовлетворяет уравнению $f\left(\frac{3^y+3^{-y}}{2}\right) = y$ для любого $y \geq 0$. Для каждого значения $c \neq 0$ найти все решения неравенства $f\left(\frac{c}{x-c}\right) \leq 2$.

Ответ: При $c > 0$: $x \in \left[\frac{50c}{41}; 2c\right]$. При $c < 0$: $x \in \left[2c; \frac{50c}{41}\right]$.

6. В коробке у Оли лежит 31 новогодний шар, которыми Оля начинает украшать елку. Каждый шар она сначала в течение 12 секунд выбирает в коробке, а затем в течение 20 секунд вешает на елку. Ее младший брат Коля и младшая сестра Поля незаметно снимают шары с елки и прячут среди своих игрушек. В тот момент, когда Оля начинает искать в коробке очередной шар, либо Коля, либо Поля (но не оба) могут снять с елки один шар (на это каждому из них требуется ровно 12 секунд). После этого, на то, чтобы спрятать шар, у Коли уходит одна минута 18 секунд, после чего он готов украсть с елки следующий шар, а Поля прячет шар за две минуты 18 секунд. Какое наименьшее число шаров может висеть на елке в тот момент, когда Оля повесит свой последний шар?

Ответ: 15.

7. Три искусственных спутника одновременно начинают двигаться в одной плоскости по трем концентрическим окружностям с общим центром O и радиусами $R_1 = 10000$км для первого, $R_2 = 20000$км для второго и $R_3 = 60000$км для третьего спутника. В начальный момент времени спутники находятся на одном луче с вершиной в точке O. Все спутники двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями, причем скорость первого спутника в два раза больше скорости второго, но в три раза меньше скорости третьего. Спутники продолжают свое движение до тех пор, пока не закончит свой полный круг последний из них (тот, который потратит на облет своего круга больше всего времени). Сколько раз за это время они окажутся на одной прямой, не проходящей через центр O?

Ответ: 2 раза.

8. В пирамиде $PABC$ $AB = BC$, $PB = PQ$, где Q — середина отрезка AC, а тангенс угла между плоскостями PAB и ABC относится к тангенсу угла между плоскостями PBC и ABC как $4 : 1$. Плоскость π наралаллельна BC, делит ребро PA пополам, и проходит через основание O высоты PO пирамиды $PABC$. Найти отношение объемов многогранников, на которые делит эта плоскость пирамиду $PABC$.

Ответ: $9 : 41$ или $1 : 17$.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Задания заключительного этапа 2012/2013 учебного года для 11 класса

Решения.

Вариант 1.

1. На покраску дома жёлтой краски потребовалось больше, чем белой на 20%, а коричневой краски – на 25% меньше, чем жёлтой. На сколько процентов коричневой и жёлтой краски суммарно потребовалось больше, чем белой?

Решение: Пусть x — количество белой краски. Тогда желтой краски потребовалось $\frac{6x}{5}$, а коричневой $\frac{3}{4}\cdot\frac{6x}{5}=\frac{9x}{10}$. Отношение общего количества коричневой и желтой краски к количеству белой краски равно

$$\left(\frac{9x}{10}+\frac{6x}{5}\right):x=\frac{210}{100}.$$

$\square$

Ответ: На 110%.

2. Решить уравнение $\sqrt{6}\cos x+\sqrt{2}|\sin x|=2$.

Решение: Поделим уравнение на $\sqrt{8}$. При $\sin x\geq 0$ получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Longleftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$. Учитывая условие $\sin x\geq 0$, остается одна серия $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Если $\sin x\leq 0$, то получим уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Longleftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $x=-\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$. Учитывая условие $\sin x\leq 0$, остается одна серия $x=-\frac{5\pi}{12}-2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. $\square$

Ответ: $x=\pm\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

3. Решить неравенство $\log_{x^2+4x+3}(x-4)^2\cdot\log_{-x^2+3x+4}(3-x)^3\leq 0$.

Решение: Найдем ОДЗ переменной x. Для этого составим систему

$$\begin{cases}x^2+4x+3>0,\\ x^2+4x+3\neq 1,\\ (x-4)^2>0,\\ -x^2+3x+4>0,\\ -x^2+3x+4\neq 1,\\ (3-x)^3>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty),\\ x\neq -2\pm\sqrt{2},\\ x\neq 4,\\ x\in(-1;4),\\ x\neq\frac{3\pm\sqrt{21}}{2},\\ x<3.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-1;\tfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\tfrac{3-\sqrt{21}}{2};-2+\sqrt{2}\right)\cup(-2+\sqrt{2};3).$$

Теперь найдем нули левой части: $x=2$ и определим ее знак на каждом интервале.

Ответ: $x\in\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2};-2+\sqrt{2}\right)\cup[2;3)$.

4. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, а диагонали пересекаются в точке O, на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 2 : 3$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 3 : 2$. Найти площадь треугольника COD, если $AD = 7$, $BC = 3$, $KM = 6$ а $\cos\angle CAD = 1/5$.

РЕШЕНИЕ: Вначале докажем, что отрезок KM проходит через точку O. Треугольники AOD и COB подобны, а значит $DO : BO = AO : CO = AD : BC = 7 : 3$. Проведем прямую KO и обозначим точку ее пересечения с отрезком AD через N. Треугольники DON и BOK подобны, а значит $DN : BK = DO : BO = NO : OK = 7 : 3$. Аналогично, $AN : CK = AO : CO = 7 : 3$. Поделим первое из этих равенств на второе и получим $DN : AN = BK : CK$, т.е. точка N совпадает с точкой M, а значит отрезок KM совпадает с отрезком KN и проходит через точку O.

По условию $BK = 6/5$, $CK = 9/5$, $AM = 21/5$, $DM = 14/5$. В силу подобия треугольников, $KO : OM = 3 : 7$, откуда $KO = 9/5$, $OM = 21/5$. Найдем AO из теоремы косинусов в треугольнике AOM:

$$OM^2 = AM^2 + AO^2 - 2 \cdot AO \cdot AM \cdot \cos\angle CAM \Longleftrightarrow AO = \frac{42}{25}.$$

Тогда $CO = \frac{3}{7}AO = \frac{18}{25}$, а $AC = \frac{12}{5}$. Высоту трапеции CH можно найти из прямоугольного треугольника: $CH = AC\sin\angle CAD = \frac{24\sqrt{6}}{25}$. В силу подобия, высоты в треугольниках AOD и BOC равны, соответственно, $\frac{7}{10}CH = \frac{84\sqrt{6}}{125}$ и $\frac{3}{10}CH = \frac{36\sqrt{6}}{125}$. Тогда можно найти площадь трапеции и площади треугольников AOD и BOC:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(3+7)\frac{24\sqrt{6}}{25} = \frac{24\sqrt{6}}{5}, \quad S_{AOD} = \frac{7}{2}\cdot\frac{84\sqrt{6}}{125} = \frac{294\sqrt{6}}{125}, \quad S_{BOC} = \frac{3}{2}\cdot\frac{36\sqrt{6}}{125} = \frac{54\sqrt{6}}{125}.$$

Поскольку в любой трапеции площади треугольников AOB и COD равны, окончательно получаем

$$S_{COD} = \frac{1}{2}(S_{ABCD} - S_{AOD} - S_{BOC}) = \frac{126\sqrt{6}}{125}.$$

□

ОТВЕТ: $S_{COD} = \frac{126\sqrt{6}}{125}$.

5. Функция $f(t)$ с областью определения $D(f) = [1, +\infty)$ удовлетворяет уравнению $f\left(\frac{4^y - 4^{-y}}{2}\right) = y$ для любого $y \geq 0$. Для каждого значения $a \neq 0$ найти все решения неравенства $f\left(\frac{a}{x-2a}\right) \leq 1$.

РЕШЕНИЕ: Функция $g(y) = \frac{4^y + 4^{-y}}{2}$ монотонно возрастает при $y \geq 0$, принимая значения $[1; +\infty)$. По условию, функция f является обратной к g функцией, а значит также монотонно возрастает. Тогда

$$f\left(\frac{a}{x+2a}\right) \leq 1 \Longleftrightarrow \frac{a}{x+2a} \leq g(1)$$

при условии, что функция f определена, т.е. при условии $\frac{a}{x+2a} \geq 1$. Остается решить систему

$$\begin{cases} \frac{a}{x+2a} \leq \frac{17}{8}, \\ \frac{a}{x+2a} \geq 1. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{17x+26a}{x+2a} \geq 0, \\ \frac{x+a}{x+2a} \leq 0. \end{cases}$$

При $a > 0$ получим

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2a) \cup \left[-\frac{26a}{17}; +\infty\right), \\ x \in (-2a; -a], \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \left[-\frac{26a}{17}; -a\right].$$

При $a < 0$ получим

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{26a}{17}\right] \cup (-2a; +\infty), \\ x \in [-a; -2a), \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \left[-a; -\frac{26a}{17}\right].$$

Ответ: При $a > 0$: $x \in \left[-\frac{26a}{17}; -a\right]$. При $a < 0$: $x \in \left[-a; -\frac{26a}{17}\right]$.

6. В коробке у Маши лежит 25 новогодних шаров, которыми Маша начинает украшать елку. Каждый шар она сначала в течении 10 секунд выбирает в коробке, а затем в течении 15 секунд вешает на елку. Два ее младших брата Саша и Паша незаметно снимают шары с елки и прячут среди своих игрушек. Дождавшись момента, когда Маша начинает искать в коробке очередной шар, один из братьев (но не оба) может снять с елки один шар (на это ему требуется ровно 10 секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный шар, у Саши уходит 50 секунд, после чего он готов украсть с елки следующий шар, а Паша прячет шар за одну минуту и 50 секунд. Какое наименьшее число шаров может висеть на елке в тот момент, когда Маша повесит свой последний шар?

Решение: Назовем *циклом* последовательность двух действий — Маша выбирает шар в коробке и вешает его на елку. Продолжительность цикла 25 секунд. По условию, воровать шар каждый из братьев может только в начале цикла. Тогда у Саши на один шар уходит 3 цикла или 75 секунд, а у Паши — 5 циклов или 125 секунд. Воровать шары братья могут начать только со второго цикла. Тогда за оставшиеся 24 цикла Саша может украсть максимум 8 шаров, а Паша — максимум 5 шаров, так что на елке будет висеть минимум 12 шаров. Остается показать, что это возможно, предъявив последовательность действий. Пусть Саша ворует в циклы 2, 5, 9, 12, 15, 18, 21, 24, а Паша — в циклы 3, 8, 13, 19, 25. □

Ответ: 12.

7. Три велосипедиста одновременно начинают двигаться в одной плоскости по трем концентрическим окружностям с общим центром O и радиусами $R_1 = 20$м для первого, $R_2 = 40$м для второго и $R_3 = 80$м для третьего велосипедиста. В начальный момент времени велосипедисты находятся на одном луче с вершиной в точке O. Все велосипедисты двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями, причем скорость первого велосипедиста в два раза больше скорости второго, но в два раза меньше скорости третьего. Велосипедисты продолжают свое движение до тех пор, пока не закончит свой полный круг последний из них (тот, кто потратит на объезд своего круга больше всего времени). Сколько раз за это время они окажутся на одной прямой, не проходящей через центр O?

Решение: Выберем систему координат так, чтобы в начальный момент все велосипедисты находились на луче Ox. При движении точки по окружности радиуса R с такой начальной точкой длина пройденного пути равна $R\alpha$, где α — тригонометрический угол. Обозначим скорость второго велосипедиста через v — тогда скорость первого равна $2v$, а третьего — $4v$. Заметим, что координаты точки, лежащей на окружности с центром в начале координат радиуса R есть $x = R\cos\alpha$, $y = R\sin\alpha$, где α — тригонометрический угол. Тогда в момент времени t путь пройденный велосипедистом есть $vt = R\alpha$, а тогда координаты велосипедистов равны

$$\begin{cases} x_1 = 20\cos\left(\frac{2vt}{20}\right), \\ y_1 = 20\sin\left(\frac{2vt}{20}\right) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 40\cos\left(\frac{vt}{40}\right), \\ y_2 = 40\sin\left(\frac{vt}{40}\right) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = 80\cos\left(\frac{4vt}{80}\right), \\ y_3 = 80\sin\left(\frac{4vt}{80}\right) \end{cases}.$$

Три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)$. Обозначим $\varphi = \frac{vt}{40}$ и составим уравнение

$$(20\cos 4\varphi - 40\cos\varphi)(80\sin 2\varphi - 40\sin\varphi) = (20\sin 4\varphi - 40\sin\varphi)(80\cos 2\varphi - 40\cos\varphi).$$

Заметим, что последним полный круг сделает второй велосипедист, так что нам надо найти число решений этого уравнения на отрезке $\varphi \in [0, 2\pi]$. Учтем теперь то, что прямая не должна проходить через начало координат, т.е.

$$-40\cos\varphi(80\sin 2\varphi - 40\sin\varphi) \neq -40\sin\varphi(80\cos 2\varphi - 40\cos\varphi).$$

Раскроем скобки и получим $\sin 2\varphi \cos\varphi \neq \sin\varphi \cos 2\varphi$, т.е. $\sin\varphi \neq 0$. Вернемся к нашему уравнению. После преобразований получим $2\sin(2\varphi) + 4\sin\varphi - \sin(3\varphi) = 0$, откуда $4\sin\varphi\cos\varphi + 4\sin^3\varphi + \sin\varphi$, откуда $4\cos^2\varphi - 4\cos\varphi - 5 = 0$, откуда $\cos\varphi = \frac{1\pm\sqrt{6}}{2}$. На тригонометрическом круге получим два решения. □

ОТВЕТ: 2 РАЗА.

8. В пирамиде $FABC$ $AB = BC$, $FB = FK$, где K — середина отрезка AC, а тангенс угла между плоскостями FAB и ABC относится к тангенсу угла между плоскостями FBC и ABC как $1:3$. Плоскость π паралаллельна AB, делит ребро FC в отношении $1:4$, считая от вершины F, и проходит через основание O высоты FO пирамиды $FABC$. Найти отношение объемов многогранников, на которые делит эта плоскость пирамиду $FABC$.

ОТВЕТ: $5:11$ или $1:19$.

РЕШЕНИЕ: 1) Докажем, что основание высоты (точка O) лежит на средней линии $\triangle ABC$. Треугольники FOB и FOK равны (они прямоугольные, FO — общая, а $FB = FK$), тогда $BO = OK$. В плоскости основания ABC проведем прямую l, проходящую через точку O параллельно AC и обозначим $L = l \cap BK$, $M = l \cap AB$, $N = l \cap BC$. Так как $AB = BC$, то медиана $BK \perp AC$, а значит $OL \perp BK$. Тогда треугольники BOL и KOL равны (они прямоугольные с общей OL и равными $BO = OK$), тогда $BL = KL$, т.е. MN — средняя линия треугольника ABC.
2) Найдем отношение $OM : ON$. Из точки O проведем перпендикуляры OH_1 к стороне AB и OH_2 к стороне BC и обозначим $\angle FH_1O = \alpha$, $\angle FH_2O = \beta$. Плоскость FH_1O перпендикулярна и плоскости ABC и боковой грани FAB, т.е. α есть угол между плоскостями FAB и ABC. Аналогично, β есть угол между плоскостями FBC и ABC. Из треуголников FOH_1 и FOH_2 найдем $OH_1 = FO\cdot\operatorname{ctg}\alpha$, $OH_2 = FO\cdot\operatorname{ctg}\beta$. Из условия теперь следует, что $OH_1 : OH_2 = 3:1$. Треугольники OMH_1 и ONH_2 подобны (они прямоугольные и $\angle OMH_1 = \angle ONH_2$), а значит $OM : ON = 3:1$.
3) Первый случай. Предположим, что точка O лежит внутри треугольника ABC. В плоскости ABC проведем прямую m через точку O параллельно AB. По условию эта прямая лежит в секущей плоскости π. Обозначим $P = m \cap AC$, $Q = m \cap BC$. Из теоремы Фалеса $BQ = 3QN$. Поскольку MN — средняя линия, получим $CQ : CB = CP : CA = 5:8$. Обозначим точку пересечения плоскости pi и ребра FC через R — по условию $CR : CF = 4:5$. Итак, плоскость π пересекает ребра AC, BC и FC в точках P, Q и R, а значит

$$\frac{V_{CPQR}}{V_{CABF}} = \frac{CP\cdot CQ\cdot CR}{CA\cdot CB\cdot CF} = \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5} = \frac{5}{16}.$$

Тогда объемы многогранников $CPQR$ и $ABQPRF$ относятся как $5:11$.
4) Второй случай. Предположим, что точка O лежит вне треугольника ABC. Тогда $MN : NO = 2:1$. Аналогично получим $BN : NQ = 2:1$, а т.к. MN — средняя линия, $CQ : CB = CP : CA = 1:4$. Тогда $V_{CPQR} : V_{CABF} = 1:20$. Тогда объемы многогранников $CPQR$ и $ABQPRF$ относятся как $1:19$. □

ОТВЕТ: $5:11$ или $1:19$.

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ЛОМОНОСОВ–2013»

Заключительный этап по МАТЕМАТИКЕ

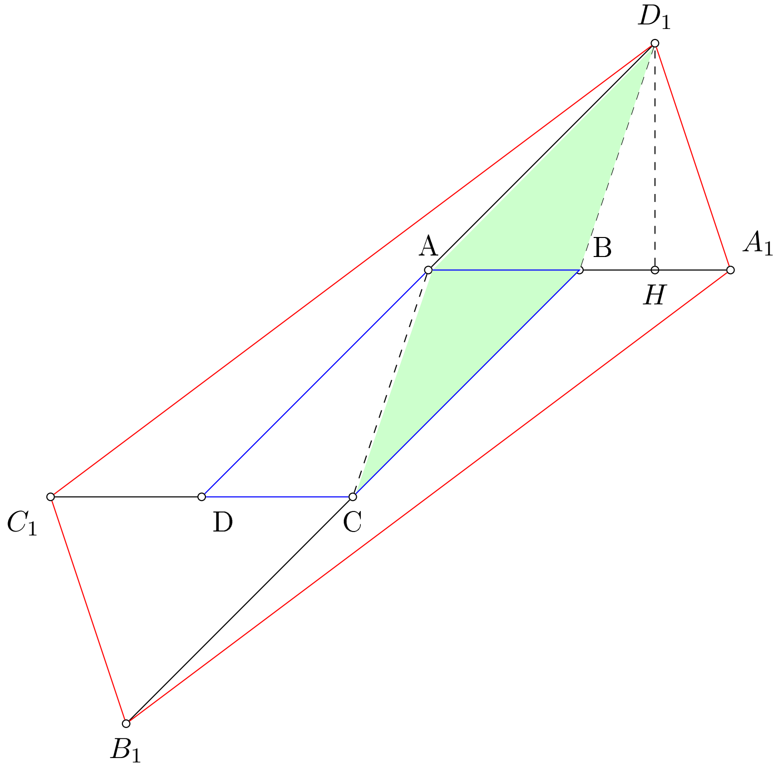
решения

9 класс

1. Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1, B_1, C_1 и D_1, такие, что точка A является серединой отрезка DD_1, точка B — серединой AA_1, точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1. Найдите площадь $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $S(ABCD) = 1$.

   Ответ:5

   Решение:



   Заметим, что треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle ABD_1$ равны, следовательно, равны их площади. Треугольники $\triangle ABD_1$ и $\triangle A_1BD_1$ имеют общуюю высоту D_1H и равные основания, следовательно, равновелики. Таким образом, $S(\triangle AA_1D_1) = 1$. Можно показать, что $S(\triangle BB_1A_1) = S(\triangle CC_1B_1) = S(\triangle DD_1C_1) = 1$. Складывая, получим $S(A_1B_1C_1D_1) = 5$.

2. а) Найдите количество натуральных делителей $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{40}$, не являющихся ни точными квадратами (т.е. квадратами натуральных чисел), ни точными кубами. b) ... не представимых в виде m^n, где m и n — натуральные числа, причем $n > 1$. .

   Ответ:а) 1093; б) 981.

   Решение:Обозначим через K_n количество делителей, являющихся точными n-ми степенями а)$N = 2^{40} \cdot 5^{40}$, делители N имеют вид $2^m \cdot 5^n$, где $0 \leqslant m, n \leqslant 40$. Всего получается $41 \times 41 = 1681$ делителей. Из них полными квадратами будут те, в которых m и n — четные, таких будет $21 \times 21 = 441$, следовательно 1240 делителей не будут точными квадратами.

Заметим, что среди точных кубов будут и числа, являющиеся еще и точными квадратами. Это числа, являющиеся точными 6 степенями. Их количество считаем аналогично тому, как считали количество точных квадратов. А делителей, не являющихся ни точными квадратами, ни точными кубами будет 1240 - $K_3 + K_6$.

б) аналогично пункту а)

3. Решить систему $\begin{cases} x^2 = 2\sqrt{y^2+1}; \\ y^2 = 2\sqrt{z^2-1} - 2; \\ z^2 = 4\sqrt{x^2+2} - 6. \end{cases}$

   Ответ:$(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$.

   Решение:Введем обозначения $a = \sqrt{x^2+2}$, $b = \sqrt{y^2+1}$, $c = \sqrt{z^2-1}$. Получится система: $\begin{cases} a^2 - 2 = 2b \\ b^2 - 1 = 2c - 2 \\ c^2 + 1 = 4a - 6 \end{cases}$

   Сложим все уравнения и перенесем в левую часть: $a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 2b - 2c + 6 = 0$. Выделяя полные квадарты, получим $(a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 0$, откуда $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$. Делаем обратную замену, получим $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 0$, $z = \pm\sqrt{2}$.

4. Коля сел играть в WoW в момент, когда часовая и минутная стрелки были противоположны. Он закончил играть через целое число минут, причем, в момент окончания минутная стрелка совпала с часовой. Сколько времени он играл (если известно, что он играл меньше 12 часов)?

   Решение:Минутная стрелка догоняет часовую со скоростью $\frac{11}{2}^\circ$/мин. Чтобы они совпали разность углов поворота должна быть $180 + 360k$. Эта величична кратна 11 при $k = 5, 16, \ldots$. По смыслу задачи подходит только $k = 5$, что дает нам 6 часов.

5. Найдите все пары натуральных чисел (m, n), для которых выполняется равенство

   $$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = m \cdot (m-1).$$

   Ответ:$(1, 1)$, $(2, 1)$; $(3, 1)$.

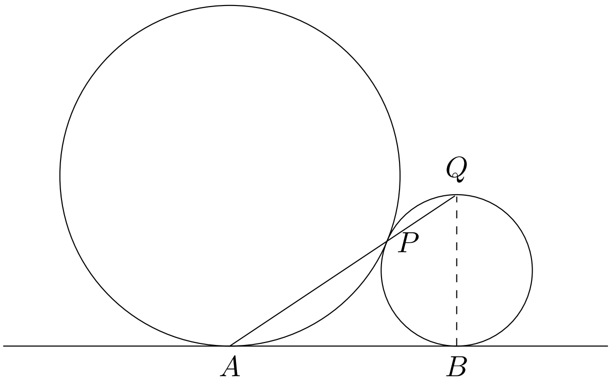
   Решение:Перепишем равенство в виде

   $$(n^2 - 3n) \cdot (n^2 - 3n + 2) = m^2 - m$$

   и обозначим $N = n^2 - 3n + 1$, тогда, выделяя полные квадраты $N^2 - 1 = (m - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$. Домножая на 4, получая $(2N)^2 - (2m-1)^2 = 3$. Число $2N$ — целое и четное, $2m - 1$ — целое и нечетное. Следовательно, $2N = \pm 2$, $2m - 1 = \pm 1$. Из первого равенства получим $n = 0, 1, 2, 3$, из второго $m = 0, 1$. Поскольку в задаче спрашиваются только натуральные решения, то $n = 1, 2, 3$ и $m = 1$.

   Указанное равенство возможно только тогда , когда его левая и правая части равны нулю.

6. Две окружности радиусов R и R' касаются друг друга внешним образом в точке P и касаются прямой l в точках A и B, соответственно. Пусть Q — точка пересечения прямой BP с первой окружностью. Определить, на каком расстоянии от прямой l расположена точка Q.



Ответ:$2R$, т.е. эта точка диаметрально противоположна точке A.

Решение:Проведя общую касательную в точке P, заметим, что в треугольнике APB угол APB равен сумме двух других углов. Значит, он прямоугольный, а точка Q – диаметрально противоположна точке A.

7. Доказать, что если числа x, y и z — целые, то число $\frac{1}{2}\left((x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4\right)$ является квадратом некоторого целого числа.

Решение:Обозначим $a=x-y$, $b=y-z$, $c=z-x$. Тогда $\sigma_1=a+b+c=0$. Обозначим $ab+ac+bc=\sigma_2$, $abc=\sigma_3$ и выразим через них: $\frac{1}{2}\left(a^4+b^4+c^4\right)=\sigma_2^2$.

8. Сколькими различными способами можно выбрать целые числа $a, b, c \in [1,100]$, так, чтобы точки с координатами $A(-1,a)$, $B(0,b)$ и $C(1,c)$ образовывали прямоугольный треугольник?

Ответ:974

Решение:$AB^2=1+(b-a)^2$, $BC^2=1+(c-b)^2$, $AC^2=4+(c-a)^2$.

Если треуогльник ABC прямоугольный с гипотенузой AC, то по т.Пифагора

$AC^2=AB^2+BC^2$, $1+(b-a)^2+1+(b-c)^2=4+(a-c)^2$, что приводится к виду $(b-a)(b-c)=1$. Так как оба множителя – целые числа, имеем только такие случаи: $b=a+1=c+1$ и $b=a-1=c-1$, для каждого из которых есть 99 троек (a,b,c), т.е. 198 способов.

Если гипотенузой является сторона AB, то аналогично получаем соотношение $(c-a)(c-b)=-2$, что возможно только в следующих случаях:

$c=a+1=b-2$,

$c=a-1=b+2$,

$c=a+2=b-1$,

$c=a-2=b+1$,

для каждого из которых есть 97 троек (a,b,c), т.е. всего $97\cdot 4=388$ способов.

Если гипотенузой является сторона BC, то получаем соотношение $(a-b)(a-c)=-2$. Аналогично предыдущему, находим 388 способов.

Всего получаем 198+388+388=974 способов.

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ЛОМОНОСОВ–2013»

Заключительный этап по МАТЕМАТИКЕ

решения

8 класс

1. Решите ребус (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным - разные)

   $$\mathrm{MSU} + \mathrm{MSU} + \mathrm{MSU} + \mathrm{MSU} + \mathrm{OLYMP} + \mathrm{OLYMP} = \mathrm{MOSCOW}$$

   Ответ:$C = 5$, $L = 7$, $M = 1$, $O = 9$, $P = 2$, $S = 4$, $U = 3$, $W = 6$, $Y = 0$, $143 + 143 + 143 + 143 + 97012 + 97012 = 194596$.

   Решение:

2. а) Найдите количество натуральных делителей $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{999}$, не являющихся точными квадратами (т.е. квадратами натуральных чисел). b) ... не являющихся ни точными квадратами, ни точными кубами.

   Ответ:а) 750000; б) 666333 .

   Решение:$N = 2^{999} \cdot 5^{999}$, делители N имеют вид $2^m \cdot 5^n$, где $0 \leqslant m, n \leqslant 999$. Всего получается $1000 \times 1000 = 1000000$ делителей. Из них полными квадратами будут те, в которых m и n — четные, таких будет $500 \times 500 = 250000$, следовательно 750000 делителей не будут точными квадратами.

   б) Заметим, что среди точных кубов будут и числа, являющиеся еще и точными квадратами. Это в точности числа, являющиеся точными 6 степенями. Их количество считаем аналогично пункту а).

3. Блоха прыгает по числовой прямой, причем длина каждого прыжка не может быть меньше n. Она начинает свое движение из начала координат и хочет побывать во всех целых точках, принадлежащих отрезку $[0, 2013]$ (и только в них!) ровно по одному разу. При каком наибольшем значении n это у нее получится?

   Ответ:$n = 1006$.

   Решение:При $n = 1006$ можно построить путь

   $$0 \to 1007 \to 1 \to 1008 \to \ldots \to 1005 \to 2012 \to 1006 \to 2013.$$

   Докажем, что n не может быть больше 1006. Действительно, допустим $n \geqslant 1007$. Тогда в точку с координатой 1007 можно попасть только из начала отрезка (точки 0). Но если блоха прыгнет оттуда в точку 1007, то обратно прыгнуть она уже не может, следовательно, должна закончить свой путь в этой точке и не побывает в других точках отрезка.

4. Решить систему $\begin{cases} x^2 - 2y + 1 = 0; \\ y^2 - 4z + 7 = 0 \\ z^2 + 2x - 2 = 0. \end{cases}$

Ответ:$x = -1$, $y = 1$, $z = 2$.

Решение:Сложив все три уравнения, получим $x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 - 4z + 6 = 0$. Выделяя полные квадраты, получим $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 0$, откуда $x = -1$, $y = 1$, $z = 2$. Проверка показывает, что указанные значения являются решением системы.

5. Найдите количество 9–значных чисел, в которых каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно 1 раз, цифры 1,2,3,4,5 расположены в порядке возрастания, а цифра 6 стоит раньше цифры 1 (например 916238457).

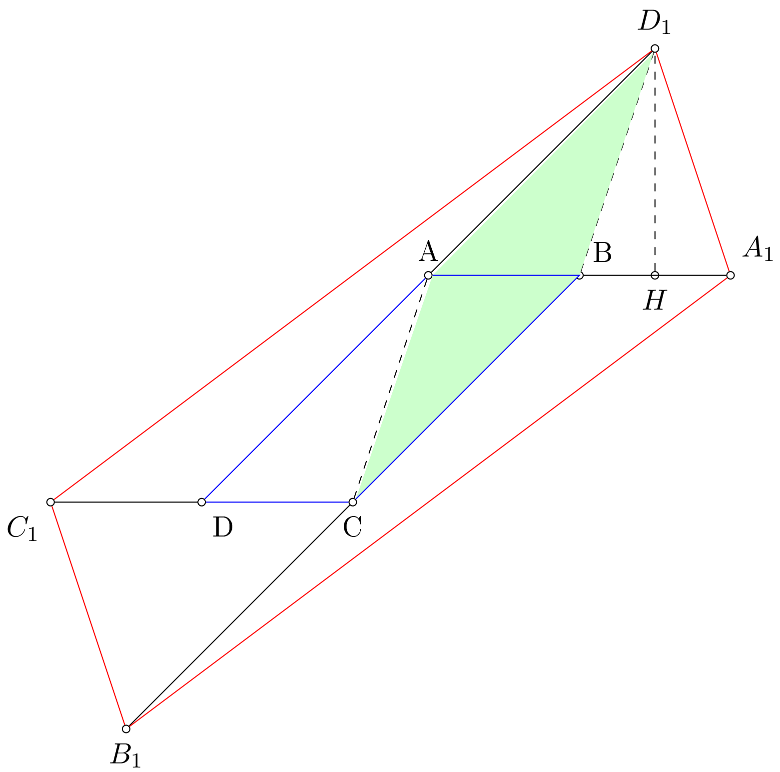
Ответ:504

Решение:Заметим, что после расстановки цифр 7,8,9, остальные цифры ставятся однозначно. Поэтому количество таких чисел равно $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

6. Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1, B_1, C_1 и D_1, такие, что точка A является серединой отрезка DD_1, точка B — серединой AA_1, точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1. а) Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ — тоже параллелограмм. б) Найдите его площадь, если известно, что $S(ABCD) = 1$.

Ответ:б)5

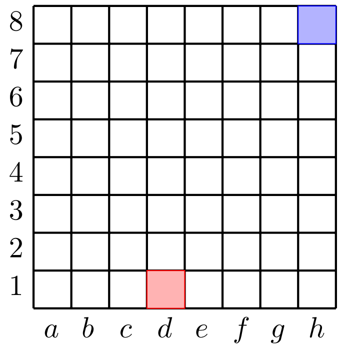
Решение:



а) Из свойств параллелограмма следует, что $AB = CD$, $\angle BAD_1 = 180° - \angle BAD = 180° - \angle BCD = \angle DCB_1$, $AD_1 = AD = BC = CB_1$. Следовательно, треугольники $\triangle ABD_1$ и $\triangle CBD_1$ равны. Поскольку $CC_1 = 2CD = 2AB = AA_1$, то равны треугольники $\triangle CC_1B_1$ и $\triangle AA_1D_1$. Следовательно $A_1D_1 = B_1C_1$, аналогично доказывается, что $A_1B_1 = C_1D_1$. Если противоположные стороны 4–угольника равны, то это — параллелограмм.

б) Заметим, что треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle ABD_1$ равны, следовательно, равны их площади. Треугольники $\triangle ABD_1$ и $\triangle A_1BD_1$ имеют общуюю высоту D_1H и равные основания, следовательно, равновелики. Таким образом, $S(\triangle AA_1D_1) = 1$. Можно показать, что $S(\triangle BB_1A_1) = S(\triangle CC_1B_1) = S(\triangle DD_1C_1) = 1$. Складывая, получим $S(A_1B_1C_1D_1) = 5$.

7. Сколькими различными способами шахматный ферзь может пройти с поля $d1$ на поле $h8$, если ему разрешается ходить только вправо, вверх или по диагонали вправо–вверх на любое число клеток?



Ответ:39625

Решение:Последовательно (начиная с d1) найдем количество способов, которым можно пройти в каждую клетку. В d1 ставим 1, а каждое следующее число получается суммированием чисел, стоящих по столбцу снизу, по строке слева и по диагонали слева–снизу. Тогда в h8 будет стоять число 39625.

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ЛОМОНОСОВ–2013»

Заключительный этап по МАТЕМАТИКЕ

решения

7 класс

1. Моторная лодка идет 1 час по течению из Верхних Васюков в Нижние Васюки, а возвращается против течения за два часа. Вовочка из Верхних Васюков пустил по речке бумажный кораблик. Через какое время кораблик приплывет в Нижние Васюки?

   Ответ:4 часа.

   Решение:Обозначим S — расстояние между Верхними и Нижними Васюками. Тогда скорость лодки по течению равна S, а против $S/2$. Тогда скорость течения равна $S/4$, следовательно кораблик приплывет через 4 часа.

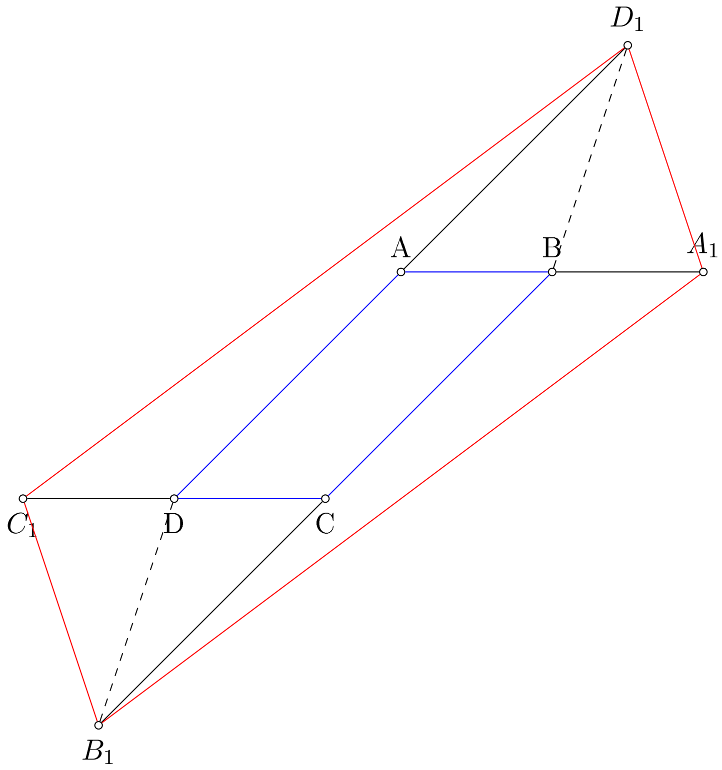
2. a) Сколько натуральных делителей имеет число $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{99}$? b) Найдите количество натуральных делителей N, не являющихся точными квадратами (т.е. квадратами натуральных чисел).

   Ответ:а) 10000; б) 7500.

   Решение:$N = 2^{99} \cdot 5^{99}$, делители N имеют вид $2^m \cdot 5^n$, где $0 \leqslant m, n \leqslant 99$. Всего получается $100 \times 100 = 10000$ делителей. Из них полными квадратами будут те, в которых m и n — четные, таких будет $50 \times 50 = 2500$, следовательно 7500 делителей не будут точными квадратами.

3. Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1, B_1, C_1 и D_1, такие, что точка A является серединой отрезка DD_1, точка B — серединой AA_1, точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1. Докажите, что 4–угольник $A_1B_1C_1D_1$ является параллелограммом.

   Решение:Из свойств параллелограмма следует, что $AB = CD$, $\angle BAD_1 = 180° - \angle BAD = 180° - \angle BCD = \angle DCB_1$, $AD_1 = AD = BC = CB_1$. Следовательно, треугольники $\triangle ABD_1$ и $\triangle CBD_1$ равны. Поскольку $CC_1 = 2CD = 2AB = AA_1$, то равны треугольники $\triangle CC_1B_1$ и $\triangle AA_1D_1$. Следовательно $A_1D_1 = B_1C_1$, аналогично доказывается, что $A_1B_1 = C_1D_1$. Если противоположные стороны 4–угольника равны, то это — параллелограмм.



4. Блоха прыгает по числовой прямой, причем длина каждого прыжка не может быть меньше n. Она начинает свое движение из начала координат и хочет побывать во всех целых точках, принадлежащих отрезку $[0, 2013]$ (и только в них!) ровно по одному разу. При каком наибольшем значении n это у нее получится?

   Ответ:$n = 1006$.

   Решение:При $n = 1006$ можно построить путь

   $$0 \to 1007 \to 1 \to 1008 \to \ldots \to 1005 \to 2012 \to 1006 \to 2013.$$

   Докажем, что n не может быть больше 1006. Действительно, допустим $n \geqslant 1007$. Тогда в точку с координатой 1007 можно попасть только из начала отрезка (точки 0). Но если блоха прыгнет оттуда в точку 1007, то обратно прыгнуть она уже не может, следовательно, должна закончить свой путь в этой точке и не побывает в других точках отрезка.

5. Решите ребус (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным - разные)

   $$\text{MSU} + \text{MSU} + \text{MSU} + \text{MSU} + \text{OLYMP} + \text{OLYMP} = \text{MOSCOW}$$

   Ответ:$C = 5$, $L = 7$, $M = 1$, $O = 9$, $P = 2$, $S = 4$, $U = 3$, $W = 6$, $Y = 0$, $143 + 143 + 143 + 143 + 97012 + 97012 = 194596$.

   Решение:Заметим, что поскольку $MSU \leq 987$, $OLYMP \leq 98765$, то

   $$MSU + MSU + MSU + MSU + OLYMP + OLYMP \leq 987 \times 4 + 98765 \times 4 = 201478.$$

   Таким образом M может быть равно только 1 или 2. $M = 2$ не подходит, т.к. в этом случае

   $$MSU + MSU + MSU + MSU + OLYMP + OLYMP \leq 298 \times 4 + 98765 \times 4 = 198722.$$

Следовательно $M = 1$. Заметим, что при сложении O и O получается $1O$, при этом из предыдущих разрядов переносится не более 2. Следовательно O может быть только 8 или 9. Предположим $O = 8$, тогда

$$MSU + MSU + MSU + MSU + OLYMP + OLYMP \leq 198 \times 4 + 89716 \times 4 = 180314.$$

Но тогда S должно быть равно 0, следовательно,

$$MSU + MSU + MSU + MSU + OLYMP + OLYMP \leq 109 \times 4 + 89716 \times 4 = 179868,$$

что приводит к противоречию. Итак, $O = 9$.

6. Сколькими различными способами шахматный король может пройти с поля $e1$ на поле $h5$, если ему разрешается ходить только на одну клетку вправо, вверх или по диагонали вправо–вверх?

   Ответ:129 способов.

   Решение:Последовательно (начиная с e1) найдем количество способов, которым можно пройти в каждую клетку. Каждое число (кроме 1) получается суммированием соседей снизу, слева и слева–снизу.

8								
7								
6								
5					1	9	41	129
4					1	7	25	63
3					1	5	13	25
2					1	3	5	7
1					1	1	1	1
	a	b	c	d	e	f	g	h

2012/2013 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[1]

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ»

по МАТЕМАТИКЕ

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **85** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **50** баллов до **84** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **80** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **65** баллов до **79** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **50** баллов до **64** баллов включительно.*

---

[1] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по математике.*