ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2013/2014 учебный год

МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5-9 КЛАССОВ

Задание 1.

Глубина промерзания грунтов рассчитывается исходя из соотношения $h = \frac{C}{\sqrt{w}}$, где w – степень влажности грунта, C – постоянная. Для Московского региона в 2012 г. степень влажности грунта была равна 0.4. В 2013 г. глубина промерзания уменьшилась в 1.2 раза по сравнению с 2012 г. Чему была равна степень влажности грунта в 2013 г.?

Решение:

В 2012 г. глубина промерзания $h = \frac{C}{\sqrt{0.4}}$ а в 2013 г. она составляла

$$\frac{C}{\sqrt{w}} = \frac{5}{6}\frac{C}{\sqrt{0.4}} \Rightarrow \sqrt{w} = \frac{6}{5}\sqrt{0.4} \Leftrightarrow w = {}^{36}\!/_{25} \cdot 0.4 = \frac{144}{250} = \frac{72}{125} = 0.576$$

Ответ: 0.576

Задание 2.

Во время гидрологических исследований, проводимых со льда вдали от берега озера, в прорубь соскользнул плотно закрытый прямоугольный ящик с запасным оборудованием и упал на каменистое дно. Масса ящика вместе с его содержимым равна 150 кг, его размеры $30 \times 40 \times 60$ см^3. Сколько шариков, надутых воздухом, нужно погрузить в воду и привязать к ящику, чтобы оторвать его от дна озера? Объем каждого шарика под водой равен 10 л. Плотность воды ρ = 1000 кг/м^3. Массой шариков пренебречь.

Решение: Ящик оторвется от дна, когда сила Архимеда, приложенная к ящику и воздушным шарикам, уравновесит силу тяжести, действующую на ящик:

$F_{\text{Арх}} = mg$. В нашем случае $F_{\text{Арх}} = \rho g V_{общий} = \rho g \left(V_{ящика} + kV_{шарика}\right)$, где k – число шариков.

Из этих двух формул получаем: $m = \rho\left(V_{ящика} + kV_{шарика}\right)$, откуда

$$k = \frac{1}{V_{шарика}}\left(\frac{m}{\rho} - V_{ящика}\right) = \frac{1}{0{,}01}\left(\frac{150}{1000} - 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6\right) = 7{,}8.$$

Число шариков должно быть целым, при этом ящик должен оторваться от дна. Поэтому округляем результат в бóльшую сторону до целого значения: k = 8.

Ответ: 8 шариков.

Задание 3.

При изучении морфологии песчаных зерен под микроскопом обнаружено зерно, имеющее форму прямоугольного треугольника с острым углом 30^0. Найдите коэффициент сферичности R этого зерна исходя из формулы $R = \sqrt{\frac{d}{D}}$, где d – диаметр вписанной окружности, а D – диаметр описанной окружности для указанного изображения зерна.

Решение: Для прямоугольного треугольника диаметр описанной окружности равен c – величине гипотенузы. Катеты треугольника равны $\frac{c}{2}$ и $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Радиус вписанной окружности r найдем из равенства $pr = S$, где S – площадь треугольника, p - полупериметр, $p = \frac{c}{2}(3+\sqrt{3})$, $S = \frac{c}{2} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$, откуда $r = \frac{c(3\sqrt{3}-3)}{12}$. $d = \frac{c(\sqrt{3}-1)}{2}$.

Следовательно $\frac{d}{D} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$ =0,6

Задание 4.

Во многих задачах Землю можно с высокой степенью точности считать шаром радиусом R, в котором плотность вещества ρ распределена сферически симметрично, т.е. зависит только от расстояния r от центра шара O: ρ = ρ(r). В теории тяготения И.Ньютона доказывается, что

1) сила тяжести, действующая на тело малых размеров, помещенное в любую точку такого шара на расстоянии r < R от его центра, создается только той частью шара, которая заключена в пределах сферы радиуса r с центром в точке O,

2) при вычислении силы тяжести, действующей на это тело, указанную часть шара можно заменить материальной точкой такой же массы, помещенной в центре шара.

В фантастическом романе геологам удалось пробурить скважину в радиальном направлении к центру Земли практически до самого земного ядра — глубина шахты оказалась равной h = 3000 км. Измерения ускорения свободного падения на дне шахты дали значение g = 8,6 м/с^2. Оценить среднюю плотность ρ земного ядра. Объем шара радиусом r равен $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Радиус Земли принять равным 6400 км.

Решение: Вычислим силу тяжести, действующую на тело массой m на дне скважины, пользуясь положениями теории тяготения Ньютона: $mg = \frac{GMm}{(R-h)^2}$, где

$M = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi(R-h)^3$. Отсюда $g = \frac{G}{(R-h)^2} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi(R-h)^3 = \frac{4}{3}\pi\rho G(R-h)$. Следовательно,

$\rho = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{g}{G(R-h)} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{8,6}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 3,4 \cdot 10^6} \approx 9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: 9000 кг/м^3

Задание 5.

Для расчета высоты положения изучаемых природных геологических объектов применяется метод барометрического нивелирования, который основан на том, что разница в атмосферном давлении в 1 мм ртутного столба (р.с.) соответствует в высотном положении разнице в 11 м. В двух точках, расположенных на высоте 375 и 80.2 м над уровнем моря, были произведены замеры атмосферного давления: в первой точке в 8 часов, во второй - в 13 часов 30 минут того же дня. В первой точке давление показало 755.8 мм р.с., во второй – 730.1 мм р.с. Считая, что с 8 часов до 13 часов 30 мин. атмосферное давление возрастало равномерно, определите, на сколько мм р.с. оно возрастало за один час.

Решение: Перепад высот в точках равен 375-80.2=294.8 м, что соответствует разности в давлении, равной 294.8 (м):11(м/мм р.с.)=26.8 мм р.с. Поэтому в 8 часов давление во второй точке было равно 755.8-26.8=729 мм р.с. Давление во второй точке в 13 час. 30 мин. равно 730.1 мм р.с., что на 1.1 мм р.с. выше. Таким образом, за 5.5 часа давление во второй точке увеличилось на 1.1 мм р.с., за час оно возрастало на 0.2 мм р.с.

Ответ: на 0.2 мм р.с.

Задание 6.

Из шахты, наполовину затопленной водой, откачивают воду с помощью электронасоса. Какое количество электроэнергии (в джоулях) потребуется для того, чтобы полностью откачать воду из шахты, если насос откачивает за 1 мин 1500 литров воды, шланг насоса имеет площадь поперечного сечения S_1 = 20 см^2, а коэффициент полезного действия насоса составляет η = 20 %? Считать, что пространство шахты имеет вид вертикального цилиндра с площадью поперечного сечения S_2 = 6 м^2 высотой h = 40 м. Плотность воды ρ = 1000 кг/м^3.

Решение: При подъеме массы m воды из шахты на поверхность земли происходит увеличение потенциальной энергии воды $\Delta E_{потенц} = mgH$. Кроме того, вода движется по шлангу насоса с конечной скоростью υ, т.к. за время τ = 1 мин через поперечное сечение S_1 шланга насоса проходит объем V_0 = 1,5 м^3 воды. Поэтому вода приобретает кинетическую энергию $\Delta E_{кин} = \frac{mv^2}{2}$. Работа насоса ηW, где W – затраченная электроэнергия, равна изменению механической энергии откачанной воды: $\eta W = mgH + \frac{mv^2}{2}$. Отсюда $W = \frac{m}{\eta}\left(gH + \frac{v^2}{2}\right)$. В нашем случае

$$m = \rho\frac{h}{2}S_2 = 1000\cdot\frac{40}{2}\cdot 6 = 120000\,\text{кг},$$

$H = \frac{3}{4}h =$ 30 м, т.к. первоначально центр тяжести воды был в центре нижней половины цилиндра, а в конце оказался на поверхности земли,

$$v = \frac{V_0}{S_1\tau} = \frac{1{,}5}{0{,}002\cdot 60} = 12{,}5\,\text{м/с},$$

поэтому $W = \frac{\rho h S_2}{2\eta}\left[\frac{3}{4}gh + \frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{S_1\tau}\right)^2\right]$.

Подставляя в эту формулу числовые данные и считая, что $g = 10$ м/с^2, получим $W = \frac{120000}{0{,}2}\left[30\cdot 10 + \frac{1}{2}(12{,}5)^2\right] \approx 227$ МДж. При g = 9,8 м/с^2 получим $W \approx 223$ МДж.

Ответ: 223 МДж (если считать g = 9,8 м/с^2), 227 МДж (если считать g = 10 м/с^2).

ЗАДАНИЯ ПЕРВОГО ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задание 1.

1.1. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 200 м и третье боковое ребро равно 250 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.1. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной a. Боковые ребра SB=SC=b, SA=x. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через d. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через h, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно d:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Подставляя значения a=100, b=200, x=250, получим

Ответ: 2.4·10^5(куб. м.)

1.2. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 300 м и третье боковое ребро равно 350 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.2. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной *a*. Боковые ребра SB=SC=*b*, SA=*x*. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через *d*. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через *h*, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно *d*:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Подставляя значения a=100, b=300, x=350, получим

Ответ: $3.6 \cdot 10^5$ (куб. м.)

1.3. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 400 м и третье боковое ребро равно 450 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.3. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной *a*. Боковые ребра SB=SC=*b*, SA=*x*. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через *d*. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через *h*, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно *d*:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Подставляя значения a=100, b=400, x=450, получим

Ответ: 4.8·10^5 (куб. м.)

1.4. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 500 м и третье боковое ребро равно 550 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.4. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной *a*. Боковые ребра SB=SC=*b*, SA=*x*. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через *d*. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через *h*, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно *d*:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Подставляя значения a=100, b=500, x=550, получим
Ответ: $6\cdot10^5$ (куб. м.)

1.5. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 600 м и третье боковое ребро равно 650 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.5. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной *a*. Боковые ребра SB=SC=*b*, SA=*x*. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC.

Обозначим разность AO-AD через *d*. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через *h*, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2.$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2.$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно *d*:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}}.$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}}.$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}}.$$

Подставляя значения a=100, b=600, x=650, получим
Ответ: 7.2·10^5 (куб. м.)

1.6. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 700 м и третье боковое ребро равно 750 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.6. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной *a*. Боковые ребра SB=SC=*b*, SA=*x*. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через *d*. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через h, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно d:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Подставляя значения a=100, b=700, x=750, получим
Ответ: $8.4\cdot 10^5$ (куб. м.)

1.7. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 800 м и третье боковое ребро равно 850 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.7. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной a. Боковые ребра SB=SC=b, SA=x. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через d. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через h, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно *d*:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Подставляя значения a=100, b=800, x=850, получим

Ответ: $9.5 \cdot 10^5$ (куб. м.)

1.8. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 900 м и третье боковое ребро равно 950 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.8. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной *a*. Боковые ребра SB=SC=*b*, SA=*x*. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через *d*. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через *h*, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно d:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Подставляя значения a=100, b=900, x=950, получим

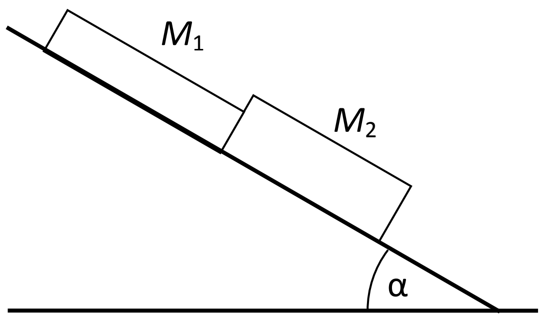
Ответ: $10.7 \cdot 10^5$ (куб. м.)

Задание 2.

Задача 2.1

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.

Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол $\alpha=30^o$ с горизонтом (см. рис.). Найти ускорение, с которым движутся плиты, если отношение их масс составляет $M_1/M_2 = 0,5$, а коэффициент трения между плитой массой M_2 и основанием равен $\mu = 0,1$. Трением между плитой массой M_1 и основанием, а также трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.

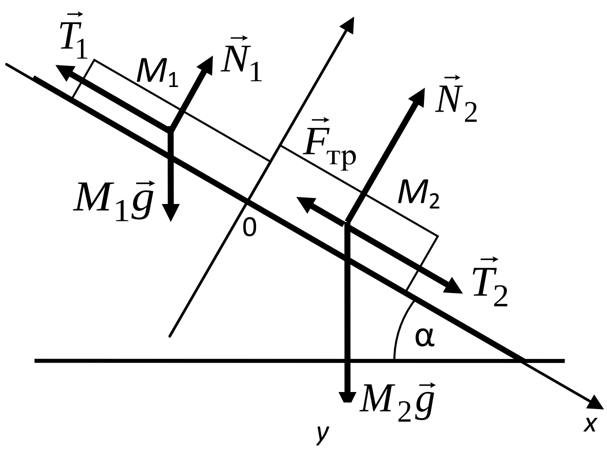


Решение

Задача 2.1.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$
$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на плиту с массой M_2, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T, \qquad (1)$$
$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}}, \qquad (2)$$
$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$
$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения полученной системы следует, что

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, сила трения, действующая на вторую плиту со стороны наклонной плоскости, равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\alpha$, так что, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu M_2 g \cos\alpha.$$

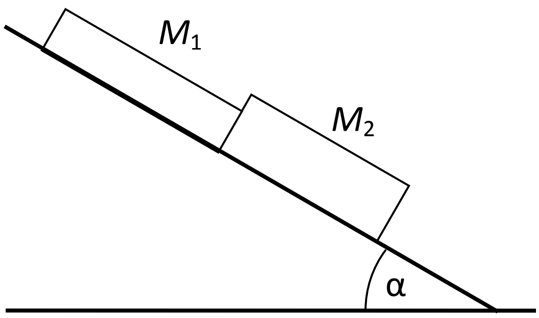
Отсюда

$$a = g\sin\alpha - \frac{\mu g \cos\alpha}{\left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)} \approx 4{,}3\,\text{м/с}^2.$$

Ответ: $a \approx 4{,}3$ м/с^2.

Задача 2.2

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.



Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол $\alpha=30^\circ$ с горизонтом (см. рис.). Найти ускорение, с которым движутся плиты, если отношение их масс составляет $M_1/M_2=0{,}4$, а коэффициент трения между плитой массой M_2 и основанием равен $\mu= 0{,}2$. Трением между плитой массой M_1 и основанием, а также трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.

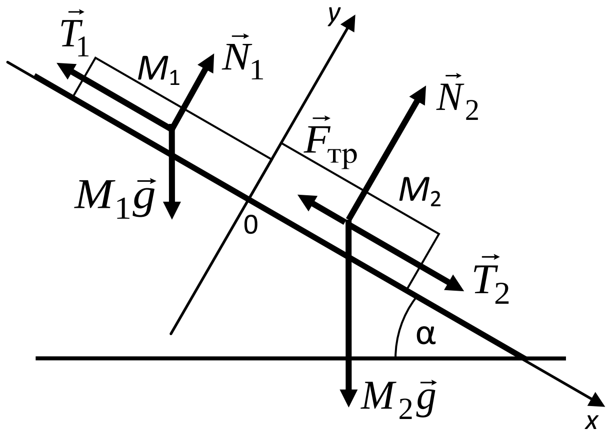
Решение

Задача 2.2.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на плиту с массой M_2, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T, \quad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}}, \quad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \quad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \quad (4)$$

Из последнего уравнения полученной системы следует, что

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, сила трения, действующая на вторую плиту со стороны наклонной плоскости, равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\alpha$, так что, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu M_2 g \cos\alpha.$$

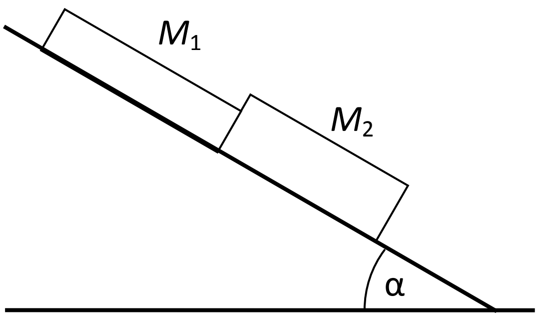
Отсюда

$$a = g\sin\alpha - \frac{\mu g \cos\alpha}{\left(1 + \dfrac{M_1}{M_2}\right)} \approx 3{,}7 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a \approx 3{,}7$ м/с^2.

Задача 2.3

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.



Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают с ускорением a = 4 м/с^2 вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол $\alpha = 30^{\circ}$ с горизонтом (см. рис.). Найти отношение масс двух плит M_1/M_2, если коэффициент трения между плитой массой M_2 и основанием равен $\mu = 0{,}17$. Трением между плитой массой M_1 и основанием, а также трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.

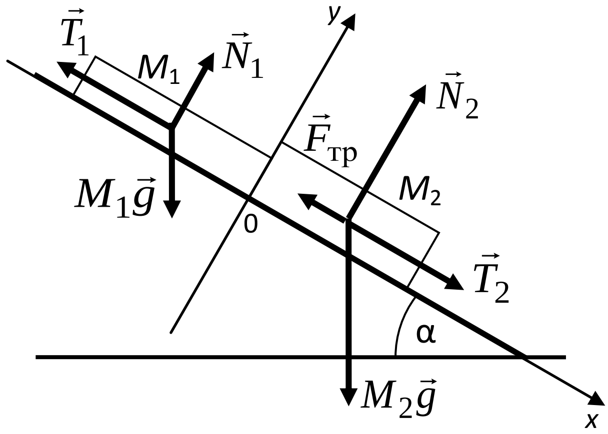
Решение

Задача 2.3.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на плиту с массой M_2, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения полученной системы следует, что

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, сила трения, действующая на вторую плиту со стороны наклонной плоскости, равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\alpha$, так что, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu M_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$\frac{M_1 + M_2}{M_2} = \frac{\mu g \cos\alpha}{g \sin\alpha - a}$$

и, окончательно,

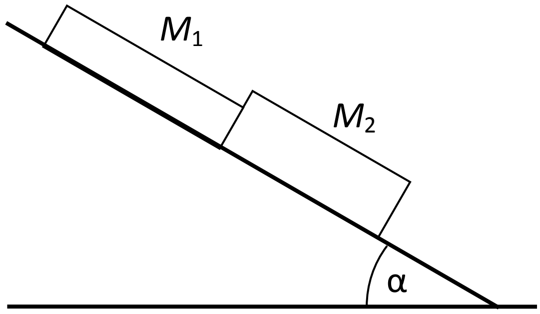
$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\mu g \cos\alpha}{g \sin\alpha - a} - 1 \approx 0{,}6.$$

Ответ: $\dfrac{M_1}{M_2} \approx 0{,}6.$

Задача 2.4

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.

Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают с ускорением a= 4,5 м/с^2 вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол α = 30^o с горизонтом (см. рис.). Найти отношение масс двух плит M_1/M_2, если коэффициент трения между плитой массой M_2 и основанием равен μ = 0,1. Трением между плитой массой M_1 и основанием, а также трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.



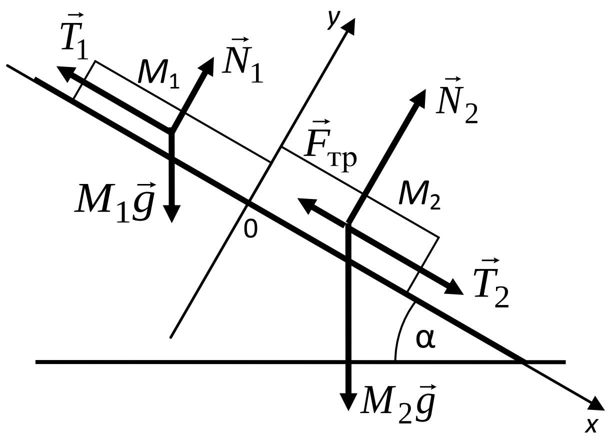
Решение

Задача 2.4.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на плиту с массой M_2, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения полученной системы следует, что

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, сила трения, действующая на вторую плиту со стороны наклонной плоскости, равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\alpha$, так что, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu M_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$\frac{M_1 + M_2}{M_2} = \frac{\mu g \cos\alpha}{g \sin\alpha - a}$$

и, окончательно,

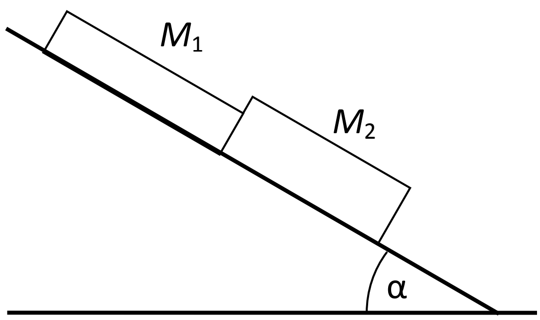
$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\mu g \cos\alpha}{g\sin\alpha - a} - 1 \approx 1{,}1.$$

Ответ: $\frac{M_1}{M_2} \approx 1{,}1.$

Задача 2.5

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.

Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают с ускорением a = 4 м/с^2 вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол $\alpha = 30^{\circ}$ с горизонтом (см. рис.). Найти коэффициент трения μ между плитой массой M_2 и основанием, если отношение масс плит M_1/M_2=0,5. Трением между плитой массой M_1 и основанием, а также трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.



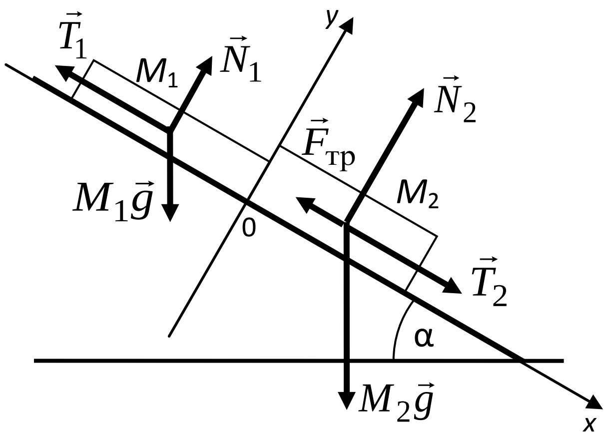
Решение

Задача 2.5.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на плиту с массой M_2, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения полученной системы следует, что

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, сила трения, действующая на вторую плиту со стороны наклонной плоскости, равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\alpha$, так что, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu M_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$\mu M_2 g \cos\alpha = (M_1 + M_2)\cdot(g \sin\alpha - a)$$

и, окончательно,

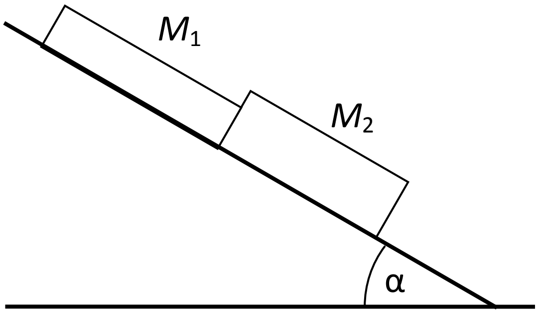
$$\mu = \left(\frac{M_1}{M_2} + 1\right)\cdot\frac{g \sin\alpha - a}{g \cos\alpha} \approx 0{,}16.$$

Ответ: $\mu \approx 0{,}16$.

Задача 2.6

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.

Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают с ускорением a = 4,5 м/с^2 вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол α = 30° с горизонтом (см. рис.). Найти коэффициент трения μ между плитой массой M_2 и основанием, если отношение масс плит M_1/M_2=0,7. Трением между плитой массой M_1 и основанием, а также трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.



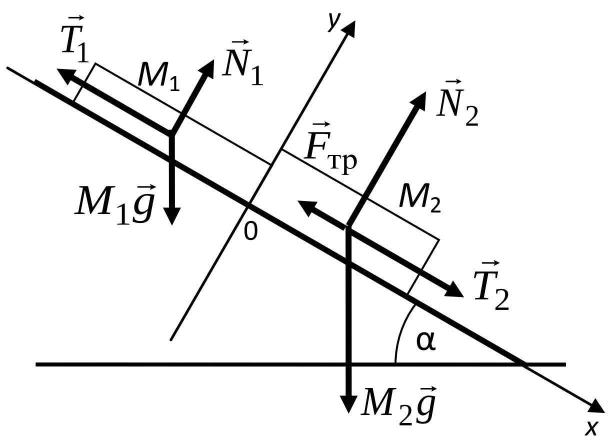
Решение

Задача 2.6.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на плиту с массой M_2, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения полученной системы следует, что

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, сила трения, действующая на вторую плиту со стороны наклонной плоскости, равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\alpha$, так что, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu M_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$\mu M_2 g \cos\alpha = (M_1 + M_2)\cdot(g \sin\alpha - a)$$

и, окончательно,

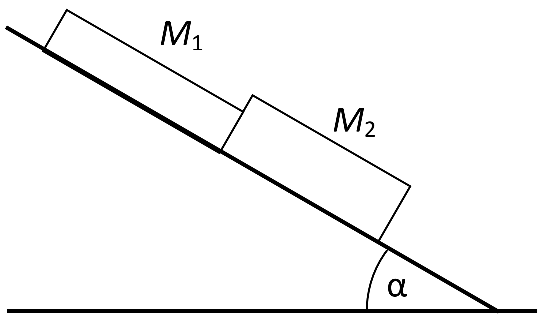
$$\mu = \left(\frac{M_1}{M_2} + 1\right)\cdot\frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} \approx 0{,}08.$$

Ответ: $\mu \approx 0{,}08$.

Задача 2.7

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.

Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол $\alpha = 30^{\circ}$ с горизонтом (см. рис.). Отношение масс плит M_1/M_2=0,5, коэффициент трения между плитой массой M_1 и основанием μ_1 = 0,1, а между плитой массой M_2 и основанием μ_2 = 0,2. Найти ускорение, с которым движутся плиты. Трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.



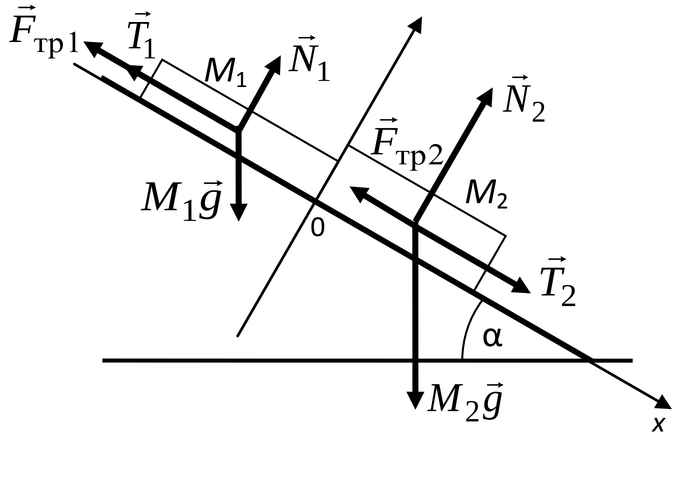
Решение

Задача 2.7.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр}1},$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}2}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}1}$ и $\vec{F}_{\text{тр}2}$ – силы трения, действующие на плиты, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T - F_{\text{тр}1}, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}2}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) полученной системы следует, что

$$N_1 = M_1 g \cos\alpha,$$

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, силы трения, действующие на первую и вторую плиты со стороны наклонной плоскости, равны

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 M_1 g \cos\alpha,$$

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 M_2 g \cos\alpha.$$

Поэтому, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu_1 M_1 g \cos\alpha - \mu_2 M_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$a = g \sin\alpha - \frac{\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2}{M_1 + M_2} g \cos\alpha$$

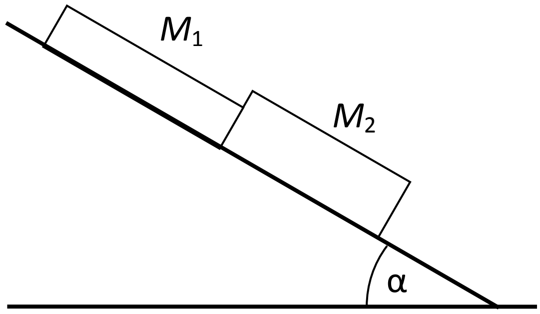
и, окончательно,

$$a = g \sin\alpha - \frac{\mu_1 \dfrac{M_1}{M_2} + \mu_2}{\dfrac{M_1}{M_2} + 1} g \cos\alpha \approx 3{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a \approx 3{,}5$ м/с^2.

Задача 2.8

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.



Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол $\alpha = 30^{\circ}$ с горизонтом (см. рис.). Отношение масс плит $M_1/M_2 = 0{,}6$, коэффициент трения между плитой массой M_1 и основанием $\mu_1 = 0{,}15$, а между плитой массой M_2 и основанием $\mu_2 = 0{,}2$. Найти ускорение, с которым движутся плиты. Трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.

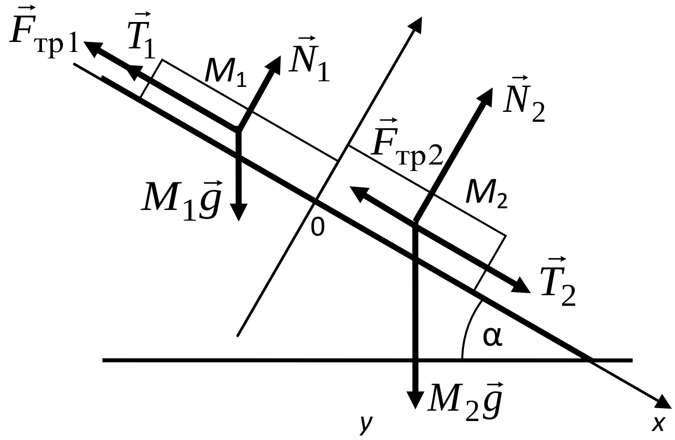
Решение

Задача 2.8.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр}1},$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}2}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}1}$ и $\vec{F}_{\text{тр}2}$ – силы трения, действующие на плиты, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T - F_{\text{тр}1}, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}2}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) полученной системы следует, что

$$N_1 = M_1 g \cos\alpha,$$

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, силы трения, действующие на первую и вторую плиты со стороны наклонной плоскости, равны

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 M_1 g \cos\alpha,$$

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 M_2 g \cos\alpha.$$

Поэтому, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu_1 M_1 g \cos\alpha - \mu_2 M_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$a = g \sin\alpha - \frac{\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2}{M_1 + M_2} g \cos\alpha$$

и, окончательно,

$$a = g \sin\alpha - \frac{\mu_1 \dfrac{M_1}{M_2} + \mu_2}{\dfrac{M_1}{M_2} + 1} g \cos\alpha \approx 3{,}4\,\text{м/с}^2.$$

Ответ: $a \approx 3{,}4$ м/с^2.

Задание 3.

Задание 3.1.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.1 измерение плотности грунта показало значение 1.1 (г/куб. см), а при влажности 0.3 плотность грунта оказалась равной 1.25 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.5, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.6 до 0.7?

Решение

3.1. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x) = q - a(x - x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i = q - a(x_i - x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}},$$

$$q = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}},$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}$. При значении $x = x_3$ получаем

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}.$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\min} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\min} - \frac{x_2 + x_1}{2}},$$

$$y_{3\max} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\max} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\max} - \frac{x_2 + x_1}{2}}.$$

Подставляя значения x_1 =0.1, y_1=1.1, x_2 =0.3, y_2=1.25, x_3=0.5, $x_{0\min}$=0.6, $x_{0\max}$ =0.7, получаем

Ответ: [1.325,1.34]

Задание 3.2.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.1 измерение плотности грунта показало значение 1.2 (г/куб. см), а при влажности 0.3 плотность грунта оказалась равной 1.25 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.5, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.6 до 0.7?

Решение

3.2. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x) = q - a(x - x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i = q - a(x_i - x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}},$$

$$q = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}},$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}$. При значении $x = x_3$ получаем

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}.$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\min} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\min} - \frac{x_2 + x_1}{2}},$$

$$y_{3\max} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\max} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\max} - \frac{x_2 + x_1}{2}}.$$

Подставляя значения x_1 =0.1, y_1=1.2, x_2 =0.3, y_2=1.25, x_3=0.5, $x_{0\min}$=0.6, $x_{0\max}$ =0.7, получаем

Ответ: [1.275,1.28]

Задание 3.3.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.15 измерение плотности грунта показало значение 1.1 (г/куб. см), а при влажности 0.25 плотность грунта оказалась равной 1.3 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.35, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.4 до 0.45?

Решение

3.3. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x) = q - a(x - x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i = q - a(x_i - x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - \dfrac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

$$q = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - \dfrac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \dfrac{x_0 - \dfrac{x + x_1}{2}}{x_0 - \dfrac{x_2 + x_1}{2}}$. При значении $x = x_3$ получаем

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \dfrac{x_3 + x_1}{2}}{x_0 - \dfrac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\min} - \dfrac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\min} - \dfrac{x_2 + x_1}{2}} ,$$

$$y_{3\max} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\max} - \dfrac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\max} - \dfrac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Подставляя значения x_1 =0.15, y_1=1.1, x_2 =0.25, y_2=1.3, x_3=0.35, $x_{0\min}$=0.4, $x_{0\max}$ =0.45, получаем

Ответ: [1.4,1.42]

Задание 3.4.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.1 измерение плотности грунта показало значение 1.2 (г/куб. см), а при влажности 0.2 плотность грунта оказалась равной 1.3 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.3, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.35 до 0.4?

Решение

3.4. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x) = q - a(x - x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i = q - a(x_i - x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

$$q = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}$. При значении $x = x_3$ получаем

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\min} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\min} - \frac{x_2 + x_1}{2}} ,$$

$$y_{3\max} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\max} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\max} - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Подставляя значения x_1 =0.1, y_1=1.2, x_2 =0.2, y_2=1.3, x_3=0.3, $x_{0\min}$=0.35, $x_{0\max}$ =0.4, получаем

Ответ: [1.35,1.36]

Задание 3.5.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.12 измерение плотности грунта показало значение 1.1 (г/куб. см), а при влажности 0.18 плотность грунта оказалась равной 1.4 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.28, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.35 до 0.4?

Решение

3.5. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x) = q - a(x - x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i = q - a(x_i - x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

$$q = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}$. При значении $x = x_3$ получаем

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\min} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\min} - \frac{x_2 + x_1}{2}} ,$$

$$y_{3\max} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\max} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\max} - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Подставляя значения x_1 =0.12, y_1=1.1, x_2 =0.18, y_2=1.4, x_3=0.28, $x_{0\min}$=0.35, $x_{0\max}$ =0.4, получаем

Ответ: [1.7,1.74]

Задание 3.6.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.2 измерение плотности грунта показало значение 1.1 (г/куб. см), а при влажности 0.4 плотность грунта оказалась равной 1.4 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.6, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.7 до 0.8?

Решение

3.6. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x) = q - a(x - x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i = q - a(x_i - x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

$$q = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}$. При значении $x = x_3$ получаем

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\min} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\min} - \frac{x_2 + x_1}{2}} ,$$

$$y_{3\max} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\max} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\max} - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Подставляя значения x_1 =0.2, y_1=1.1, x_2 =0.4, y_2=1.4, x_3=0.6, $x_{0\min}$=0.7, $x_{0\max}$=0.8, получаем

Ответ: [1.55,1.58]

Задание 3.7.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.15 измерение плотности грунта показало значение 1.3 (г/куб. см), а при влажности 0.25 плотность грунта оказалась равной 1.5 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.35, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.4 до 0.45?

Решение

3.7. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x)=q-a(x-x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1=y(x_1), y_2=y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i=q-a(x_i-x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{x_0-\frac{x_1+x_2}{2}},$$

$$q=y_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{(x_1-x_0)^2}{x_0-\frac{x_1+x_2}{2}},$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x)=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_0-\frac{x+x_1}{2}}{x_0-\frac{x_2+x_1}{2}}$. При значении $x=x_3$ получаем

$$y_3=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_0-\frac{x_3+x_1}{2}}{x_0-\frac{x_2+x_1}{2}}.$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min}=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_{0\min}-\frac{x_3+x_1}{2}}{x_{0\min}-\frac{x_2+x_1}{2}},$$

$$y_{3\max}=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_{0\max}-\frac{x_3+x_1}{2}}{x_{0\max}-\frac{x_2+x_1}{2}}.$$

Подставляя значения x_1 =0.15, y_1=1.3, x_2 =0.25, y_2=1.5, x_3=0.35, $x_{0\min}$=0.4, $x_{0\max}$ =0.45, получаем

Ответ: [1.6,1.62]

Задание 3.8.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.1 измерение плотности грунта показало значение 1.2 (г/куб. см), а при влажности 0.3 плотность грунта оказалась равной 1.4 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.5, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.6 до 0.7?

Решение

3.8. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x) = q - a(x - x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i = q - a(x_i - x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

$$q = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}$. При значении $x = x_3$ получаем

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\min} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\min} - \frac{x_2 + x_1}{2}} ,$$

$$y_{3\max} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\max} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\max} - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Подставляя значения x_1 =0.1, y_1 =1.2, x_2 =0.3, y_2 =1.4, x_3 =0.5, $x_{0\min}$ =0.6, $x_{0\max}$ =0.7, получаем

Ответ: [1.5,1.52]

Задание 4.

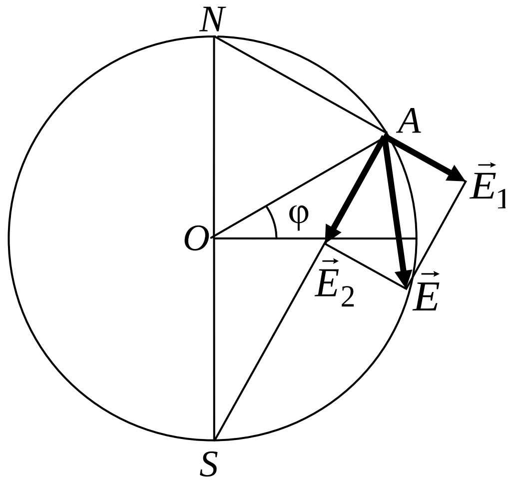
Задача 4.1

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 20 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = 2\cdot10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = -8\cdot10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели φ = 30° северной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение

Задача 4.1.



Северный полюс глобуса N, его южный полюс S и точка A на широте φ лежат на окружности радиусом R, причем точки N и S находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle NSA = \dfrac{1}{2}\angle NOA = \dfrac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R$, $r_2 = AS = R\sqrt{3}$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{R^2} = \frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-9}}{0{,}2^2} = 450\,(\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9\cdot10^9\cdot8\cdot10^{-9}}{0{,}2^2} = 600\,(\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 750$ В/м.

Ответ: E = 750 В/м.

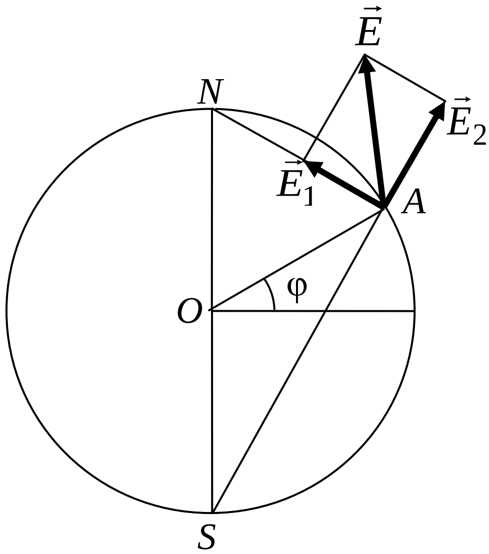
Задача 4.2

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 20 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = -3\cdot10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = 12\cdot10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели φ = 30° северной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение

Задача 4.2.



Северный полюс глобуса N, его южный полюс S и точка A на широте φ лежат на окружности радиусом R, причем точки N и S находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle NSA = \dfrac{1}{2}\angle NOA = \dfrac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R$, $r_2 = AS = R\sqrt{3}$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 3\cdot 10^{-9}}{0{,}2^2} = 675\,(\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9\cdot 10^9 \cdot 12\cdot 10^{-9}}{0{,}2^2} = 900\,(\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 1125$ В/м.

Ответ: E = 1125 В/м.

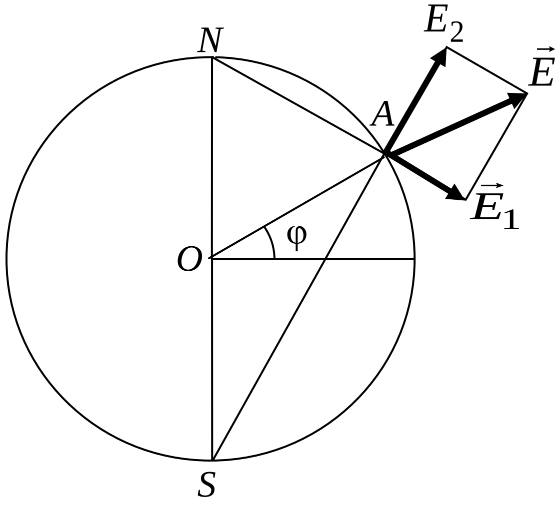
Задача 4.3

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 20 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = 1\cdot 10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = 4\cdot 10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели φ = 30° северной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение

Задача 4.3.



Северный полюс глобуса N, его южный полюс S и точка A на широте φ лежат на окружности радиусом R, причем точки N и S находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \frac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle NSA = \frac{1}{2}\angle NOA = \frac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R$, $r_2 = AS = R\sqrt{3}$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 1\cdot 10^{-9}}{0{,}2^2} = 225\,(\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-9}}{0{,}2^2} = 300\,(\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 375$ В/м.

Ответ: *E* = 375 В/м.

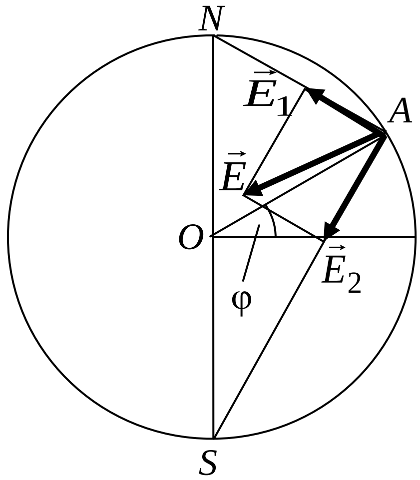
Задача 4.4

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 20 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = -4\cdot 10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = -16\cdot 10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели $\varphi = 30°$ северной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение

Задача 4.4.



Северный полюс глобуса N, его южный полюс S и точка A на широте φ лежат на окружности радиусом R, причем точки N и S находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \frac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle NSA = \frac{1}{2}\angle NOA = \frac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R$, $r_2 = AS = R\sqrt{3}$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-9}}{0{,}2^2} = 900\,(\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9\cdot 10^9 \cdot 16\cdot 10^{-9}}{0{,}2^2} = 1200\,(\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 1500$ В/м.

Ответ: *E* = 1500 В/м.

Задача 4.5

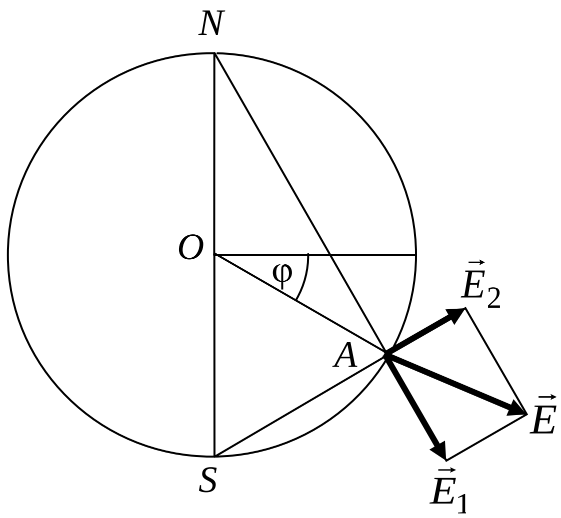
Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 25 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = 2\cdot10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = 0{,}5\cdot10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели φ = 30° южной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение

Задача 4.5.

Северный полюс глобуса N, его южный полюс S и точка A на широте φ лежат на окружности радиусом R, причем точки N и S находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$.



В нашем случае

$\angle SNA = \dfrac{1}{2}\angle SOA = \dfrac{1}{2}(90° - φ) = 30°$, поэтому

$r_1 = AN = R\sqrt{3}$, $r_2 = AS = R$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{3R^2} = \frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-9}}{3\cdot0{,}25^2} = 96\ (\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{9\cdot10^9\cdot0{,}5\cdot10^{-9}}{0{,}25^2} = 72\ (\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 120$ В/м.

Ответ: *E* = 120 В/м.

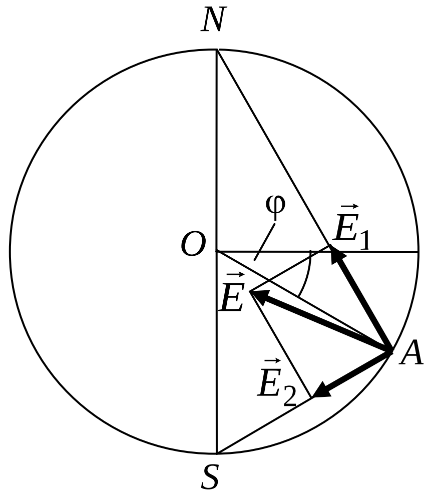
Задача 4.6

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 25 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = -3\cdot10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = -0{,}75\cdot10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели φ = 30° южной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение

Задача 4.6.



Северный полюс глобуса *N*, его южный полюс *S* и точка *A* на широте φ лежат на окружности радиусом *R*, причем точки *N* и *S* находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона:

$E = \dfrac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle SNA = \frac{1}{2}\angle SOA = \frac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R\sqrt{3}$, $r_2 = AS = R$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{3R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 3\cdot 10^{-9}}{3\cdot 0{,}25^2} = 144 \text{ (В/м)},$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 0{,}75\cdot 10^{-9}}{0{,}25^2} = 108 \text{ (В/м)}.$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 180$ В/м.

Ответ: *E* = 180 В/м.

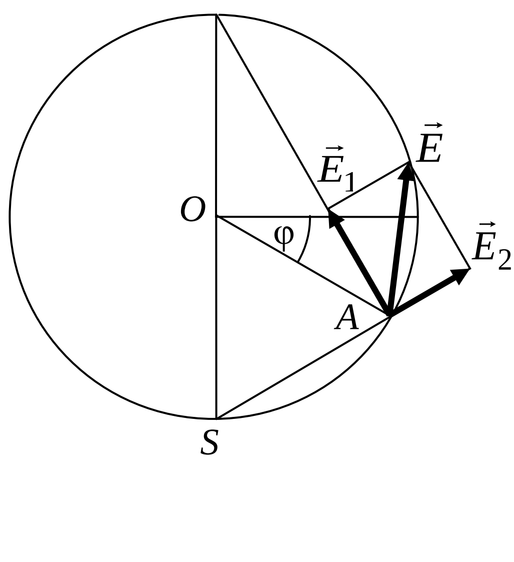
Задача 4.7

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом *R* = 25 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = -4\cdot 10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = 1\cdot 10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели φ = 30° южной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение

Задача 4.7.



Северный полюс глобуса *N*, его южный полюс *S* и точка *A* на широте φ лежат на окружности радиусом *R*, причем точки *N* и *S* находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle SNA = \dfrac{1}{2}\angle SOA = \dfrac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R\sqrt{3}$, $r_2 = AS = R$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{3R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-9}}{3\cdot 0{,}25^2} = 192\ (\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 1\cdot 10^{-9}}{0{,}25^2} = 144\ (\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 240$ В/м.

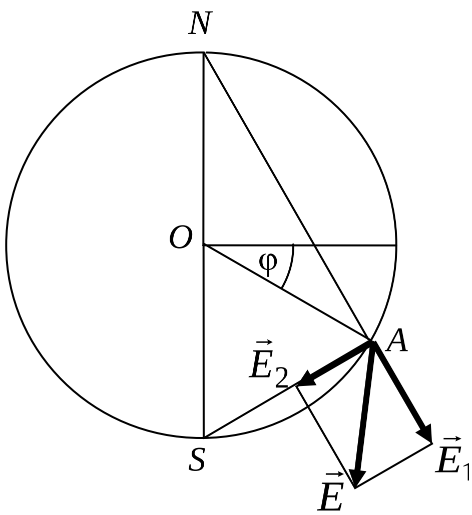
Ответ: *E* = 240 В/м.

Задача 4.8

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 25 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = 6\cdot 10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = -1{,}5\cdot 10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели $\varphi = 30°$ южной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение



Задача 4.8.

Северный полюс глобуса N, его южный полюс S и точка A на широте φ лежат на окружности радиусом R, причем точки N и S находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle SNA = \dfrac{1}{2}\angle SOA = \dfrac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R\sqrt{3}$, $r_2 = AS = R$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{3R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 6\cdot 10^{-9}}{3\cdot 0{,}25^2} = 288\ (\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 1{,}5\cdot 10^{-9}}{0{,}25^2} = 216\ (\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 360$ В/м.

Ответ: *E* = 360 В/м.

Тестовые задания для разминки 1-го тура отборочного этапа:

Какое минимальное число граней может быть у кристалла?
одна
четыре
восемь

Из каких минералов состоит гранит?
Кварц, слюда, полевой шпат
Кальцит, нефелин, пирит
Гранат, магнетит, золото

Что является жидким полезным ископаемым?
Лава
Вода
Радон

Как называется самая верхняя оболочка Земли?
Земная кора
Мантия
Ядро

Что называют каменной оболочкой Земли?
Атмосфера
Гидросфера
Литосфера

Что называют водной оболочкой Земли?
Атмосфера
Гидросфера
Литосфера

Что называют воздушной оболочкой Земли?
Атмосфера
Гидросфера
Литосфера

Что является характерной формой рельефа пустынь?
Бархан
Пойма
Овраг

Что является продуктом извержения вулкана?
Янтарь
Лава
Нефть

На каком полуострове до сих пор происходят извержения вулканов?
Кольский
Крым
Камчатка

Чем образованы дюны, барханы, гряды?
текучими водами
ветром
ледником

Чем сложены дюны, барханы, гряды?
мрамором
водой
песком

Какую форму рельефа образуют реки?
Бархан
Пойма
Холм

Какой минерал самый твердый?
Алмаз
Кальцит
Гипс

В каком периоде произошел расцвет динозавров?
Четвертичном
Юрском
Кембрийском

Какой по счету от Солнца планетой является Земля?
Первой
Третьей
Седьмой

Какой примерный возраст у планеты Земля?
4,5 млрд. лет
2 млн. лет
10 тыс. лет

Какую часть площади поверхности планеты Земля занимают океаны и моря?
10%
70%
98%

Назовите причину морских приливов и отливов.
Воздействие солнечного ветра
Изменения в магнитном поле Земли
Гравитационное воздействие Луны

Сколько у планеты Земля крупных спутников?
Один (Луна)
Три (Луна, Фобос и Деймос)
Два (Луна, Фобос)

ЗАДАНИЯ 2-го ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задача 1.1.

1. Относительная деформация *ε(t)* ползучести грунтов в момент времени $t, t \geq 0.2$ (ч) зависит от времени по закону $\varepsilon(t) = 0.005 \cdot 2^{(2t-0.4)} + 0.015 \cdot 2^{(t-0.2)}$.

Определите длительность промежутка времени, в течение которого значение *ε(t)* находится в пределах от 0.032 до 0.042.

Решение.

Величину $2^{(t-0.2)}$ обозначим через *y>0*. Тогда условие задачи перепишем в виде двойного неравенства

$$0.032 \leq 0.005 \cdot y^2 + 0.015 \cdot y \leq 0.042 \Leftrightarrow 32 \leq 5y^2 + 15y^2 \leq 42,$$

из которого следует:

$$0.5 \cdot (\sqrt{\frac{173}{5}} - 3) \leq y = 2^{(t-0.2)} \leq 0.5 \cdot (\sqrt{\frac{213}{5}} - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{173}{5}} - 3)) \leq t - 0.2 \leq \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{213}{5}} - 3)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{173}{5}} - 3)) \leq t \leq 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{213}{5}} - 3))$$

Искомая длина промежутка времени равна $\log_2 \frac{\sqrt{213/5} - 3}{\sqrt{173/5} - 3}$ =0.291(ч).

Ответ: $\log_2 \frac{\sqrt{213/5} - 3}{\sqrt{173/5} - 3}$ **(=0.291)(ч).**

Задача 1.2.

2. Относительная деформация *ε(t)* ползучести грунтов в момент времени $t, t \geq 0.2$ (ч) зависит от времени по закону $\varepsilon(t) = 0.005 \cdot 2^{(2t-0.4)} + 0.015 \cdot 2^{(t-0.2)}$.

Определите длительность промежутка времени, в течение которого значение *ε(t)* находится в пределах от 0.034 до 0.044.

Решение.

Величину $2^{(t-0.2)}$ обозначим через *y>0*. Тогда условие задачи перепишем в виде двойного неравенства

$$0.034 \leq 0.005 \cdot y^2 + 0.015 \cdot y \leq 0.044 \Leftrightarrow 34 \leq 5y^2 + 15y \leq 44,$$

из которого следует:

$$0.5 \cdot (\sqrt{\frac{181}{5}} - 3) \leq y = 2^{(t-0.2)} \leq 0.5 \cdot (\sqrt{\frac{221}{5}} - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{181}{5}} - 3)) \leq t - 0.2 \leq \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{221}{5}} - 3)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{181}{5}} - 3)) \leq t \leq 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{221}{5}} - 3))$$

Искомая длина промежутка времени равна $\log_2 \frac{\sqrt{221/5} - 3}{\sqrt{181/5} - 3}$ =0.274(ч).

Ответ: $\log_2 \frac{\sqrt{221/5} - 3}{\sqrt{181/5} - 3}$ **(=0.274)(ч).**

Задача 1.3.

3. Относительная деформация *ε(t)* ползучести грунтов в момент времени $t, t \ge 0.2$ (ч) зависит от времени по закону $\varepsilon(t) = 0.005 \cdot 2^{(2t-0.4)} + 0.015 \cdot 2^{(t-0.2)}$.

Определите длительность промежутка времени, в течение которого значение *ε(t)* находится в пределах от 0.036 до 0.046.

Решение.

Величину $2^{(t-0.2)}$ обозначим через *y>0*. Тогда условие задачи перепишем в виде двойного неравенства

$$0.036 \le 0.005 \cdot y^2 + 0.015 \cdot y \le 0.046 \Leftrightarrow 36 \le 5y^2 + 15y \le 46,$$

из которого следует:

$$0.5 \cdot (\sqrt{\frac{189}{5}} - 3) \le y = 2^{(t-0.2)} \le 0.5 \cdot (\sqrt{\frac{229}{5}} - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{189}{5}} - 3)) \le t - 0.2 \le \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{229}{5}} - 3)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{189}{5}} - 3)) \le t \le 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{229}{5}} - 3))$$

Искомая длина промежутка времени равна $\log_2 \frac{\sqrt{229/5} - 3}{\sqrt{189/5} - 3}$ =0.259(ч).

Ответ: $\log_2 \frac{\sqrt{229/5} - 3}{\sqrt{189/5} - 3}$ **(=0.259)(ч).**

Задача 1.4.

4. Относительная деформация *ε(t)* ползучести грунтов в момент времени $t, t \ge 0.2$ (ч) зависит от времени по закону $\varepsilon(t) = 0.005 \cdot 2^{(2t-0.4)} + 0.015 \cdot 2^{(t-0.2)}$.

Определите длительность промежутка времени, в течение которого значение *ε(t)* находится в пределах от 0.038 до 0.048.

Решение.

Величину $2^{(t-0.2)}$ обозначим через *y>0*. Тогда условие задачи перепишем в виде двойного неравенства

$$0.038 \le 0.005 \cdot y^2 + 0.015 \cdot y \le 0.048 \Leftrightarrow 38 \le 5y^2 + 15y \le 48,$$

из которого следует:

$$0.5 \cdot (\sqrt{\frac{197}{5}} - 3) \le y = 2^{(t-0.2)} \le 0.5 \cdot (\sqrt{\frac{237}{5}} - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{197}{5}} - 3)) \le t - 0.2 \le \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{237}{5}} - 3)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{197}{5}} - 3)) \le t \le 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{237}{5}} - 3))$$

Искомая длина промежутка времени равна $\log_2 \frac{\sqrt{237/5} - 3}{\sqrt{197/5} - 3}$ =0.245(ч).

Ответ: $\log_2 \frac{\sqrt{237/5} - 3}{\sqrt{197/5} - 3}$ **(=0.245)(ч).**

Задача 1.5.

5. Относительная деформация *ε(t)* ползучести грунтов в момент времени $t, t \geq 0.2$ (ч) зависит от времени по закону $\varepsilon(t) = 0.005 \cdot 2^{(2t-0.4)} + 0.015 \cdot 2^{(t-0.2)}$.

Определите длительность промежутка времени, в течение которого значение *ε(t)* находится в пределах от 0.040 до 0.050.

Решение.

Величину $2^{(t-0.2)}$ обозначим через *y>0*. Тогда условие задачи перепишем в виде двойного неравенства

$$0.040 \leq 0.005 \cdot y^2 + 0.015 \cdot y \leq 0.050 \Leftrightarrow 40 \leq 5y^2 + 15y \leq 50,$$

из которого следует:

$$0.5 \cdot (\sqrt{\frac{205}{5}} - 3) \leq y = 2^{(t-0.2)} \leq 0.5 \cdot (\sqrt{\frac{245}{5}} - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{205}{5}} - 3)) \leq t - 0.2 \leq \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{245}{5}} - 3)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{205}{5}} - 3)) \leq t \leq 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{245}{5}} - 3))$$

Искомая длина промежутка времени равна $\log_2 \frac{\sqrt{245/5} - 3}{\sqrt{205/5} - 3}$ =0.233(ч).

Ответ: $\log_2 \frac{\sqrt{245/5} - 3}{\sqrt{205/5} - 3}$ **(=0.233)(ч).**

Задача 1.6.

6. Относительная деформация *ε(t)* ползучести грунтов в момент времени $t, t \geq 0.2$ (ч) зависит от времени по закону $\varepsilon(t) = 0.005 \cdot 2^{(2t-0.4)} + 0.015 \cdot 2^{(t-0.2)}$.

Определите длительность промежутка времени, в течение которого значение *ε(t)* находится в пределах от 0.042 до 0.052.

Решение. Величину $2^{(t-0.2)}$ обозначим через *y>0*. Тогда условие задачи перепишем в виде двойного неравенства

$$0.042 \leq 0.005 \cdot y^2 + 0.015 \cdot y \leq 0.052 \Leftrightarrow 42 \leq 5y^2 + 15y \leq 52,$$

из которого следует:

$$0.5 \cdot (\sqrt{\frac{213}{5}} - 3) \leq y = 2^{(t-0.2)} \leq 0.5 \cdot (\sqrt{\frac{253}{5}} - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{213}{5}} - 3)) \leq t - 0.2 \leq \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{253}{5}} - 3)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{213}{5}} - 3)) \leq t \leq 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{253}{5}} - 3))$$

Искомая длина промежутка времени равна $\log_2 \frac{\sqrt{253/5} - 3}{\sqrt{213/5} - 3}$ =0.222(ч).

Ответ: $\log_2 \frac{\sqrt{253/5} - 3}{\sqrt{213/5} - 3}$ **(=0.222)(ч).**

Задача 1.7.

7. Относительная деформация *ε(t)* ползучести грунтов в момент времени $t, t \geq 0.2$ (ч) зависит от времени по закону $\varepsilon(t) = 0.005 \cdot 2^{(2t-0.4)} + 0.015 \cdot 2^{(t-0.2)}$.
Определите длительность промежутка времени, в течение которого значение *ε(t)* находится в пределах от 0.046 до 0.056.

Решение. Величину $2^{(t-0.2)}$ обозначим через *y>0*. Тогда условие задачи перепишем в виде двойного неравенства

$$0.046 \leq 0.005 \cdot y^2 + 0.015 \cdot y \leq 0.056 \Leftrightarrow 46 \leq 5y^2 + 15y \leq 56,$$

из которого следует:

$$0.5 \cdot (\sqrt{\frac{229}{5}} - 3) \leq y = 2^{(t-0.2)} \leq 0.5 \cdot (\sqrt{\frac{269}{5}} - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{229}{5}} - 3)) \leq t - 0.2 \leq \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{269}{5}} - 3)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{229}{5}} - 3)) \leq t \leq 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{269}{5}} - 3))$$

Искомая длина промежутка времени равна $\log_2 \frac{\sqrt{269/5} - 3}{\sqrt{229/5} - 3}$ =0.202(ч).

Ответ: $\log_2 \frac{\sqrt{269/5} - 3}{\sqrt{229/5} - 3}$ **(=0.202)(ч).**

Задача 1.8.

8. Относительная деформация *ε(t)* ползучести грунтов в момент времени $t, t \geq 0.2$ (ч) зависит от времени по закону $\varepsilon(t) = 0.005 \cdot 2^{(2t-0.4)} + 0.015 \cdot 2^{(t-0.2)}$.
Определите длительность промежутка времени, в течение которого значение *ε(t)* находится в пределах от 0.048 до 0.058.

Решение. Величину $2^{(t-0.2)}$ обозначим через *y>0*. Тогда условие задачи перепишем в виде двойного неравенства

$$0.048 \leq 0.005 \cdot y^2 + 0.015 \cdot y \leq 0.058 \Leftrightarrow 48 \leq 5y^2 + 15y \leq 58,$$

из которого следует:

$$0.5 \cdot (\sqrt{\frac{237}{5}} - 3) \leq y = 2^{(t-0.2)} \leq 0.5 \cdot (\sqrt{\frac{277}{5}} - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{237}{5}} - 3)) \leq t - 0.2 \leq \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{277}{5}} - 3)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{237}{5}} - 3)) \leq t \leq 0.2 + \log_2(0.5 \cdot (\sqrt{\frac{277}{5}} - 3))$$

Искомая длина промежутка времени равна $\log_2 \frac{\sqrt{277/5} - 3}{\sqrt{237/5} - 3}$ =0.194(ч).

Ответ: $\log_2 \frac{\sqrt{277/5} - 3}{\sqrt{237/5} - 3}$ **(=0.194)(ч).**

Задание 2.

Задача 2.1. Количество газа, разведанного или добытого на газовом месторождении, обычно характеризуют объемом, который занимал бы этот газ при нормальных условиях, т.е. при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ °C.

За начальный период эксплуатации газового месторождения было добыто $V_1 = 10^6$ м^3 газа. При этом давление газа в скважине понизилось с первоначального значения $p_1 = 150\ p_0$ до значения $p_2 = 149\ p_0$. Каковы первоначальные запасы V_0 газа в месторождении? Считать, что при эксплуатации скважины общий объем, который занимает газ в осадочных породах, а также температура газа в месторождении остаются неизменными.

Решение.

Пусть

$V_м$ – объем газа в месторождении,

T – его температура в месторождении,

m – его первоначальная масса в месторождении,

Δm – масса газа, добытого за начальный период эксплуатации,

μ – молярная масса газа,

$T_0 = 273$ К – абсолютная температура при нормальных условиях.

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газа в месторождении в момент перед началом эксплуатации:

$$p_1 V_м = (m/\mu)RT$$

и в момент, когда уже добыта масса газа Δm:

$$p_2 V_м = [(m - \Delta m)/\mu]RT.$$

Поделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{\Delta m}{m}, \text{ откуда } \frac{\Delta m}{m} = \frac{p_1 - p_2}{p_1}.$$

Запишем теперь уравнение Клапейрона–Менделеева для массы газа m и массы газа Δm при нормальных условиях:

$$p_0 V_0 = (m/\mu)RT_0,$$
$$p_0 V_1 = (\Delta m/\mu)RT_0.$$

Поделив второе из этих уравнений на первое, получим:

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{\Delta m}{m} = \frac{p_1 - p_2}{p_1}, \text{ откуда } V_0 = \frac{p_1 V_1}{p_1 - p_2} = \frac{150 p_0 \cdot 10^6 \text{ м}^3}{p_0} = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ м}^3.$$

Ответ: $V_0 = 1{,}5 \cdot 10^8$ м^3

Задача 2.2. Количество газа, разведанного или добытого на газовом месторождении, обычно характеризуют объемом, который занимал бы этот газ при нормальных условиях, т.е. при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ °C.

За начальный период эксплуатации газового месторождения было добыто $V_1 = 4{\cdot}10^6$ м^3 газа. При этом давление газа в скважине понизилось с первоначального значения $p_1 = 170\ p_0$ до значения $p_2 = 168\ p_0$. Каковы первоначальные запасы V_0 газа в месторождении? Считать, что при эксплуатации скважины общий объем, который занимает газ в осадочных породах, а также температура газа в месторождении остаются неизменными.

Решение.

Пусть

$V_м$ – объем газа в месторождении,

T – его температура в месторождении,

m – его первоначальная масса в месторождении,

Δm – масса газа, добытого за начальный период эксплуатации,

μ – молярная масса газа,

T_0 = 273 К – абсолютная температура при нормальных условиях.

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газа в месторождении в момент перед началом эксплуатации:

$$p_1V_м = (m/\mu)RT$$

и в момент, когда уже добыта масса газа Δm:

$$p_2V_м = [(m - \Delta m)/\mu]RT.$$

Поделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{\Delta m}{m}, \text{ откуда } \frac{\Delta m}{m} = \frac{p_1 - p_2}{p_1}.$$

Запишем теперь уравнение Клапейрона–Менделеева для массы газа m и массы газа Δm при нормальных условиях:

$$p_0V_0 = (m/\mu)RT_0,$$

$$p_0V_1 = (\Delta m/\mu)RT_0.$$

Поделив второе из этих уравнений на первое, получим:

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{\Delta m}{m} = \frac{p_1 - p_2}{p_1}, \text{ откуда } V_0 = \frac{p_1V_1}{p_1 - p_2} = \frac{170p_0 \cdot 4 \cdot 10^6 \text{ м}^3}{2p_0} = 3{,}4 \cdot 10^8 \text{м}^3.$$

Ответ: V_0 = 3,4·10^8 м^3

Задача 2.3. Количество газа, разведанного или добытого на газовом месторождении, обычно характеризуют объемом, который занимал бы этот газ при нормальных условиях, т.е. при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре t = 0 °С.

За начальный период эксплуатации газового месторождения было добыто $V_1 = 6{\cdot}10^8$ м^3 газа. При этом давление газа в скважине понизилось с первоначального значения p_1 = 180 p_0 до значения p_2 = 175 p_0. Каковы оставшиеся запасы V газа в месторождении? Считать, что при эксплуатации скважины общий объем, который занимает газ в осадочных породах, а также температура газа в месторождении остаются неизменными.

Решение.

Пусть

$V_м$ – объем газа в месторождении,

T – его температура в месторождении,

m – его первоначальная масса в месторождении,

Δm – масса газа, добытого за начальный период эксплуатации,

μ – молярная масса газа,

T_0 = 273 К – абсолютная температура при нормальных условиях.

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газа в месторождении в момент перед началом эксплуатации:

$$p_1V_м = (m/\mu)RT$$

и в момент, когда уже добыта масса газа Δm:

$$p_2V_м = [(m - \Delta m)/\mu]RT.$$

Поделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{\Delta m}{m}, \text{ откуда } \frac{\Delta m}{m} = \frac{p_1 - p_2}{p_1}.$$

Запишем теперь уравнение Клапейрона–Менделеева для массы добытого газа Δm и массы оставшегося газа $(m - \Delta m)$ при нормальных условиях:

$$p_0V_1 = (\Delta m/\mu)RT_0,$$

$$p_0V = [(m - \Delta m)/\mu]RT_0,$$

Поделив второе из этих уравнений на первое, получим:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{m}{\Delta m} - 1 = \frac{p_1}{p_1 - p_2} - 1 = \frac{p_2}{p_1 - p_2}, \text{ откуда}$$

$$V = \frac{p_2 V_1}{p_1 - p_2} = \frac{175 p_0 \cdot 6 \cdot 10^8 \text{ м}^3}{5 p_0} = 2{,}1 \cdot 10^{10} \text{м}^3.$$

Ответ: V_0 = 2,1·10^{10} м^3

Задача 2.4. Количество газа, разведанного или добытого на газовом месторождении, обычно характеризуют объемом, который занимал бы этот газ при нормальных условиях, т.е. при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ °С.

За начальный период эксплуатации газового месторождения было добыто $V_1 = 2 \cdot 10^9$ м^3 газа. При этом давление газа в скважине понизилось с первоначального значения $p_1 = 250$ p_0 до значения $p_2 = 225$ p_0. Каковы оставшиеся запасы V газа в месторождении? Считать, что при эксплуатации скважины общий объем, который занимает газ в осадочных породах, а также температура газа в месторождении остаются неизменными.

Решение.

Пусть

$V_м$ – объем газа в месторождении,

T – его температура в месторождении,

m – его первоначальная масса в месторождении,

Δm – масса газа, добытого за начальный период эксплуатации,

μ – молярная масса газа,

T_0 = 273 К – абсолютная температура при нормальных условиях.

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газа в месторождении в момент перед началом эксплуатации:

$$p_1 V_м = (m/\mu)RT$$

и в момент, когда уже добыта масса газа Δm:

$$p_2 V_м = [(m - \Delta m)/\mu]RT.$$

Поделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{\Delta m}{m}, \text{ откуда } \frac{\Delta m}{m} = \frac{p_1 - p_2}{p_1}.$$

Запишем теперь уравнение Клапейрона–Менделеева для массы добытого газа Δm и массы оставшегося газа $(m - \Delta m)$ при нормальных условиях:

$$p_0 V_1 = (\Delta m/\mu)RT_0,$$

$$p_0 V = [(m - \Delta m)/\mu]RT_0,$$

Поделив второе из этих уравнений на первое, получим:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{m}{\Delta m} - 1 = \frac{p_1}{p_1 - p_2} - 1 = \frac{p_2}{p_1 - p_2}, \text{ откуда}$$

$$V = \frac{p_2 V_1}{p_1 - p_2} = \frac{225 p_0 \cdot 2 \cdot 10^9 \text{ м}^3}{25 p_0} = 1{,}8 \cdot 10^{10} \text{м}^3.$$

Ответ: V_0 = 1,8·10^{10} м^3

Задача 2.5. Количество газа, разведанного или добытого на газовом месторождении, обычно характеризуют объемом, который занимал бы этот газ при нормальных условиях, т.е. при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ °С.

Законсервированное газовое месторождение с остаточным давлением в скважине $p = 30$ p_0 решено использовать в качестве подземного хранилища газа. С этой целью в месторождение через скважину закачали $V_0 = 10^8$ м^3 газа того же состава, что и газ, находящийся в месторождении. При этом давление газа в месторождении увеличилось на величину $\Delta p = 5\,p_0$. Каковы запасы V газа в месторождении перед началом закачки? Считать, что при эксплуатации месторождения общий объем, который занимает газ в осадочных породах, а также температура газа в месторождении остаются неизменными.

Решение.

Пусть

$V_м$ – объем газа в месторождении,

T – его температура в месторождении,

m – его первоначальная масса в месторождении,

Δm – масса закачанного газа,

μ – молярная масса газа,

$T_0 = 273$ К – абсолютная температура при нормальных условиях.

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газа в месторождении в момент перед началом закачки:

$$pV_м = (m/\mu)RT$$

и в момент, когда в месторождение закачана дополнительная масса газа Δm:

$$(p + \Delta p)V_м = [(m + \Delta m)/\mu]RT.$$

Поделив второе уравнение на первое, получим:

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = 1 + \frac{\Delta m}{m}, \text{ откуда } \frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta p}{p}.$$

Запишем теперь уравнение Клапейрона–Менделеева при нормальных условиях для первоначальной массы m газа в месторождении и массы закачанного газа Δm:

$$p_0 V = (m/\mu)RT_0,$$

$$p_0 V_0 = [(\Delta m)/\mu]RT_0,$$

Поделив первое из этих уравнений на второе, получим:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{m}{\Delta m} = \frac{p}{\Delta p}, \text{ откуда } V = \frac{pV_0}{\Delta p} = \frac{30\,p_0 \cdot 10^8 \text{ м}^3}{5\,p_0} = 6 \cdot 10^8 \text{м}^3.$$

Ответ: $V = 6 \cdot 10^8$ м^3

Задача 2.6. Количество газа, разведанного или добытого на газовом месторождении, обычно характеризуют объемом, который занимал бы этот газ при нормальных условиях, т.е. при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ °С.

Законсервированное газовое месторождение с остаточным давлением в скважине $p = 40\,p_0$ решено использовать в качестве подземного хранилища газа. С этой целью в месторождение через скважину закачали $V_0 = 10^7$ м^3 газа того же состава, что и газ, находящийся в месторождении. При этом давление газа в месторождении увеличилось на величину $\Delta p = 2\,p_0$. Каковы запасы V газа в месторождении перед началом закачки? Считать, что при эксплуатации месторождения общий объем, который занимает газ в осадочных породах, а также температура газа в месторождении остаются неизменными.

Решение.

Пусть

$V_м$ – объем газа в месторождении,

T – его температура в месторождении,

m – его первоначальная масса в месторождении,

Δm – масса закачанного газа,

μ – молярная масса газа,

$T_0 = 273$ К – абсолютная температура при нормальных условиях.

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газа в месторождении в момент перед началом закачки:

$$pV_м = (m/\mu)RT$$

и в момент, когда в месторождение закачана дополнительная масса газа Δm:

$$(p + \Delta p)V_м = [(m + \Delta m)/\mu]RT.$$

Поделив второе уравнение на первое, получим:

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = 1 + \frac{\Delta m}{m}, \text{ откуда } \frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta p}{p}.$$

Запишем теперь уравнение Клапейрона–Менделеева при нормальных условиях для первоначальной массы m газа в месторождении и массы закачанного газа Δm:

$$p_0V = (m/\mu)RT_0,$$

$$p_0V_0 = [(\Delta m)/\mu]RT_0,$$

Поделив первое из этих уравнений на второе, получим:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{m}{\Delta m} = \frac{p}{\Delta p}, \text{ откуда } V = \frac{pV_0}{\Delta p} = \frac{40\,p_0 \cdot 10^7 \text{ м}^3}{2\,p_0} = 2 \cdot 10^8 \text{ м}^3.$$

Ответ: $V = 2 \cdot 10^8$ м^3

Задача 2.7. Количество газа, разведанного или добытого на газовом месторождении, обычно характеризуют объемом, который занимал бы этот газ при нормальных условиях, т.е. при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ °С.

Законсервированное газовое месторождение с остаточным давлением в скважине $p_1 = 30\,p_0$ решено использовать в качестве подземного хранилища газа. С этой целью в месторождение через скважину закачали $V_0 = 10^7$ м^3 газа того же состава, что и газ, находящийся в месторождении. При этом давление газа в месторождении увеличилось до $p_2 = 32\,p_0$. Каковы запасы V_1 газа в месторождении после закачки? Считать, что при эксплуатации месторождения общий объем, который занимает газ в осадочных породах, а также температура газа в месторождении остаются неизменными.

Решение.

Пусть

$V_м$ – объем газа в месторождении,
T – его температура в месторождении,
m – его первоначальная масса в месторождении,
Δm – масса закачанного газа,
μ – молярная масса газа,
$T_0 = 273$ К – абсолютная температура при нормальных условиях.

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газа в месторождении в момент перед началом закачки:

$$p_1V_м = (m/\mu)RT$$

и в момент, когда в месторождение закачана дополнительная масса газа Δm:

$$p_2V_м = [(m + \Delta m)/\mu]RT.$$

Поделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{m + \Delta m}{m}.$$

Запишем теперь уравнение Клапейрона–Менделеева при нормальных условиях для первоначальной массы m газа в месторождении и его полной массы (m + Δm) после закачки:

$$p_0(V_1 - V_0) = (m/\mu)RT_0,$$

$$p_0V_1 = [(m + \Delta m)/\mu]RT_0,$$

Поделив первое из этих уравнений на второе, получим:

$$1-\frac{V_0}{V_1}=\frac{m}{m+\Delta m}=\frac{p_1}{p_2}, \text{ откуда } V_1=\frac{V_0}{1-\frac{p_1}{p_2}}=\frac{p_2V_0}{p_2-p_1}=\frac{32p_0\cdot 10^7\text{ м}^3}{2p_0}=1{,}6\cdot 10^8\text{ м}^3.$$

Ответ: V_1 = 1,6·10^8 м^3

Задача 2.8. Количество газа, разведанного или добытого на газовом месторождении, обычно характеризуют объемом, который занимал бы этот газ при нормальных условиях, т.е. при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ °С.
Законсервированное газовое месторождение с остаточным давлением в скважине $p_1 = 40\,p_0$ решено использовать в качестве подземного хранилища газа. С этой целью в месторождение через скважину закачали $V_0 = 10^7$ м^3 газа того же состава, что и газ, находящийся в месторождении. При этом давление газа в месторождении увеличилось до $p_2 = 42\,p_0$. Каковы запасы V_1 газа в месторождении после закачки? Считать, что при эксплуатации месторождения общий объем, который занимает газ в осадочных породах, а также температура газа в месторождении остаются неизменными.

Решение.

Пусть

$V_м$ – объем газа в месторождении,
T – его температура в месторождении,
m – его первоначальная масса в месторождении,
Δm – масса закачанного газа,
μ – молярная масса газа,
T_0 = 273 К – абсолютная температура при нормальных условиях.

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газа в месторождении в момент перед началом закачки:

$$p_1V_м = (m/\mu)RT$$

и в момент, когда в месторождение закачана дополнительная масса газа Δm:

$$p_2V_м = [(m + \Delta m)/\mu]RT.$$

Поделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{m+\Delta m}{m}.$$

Запишем теперь уравнение Клапейрона–Менделеева при нормальных условиях для первоначальной массы m газа в месторождении и его полной массы ($m + \Delta m$) после закачки:

$$p_0(V_1 - V_0) = (m/\mu)RT_0,$$
$$p_0V_1 = [(m + \Delta m)/\mu]RT_0,$$

Поделив первое из этих уравнений на второе, получим:

$$1-\frac{V_0}{V_1}=\frac{m}{m+\Delta m}=\frac{p_1}{p_2}, \text{ откуда } V_1=\frac{V_0}{1-\frac{p_1}{p_2}}=\frac{p_2V_0}{p_2-p_1}=\frac{42p_0\cdot 10^7\text{ м}^3}{2p_0}=2{,}1\cdot 10^8\text{ м}^3.$$

Ответ: V_1 = 2,1·10^8 м^3

Задача 3.

3.1 При изучении морфологии песчаных зерен под микроскопом обнаружено зерно неправильной формы: две стороны являются катетами, соединяющая их сторона представляет собой дугу окружности. Эту фигуру неправильной формы можно получить так: круг радиуса 0.2 мм делится двумя перпендикулярными прямыми, одна из которых проходит через центр, а другая проходит на расстоянии 0.02 мм от центра, на 4 части, тогда одна из меньших частей является указанным зерном. Найдите коэффициент сферичности k этого зерна исходя из формулы $k=\sqrt{\frac{d}{D}}$, где d – диаметр вписанной в указанную фигуру окружности, а D – диаметр описанной вокруг фигуры окружности.

Решение.

Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O, пусть отрезки OA и OB – радиусы круга, при этом угол AOB острый. Из точки A опустим перпендикуляр на радиус OB, основание этого перпендикуляра обозначим через Q, длину отрезка OQ обозначим через h. Полученный криволинейный треугольник с катетами – отрезками прямых QA и QB и гипотенузой – дугой AB, является фигурой, коэффициент сферичности которой требуется найти. Длина катета QB равна R-h, длина катета QA равна $\sqrt{R^2-h^2}$. Пусть точка P – центр окружности радиуса r, касающейся отрезков QA, QB и дуги AB соответственно в точках M,N и K. Тогда OP=R-r, QM=QN=r, ON=h+r. Из треугольника OPN имеем равенство

$$OP^2=ON^2+NP^2 \Leftrightarrow (R-r)^2=(h+r)^2+r^2 \Leftrightarrow r=\sqrt{2R(R+h)}-(R+h).$$

Центр описанной вокруг криволинейного треугольника ABQ окружности находится на середине отрезка AB. Радиус описанной окружности равен

$$R_1=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{QA^2+QB^2}=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-h^2+(R-h)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2R(R-h)}.$$

Отсюда получаем искомое значение коэффициента сферичности k из равенства

$$k^2=2(\sqrt{2R(R+h)}-(R+h))/\sqrt{2R(R-h)}.$$

Подставляя значения R=0.2, h=0.02, получим

Ответ: *k*=0.756

3.2 При изучении морфологии песчаных зерен под микроскопом обнаружено зерно неправильной формы: две стороны являются катетами, соединяющая их сторона представляет собой дугу окружности. Эту фигуру неправильной формы можно получить так: круг радиуса 0.2 мм делится двумя перпендикулярными прямыми, одна из которых проходит через центр, а другая проходит на расстоянии 0.04 мм от центра, на 4 части, тогда одна из меньших частей является указанным зерном. Найдите коэффициент сферичности k этого зерна исходя из формулы $k=\sqrt{\frac{d}{D}}$, где d – диаметр вписанной в указанную фигуру окружности, а D – диаметр описанной вокруг фигуры окружности.

Решение.

Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O, пусть отрезки OA и OB – радиусы круга, при этом угол AOB острый. Из точки A опустим перпендикуляр на радиус OB, основание этого перпендикуляра обозначим через Q, длину отрезка OQ обозначим через h. Полученный криволинейный треугольник с катетами – отрезками прямых QA и QB и гипотенузой – дугой AB, является фигурой, коэффициент сферичности которой требуется найти. Длина катета QB равна R-h, длина катета QA равна $\sqrt{R^2-h^2}$. Пусть точка P – центр окружности радиуса r, касающейся отрезков

QA, QB и дуги AB соответственно в точках M,N и K. Тогда OP=R-r, QM=QN=r, ON=h+r. Из треугольника OPN имеем равенство

$$OP^2 = ON^2 + NP^2 \Leftrightarrow (R-r)^2 = (h+r)^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2R(R+h)} - (R+h).$$

Центр описанной вокруг криволинейного треугольника ABQ окружности находится на середине отрезка AB. Радиус описанной окружности равен

$$R_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{QA^2 + QB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - h^2 + (R-h)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2R(R-h)}.$$

Отсюда получаем искомое значение коэффициента сферичности k из равенства

$$k^2 = 2(\sqrt{2R(R+h)} - (R+h)) / \sqrt{2R(R-h)}.$$

Подставляя значения R=0.2, h=0.04, получим

Ответ: *k*=0.743

3.3 При изучении морфологии песчаных зерен под микроскопом обнаружено зерно неправильной формы: две стороны являются катетами, соединяющая их сторона представляет собой дугу окружности. Эту фигуру неправильной формы можно получить так: круг радиуса 0.2 мм делится двумя перпендикулярными прямыми, одна из которых проходит через центр, а другая проходит на расстоянии 0.06 мм от центра, на 4 части, тогда одна из меньших частей является указанным зерном. Найдите коэффициент сферичности k этого зерна исходя из формулы $k = \sqrt{\frac{d}{D}}$, где d – диаметр вписанной в указанную фигуру окружности, а D – диаметр описанной вокруг фигуры окружности.

Решение.

Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O, пусть отрезки OA и OB – радиусы круга, при этом угол AOB острый. Из точки A опустим перпендикуляр на радиус OB, основание этого перпендикуляра обозначим через Q, длину отрезка OQ обозначим через h. Полученный криволинейный треугольник с катетами – отрезками прямых QA и QB и гипотенузой – дугой AB, является фигурой, коэффициент сферичности которой требуется найти. Длина катета QB равна R-h, длина катета QA равна $\sqrt{R^2 - h^2}$. Пусть точка P – центр окружности радиуса r, касающейся отрезков QA, QB и дуги AB соответственно в точках M,N и K. Тогда OP=R-r, QM=QN=r, ON=h+r. Из треугольника OPN имеем равенство

$$OP^2 = ON^2 + NP^2 \Leftrightarrow (R-r)^2 = (h+r)^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2R(R+h)} - (R+h).$$

Центр описанной вокруг криволинейного треугольника ABQ окружности находится на середине отрезка AB. Радиус описанной окружности равен

$$R_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{QA^2 + QB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - h^2 + (R-h)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2R(R-h)}.$$

Отсюда получаем искомое значение коэффициента сферичности k из равенства

$$k^2 = 2(\sqrt{2R(R+h)} - (R+h)) / \sqrt{2R(R-h)}.$$

Подставляя значения R=0.2, h=0.06, получим

Ответ: *k*=0.727

3.4 При изучении морфологии песчаных зерен под микроскопом обнаружено зерно неправильной формы: две стороны являются катетами, соединяющая их сторона представляет собой дугу окружности. Эту фигуру неправильной формы можно получить так: круг радиуса 0.2 мм делится двумя перпендикулярными прямыми, одна из которых проходит через центр, а другая проходит на расстоянии 0.1 мм от центра, на 4 части, тогда одна из меньших частей является указанным зерном. Найдите коэффициент сферичности k этого зерна исходя из формулы $k=\sqrt{\frac{d}{D}}$, где d – диаметр вписанной в указанную фигуру окружности, а D – диаметр описанной вокруг фигуры окружности.

Решение.

Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O, пусть отрезки OA и OB – радиусы круга, при этом угол AOB острый. Из точки A опустим перпендикуляр на радиус OB, основание этого перпендикуляра обозначим через Q, длину отрезка OQ обозначим через h. Полученный криволинейный треугольник с катетами – отрезками прямых QA и QB и гипотенузой – дугой AB, является фигурой, коэффициент сферичности которой требуется найти. Длина катета QB равна R-h, длина катета QA равна $\sqrt{R^2-h^2}$. Пусть точка P – центр окружности радиуса r, касающейся отрезков QA, QB и дуги AB соответственно в точках M,N и K. Тогда OP=R-r, QM=QN=r, ON=h+r. Из треугольника OPN имеем равенство

$$OP^2=ON^2+NP^2 \Leftrightarrow (R-r)^2=(h+r)^2+r^2 \Leftrightarrow r=\sqrt{2R(R+h)}-(R+h).$$

Центр описанной вокруг криволинейного треугольника ABQ окружности находится на середине отрезка AB. Радиус описанной окружности равен

$$R_1=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{QA^2+QB^2}=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-h^2+(R-h)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2R(R-h)}.$$

Отсюда получаем искомое значение коэффициента сферичности k из равенства

$$k^2=2(\sqrt{2R(R+h)}-(R+h))/\sqrt{2R(R-h)}.$$

Подставляя значения R=0.2, h=0.1, получим

Ответ: *k*=0.681

3.5 При изучении морфологии песчаных зерен под микроскопом обнаружено зерно неправильной формы: две стороны являются катетами, соединяющая их сторона представляет собой дугу окружности. Эту фигуру неправильной формы можно получить так: круг радиуса 0.2 мм делится двумя перпендикулярными прямыми, одна из которых проходит через центр, а другая проходит на расстоянии 0.12 мм от центра, на 4 части, тогда одна из меньших частей является указанным зерном. Найдите коэффициент сферичности k этого зерна исходя из формулы $k=\sqrt{\frac{d}{D}}$, где d – диаметр вписанной в указанную фигуру окружности, а D – диаметр описанной вокруг фигуры окружности.

Решение.

Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O, пусть отрезки OA и OB – радиусы круга, при этом угол AOB острый. Из точки A опустим перпендикуляр на радиус OB, основание этого перпендикуляра обозначим через Q, длину отрезка OQ обозначим через h. Полученный криволинейный треугольник с катетами – отрезками прямых QA и QB и гипотенузой – дугой AB, является фигурой, коэффициент сферичности которой требуется найти. Длина катета QB равна R-h, длина катета QA равна $\sqrt{R^2-h^2}$. Пусть точка P – центр окружности радиуса r, касающейся отрезков QA, QB и дуги AB соответственно в точках M,N и K. Тогда OP=R-r, QM=QN=r, ON=h+r. Из треугольника OPN имеем равенство

$$OP^2=ON^2+NP^2 \Leftrightarrow (R-r)^2=(h+r)^2+r^2 \Leftrightarrow r=\sqrt{2R(R+h)}-(R+h).$$

Центр описанной вокруг криволинейного треугольника ABQ окружности находится на середине отрезка AB. Радиус описанной окружности равен

$$R_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{QA^2 + QB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - h^2 + (R-h)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2R(R-h)}.$$

Отсюда получаем искомое значение коэффициента сферичности k из равенства

$$k^2 = 2(\sqrt{2R(R+h)} - (R+h)) / \sqrt{2R(R-h)}.$$

Подставляя значения R=0.2, h=0.12, получим

Ответ: k=0.65

3.6 При изучении морфологии песчаных зерен под микроскопом обнаружено зерно неправильной формы: две стороны являются катетами, соединяющая их сторона представляет собой дугу окружности. Эту фигуру неправильной формы можно получить так: круг радиуса 0.2 мм делится двумя перпендикулярными прямыми, одна из которых проходит через центр, а другая проходит на расстоянии 0.14 мм от центра, на 4 части, тогда одна из меньших частей является указанным зерном. Найдите коэффициент сферичности k этого зерна исходя из формулы $k = \sqrt{\frac{d}{D}}$, где d – диаметр вписанной в указанную фигуру окружности, а D – диаметр описанной вокруг фигуры окружности.

Решение.

Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O, пусть отрезки OA и OB – радиусы круга, при этом угол AOB острый. Из точки A опустим перпендикуляр на радиус OB, основание этого перпендикуляра обозначим через Q, длину отрезка OQ обозначим через h. Полученный криволинейный треугольник с катетами – отрезками прямых QA и QB и гипотенузой – дугой AB, является фигурой, коэффициент сферичности которой требуется найти. Длина катета QB равна R-h, длина катета QA равна $\sqrt{R^2 - h^2}$. Пусть точка P – центр окружности радиуса r, касающейся отрезков QA, QB и дуги AB соответственно в точках M,N и K. Тогда OP=R-r, QM=QN=r, ON=h+r. Из треугольника OPN имеем равенство

$$OP^2 = ON^2 + NP^2 \Leftrightarrow (R-r)^2 = (h+r)^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2R(R+h)} - (R+h).$$

Центр описанной вокруг криволинейного треугольника ABQ окружности находится на середине отрезка AB. Радиус описанной окружности равен

$$R_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{QA^2 + QB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - h^2 + (R-h)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2R(R-h)}.$$

Отсюда получаем искомое значение коэффициента сферичности k из равенства

$$k^2 = 2(\sqrt{2R(R+h)} - (R+h)) / \sqrt{2R(R-h)}.$$

Подставляя значения R=0.2, h=0.14, получим

Ответ: k=0.61

3.7 При изучении морфологии песчаных зерен под микроскопом обнаружено зерно неправильной формы: две стороны являются катетами, соединяющая их сторона представляет собой дугу окружности. Эту фигуру неправильной формы можно получить так: круг радиуса 0.2 мм делится двумя перпендикулярными прямыми, одна из которых проходит через центр, а другая проходит на расстоянии 0.16 мм от центра, на 4 части, тогда одна из меньших частей является указанным зерном. Найдите коэффициент сферичности k этого зерна исходя из формулы $k = \sqrt{\frac{d}{D}}$, где d – диаметр вписанной в указанную фигуру окружности, а D – диаметр описанной вокруг фигуры окружности.

Решение.

Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O, пусть отрезки OA и OB – радиусы круга, при этом угол AOB острый. Из точки A опустим перпендикуляр на радиус OB, основание этого перпендикуляра обозначим через Q, длину отрезка OQ обозначим через h. Полученный криволинейный треугольник с катетами – отрезками прямых QA и QB и гипотенузой – дугой AB, является фигурой, коэффициент сферичности которой требуется найти. Длина катета QB равна R-h, длина катета QA равна $\sqrt{R^2-h^2}$. Пусть точка P – центр окружности радиуса r, касающейся отрезков QA, QB и дуги AB соответственно в точках M,N и K. Тогда OP=R-r, QM=QN=r, ON=h+r. Из треугольника OPN имеем равенство

$$OP^2 = ON^2 + NP^2 \Leftrightarrow (R-r)^2 = (h+r)^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2R(R+h)} - (R+h).$$

Центр описанной вокруг криволинейного треугольника ABQ окружности находится на середине отрезка AB. Радиус описанной окружности равен

$$R_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{QA^2+QB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2-h^2+(R-h)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2R(R-h)}.$$

Отсюда получаем искомое значение коэффициента сферичности k из равенства

$$k^2 = 2(\sqrt{2R(R+h)} - (R+h)) / \sqrt{2R(R-h)}.$$

Подставляя значения R=0.2, h=0.16, получим

Ответ: *k*=0.555

3.8 При изучении морфологии песчаных зерен под микроскопом обнаружено зерно неправильной формы: две стороны являются катетами, соединяющая их сторона представляет собой дугу окружности. Эту фигуру неправильной формы можно получить так: круг радиуса 0.2 мм делится двумя перпендикулярными прямыми, одна из которых проходит через центр, а другая проходит на расстоянии 0.18 мм от центра, на 4 части, тогда одна из меньших частей является указанным зерном. Найдите коэффициент сферичности k этого зерна исходя из формулы $k=\sqrt{\frac{d}{D}}$, где d – диаметр вписанной в указанную фигуру окружности, а D – диаметр описанной вокруг фигуры окружности.

Решение.

Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O, пусть отрезки OA и OB – радиусы круга, при этом угол AOB острый. Из точки A опустим перпендикуляр на радиус OB, основание этого перпендикуляра обозначим через Q, длину отрезка OQ обозначим через h. Полученный криволинейный треугольник с катетами – отрезками прямых QA и QB и гипотенузой – дугой AB, является фигурой, коэффициент сферичности которой требуется найти. Длина катета QB равна R-h, длина катета QA равна $\sqrt{R^2-h^2}$. Пусть точка P – центр окружности радиуса r, касающейся отрезков QA, QB и дуги AB соответственно в точках M,N и K. Тогда OP=R-r, QM=QN=r, ON=h+r. Из треугольника OPN имеем равенство

$$OP^2 = ON^2 + NP^2 \Leftrightarrow (R-r)^2 = (h+r)^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2R(R+h)} - (R+h).$$

Центр описанной вокруг криволинейного треугольника ABQ окружности находится на середине отрезка AB. Радиус описанной окружности равен

$$R_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{QA^2+QB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2-h^2+(R-h)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2R(R-h)}.$$

Отсюда получаем искомое значение коэффициента сферичности k из равенства

$$k^2 = 2(\sqrt{2R(R+h)} - (R+h)) / \sqrt{2R(R-h)}.$$

Подставляя значения R=0.2, h=0.18, получим

Ответ: k=0.47

Задание 4.

Задача 4.1. Залежи ископаемых часто сопровождаются появлением дополнительных электрических и магнитных полей в окружающем пространстве. Обнаружение и изучение аномальных электрических полей на земной поверхности с целью поиска полезных ископаемых составляет суть метода электроразведки.

В недоступную для наблюдения часть пустого пространства, находящуюся под горизонтальной плоскостью, поместили точечный электрический заряд. Исследование показало, что на двух взаимно перпендикулярных прямых *Ox* и *Oy*, лежащих в этой плоскости и пересекающихся в некоторой точке *O*, зависимость модуля напряженности электрического поля от координаты точки на прямой, $E(x)$ и $E(y)$, имеет схематический вид, представленный на рисунках. Максимальное значение E на прямой *Ox* достигается при $x = a$ = 500 м и равно $E_a = 36\cdot10^{-3}$ В/м, а на прямой *Oy* достигается при $y = b$ = 300 м и равно $E_b = 22\cdot10^{-3}$ В/м. На каком расстоянии от плоскости находится заряд?

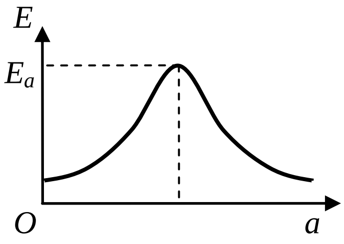


Рис. 1

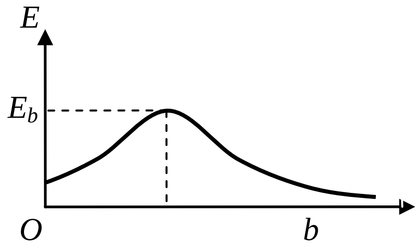


Рис. 2

Решение

Модуль E напряженности электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него равен

$$E = \frac{k|q|}{r^2}.$$

Поэтому на осях *Ox* и *Oy* максимум E достигается в точках, ближайших к заряду q, то есть лежащих в основании перпендикуляров, опущенных на оси *Ox* и *Oy* из точки, куда помещен заряд q. Таким образом, заряд q лежит на линии пересечения вертикальных плоскостей, проведенных перпендикулярно осям *Ox* и *Oy* через точки $x = a$ и $y = b$. Эта вертикальная прямая пересекает горизонтальную плоскость в точке $M(a,b)$. Пусть заряд находится на глубине h под горизонтальной плоскостью. Тогда

$$E_a = \frac{k|q|}{h^2 + b^2}, \quad E_b = \frac{k|q|}{h^2 + a^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{h^2 + a^2}{h^2 + b^2}.$$

Из этого равенства находим

$$h = \sqrt{\frac{a^2 E_b - b^2 E_a}{E_a - E_b}} = \sqrt{\frac{25\cdot10^4\cdot22\cdot10^{-3} - 9\cdot10^4\cdot36\cdot10^{-3}}{14\cdot10^{-3}}} \approx 402 \text{ м}.$$

Ответ: $h \approx 402$ м

Задача 4.2. Залежи ископаемых часто сопровождаются появлением дополнительных электрических и магнитных полей в окружающем пространстве. Обнаружение и изучение аномальных электрических полей на земной поверхности с целью поиска полезных ископаемых составляет суть метода электроразведки.

В недоступную для наблюдения часть пустого пространства, находящуюся под горизонтальной плоскостью, поместили точечный электрический заряд. Исследование показало, что на двух взаимно перпендикулярных прямых *Ox* и *Oy*, лежащих в этой плоскости и пересекающихся в некоторой точке *O*, зависимость модуля напряженности электрического поля от координаты точки на прямой, $E(x)$ и $E(y)$, имеет схематический вид, представленный на рисунках. Максимальное значение E на прямой Ox достигается при $x = a = 800$ м и равно $E_a = 70\cdot10^{-3}$ В/м, а на прямой Oy достигается при $y = b = 400$ м и равно $E_b = 32\cdot10^{-3}$ В/м. На каком расстоянии от плоскости находится заряд?

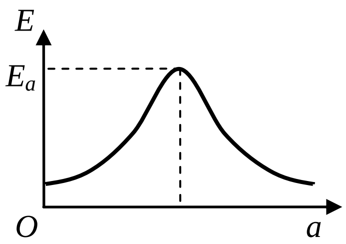


Рис. 1

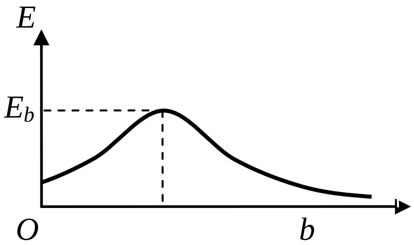


Рис. 2

Решение

Модуль E напряженности электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него равен

$$E = \frac{k|q|}{r^2}.$$

Поэтому на осях Ox и Oy максимум E достигается в точках, ближайших к заряду q, то есть лежащих в основании перпендикуляров, опущенных на оси Ox и Oy из точки, куда помещен заряд q. Таким образом, заряд q лежит на линии пересечения вертикальных плоскостей, проведенных перпендикулярно осям Ox и Oy через точки $x = a$ и $y = b$. Эта вертикальная прямая пересекает горизонтальную плоскость в точке $M(a,b)$. Пусть заряд находится на глубине h под горизонтальной плоскостью. Тогда

$$E_a = \frac{k|q|}{h^2 + b^2}, \quad E_b = \frac{k|q|}{h^2 + a^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{h^2 + a^2}{h^2 + b^2}.$$

Из этого равенства находим

$$h = \sqrt{\frac{a^2E_b - b^2E_a}{E_a - E_b}} = \sqrt{\frac{64\cdot10^4\cdot32\cdot10^{-3} - 16\cdot10^4\cdot70\cdot10^{-3}}{38\cdot10^{-3}}} \approx 494\,\text{м}.$$

Ответ: $h \approx 494$ м

Задача 4.3. Залежи ископаемых часто сопровождаются появлением дополнительных электрических и магнитных полей в окружающем пространстве. Обнаружение и изучение аномальных электрических полей на земной поверхности с целью поиска полезных ископаемых составляет суть метода электроразведки.

В недоступную для наблюдения часть пустого пространства, находящуюся под горизонтальной плоскостью, поместили точечный электрический заряд. Исследование показало, что на двух взаимно перпендикулярных прямых Ox и Oy, лежащих в этой плоскости и пересекающихся в некоторой точке *O*, зависимость модуля напряженности электрического поля от координаты точки на прямой, $E(x)$ и $E(y)$, имеет схематический

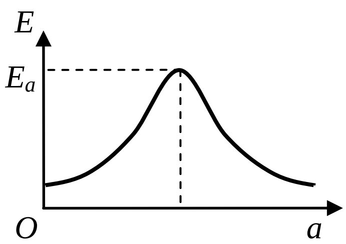


Рис. 1

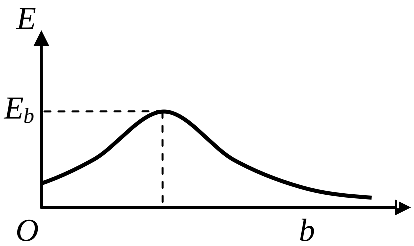


Рис. 2

вид, представленный на рисунках. Максимальное значение E на прямой Ox достигается при $x = a = 500$ м и равно $E_a = 36\cdot10^{-3}$ В/м, а на прямой Oy достигается при $y = b = 300$ м и равно $E_b = 22\cdot10^{-3}$ В/м. Каков модуль заряда q?

Решение

Модуль E напряженности электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него равен

$$E = \frac{k|q|}{r^2}.$$

Поэтому на осях Ox и Oy максимум E достигается в точках, ближайших к заряду q, то есть лежащих в основании перпендикуляров, опущенных на оси Ox и Oy из точки, куда помещен заряд q. Таким образом, заряд q лежит на линии пересечения вертикальных плоскостей, проведенных перпендикулярно осям Ox и Oy через точки $x = a$ и $y = b$. Эта вертикальная прямая пересекает горизонтальную плоскость в точке $M(a,b)$. Пусть заряд находится на глубине h под горизонтальной плоскостью. Тогда

$$E_a = \frac{k|q|}{h^2 + b^2}, \quad E_b = \frac{k|q|}{h^2 + a^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{h^2 + a^2}{h^2 + b^2}.$$

Из этого равенства находим

$$h^2 = \frac{a^2 E_b - b^2 E_a}{E_a - E_b}.$$

Тогда для модуля заряда получаем

$$|q| = \frac{E_a\left(h^2 + b^2\right)}{k} = \frac{E_a E_b}{k}\cdot\frac{a^2 - b^2}{E_a - E_b} = \frac{36\cdot10^{-3}\cdot22\cdot10^{-3}}{9\cdot10^9}\cdot\frac{25\cdot10^4 - 9\cdot10^4}{36\cdot10^{-3} - 22\cdot10^{-3}} \approx 1{,}0\cdot10^{-6}\text{Кл}.$$

Ответ: $|q| \approx 1{,}0\cdot10^{-6}$ Кл

Задача 4.4. Залежи ископаемых часто сопровождаются появлением дополнительных электрических и магнитных полей в окружающем пространстве. Обнаружение и изучение аномальных электрических полей на земной поверхности с целью поиска полезных ископаемых составляет суть метода электроразведки.

В недоступную для наблюдения часть пустого пространства, находящуюся под горизонтальной плоскостью, поместили точечный электрический заряд q. Исследование показало, что на двух взаимно перпендикулярных прямых Ox и Oy, лежащих в этой плоскости и пересекающихся в некоторой точке O, зависимость модуля напряженности электрического поля от координаты точки на прямой, $E(x)$ и $E(y)$, имеет схематический вид, представленный на рисунках. Максимальное значение E на прямой Ox достигается при $x = a = 800$ м и равно $E_a = 70\cdot10^{-3}$ В/м, а на прямой Oy достигается при $y = b = 400$ м и равно $E_b = 32\cdot10^{-3}$ В/м. Каков модуль заряда q?

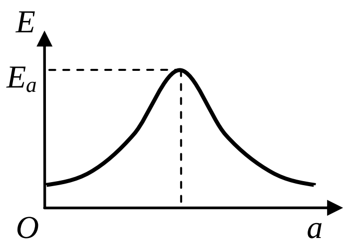


Рис. 1

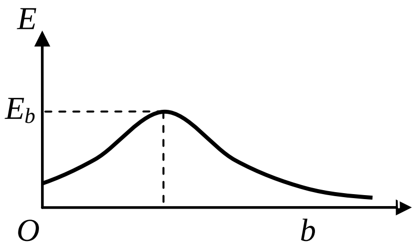


Рис. 2

Решение

Модуль E напряженности электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него равен

$$E = \frac{k|q|}{r^2}.$$

Поэтому на осях Ox и Oy максимум E достигается в точках, ближайших к заряду q, то есть лежащих в основании перпендикуляров, опущенных на оси Ox и Oy из точки, куда помещен заряд q. Таким образом, заряд q лежит на линии пересечения вертикальных плоскостей, проведенных перпендикулярно осям Ox и Oy через точки $x = a$ и $y = b$. Эта вертикальная прямая пересекает горизонтальную плоскость в точке $M(a,b)$. Пусть заряд находится на глубине h под горизонтальной плоскостью. Тогда

$$E_a = \frac{k|q|}{h^2 + b^2}, \quad E_b = \frac{k|q|}{h^2 + a^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{h^2 + a^2}{h^2 + b^2}.$$

Из этого равенства находим

$$h^2 = \frac{a^2 E_b - b^2 E_a}{E_a - E_b}.$$

Тогда для модуля заряда получаем

$$|q| = \frac{E_a\left(h^2 + b^2\right)}{k} = \frac{E_a E_b}{k} \cdot \frac{a^2 - b^2}{E_a - E_b} = \frac{70 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{64 \cdot 10^4 - 16 \cdot 10^4}{70 \cdot 10^{-3} - 32 \cdot 10^{-3}} \approx 3{,}1 \cdot 10^{-6}\,\text{Кл}.$$

Ответ: $|q| \approx 3{,}1 \cdot 10^{-6}$ Кл

Задача 4.5. Залежи ископаемых часто сопровождаются появлением дополнительных электрических и магнитных полей в окружающем пространстве. Обнаружение и изучение аномальных электрических полей на земной поверхности с целью поиска полезных ископаемых составляет суть метода электроразведки.

В недоступную для наблюдения часть пустого пространства, находящуюся под горизонтальной плоскостью, поместили точечный электрический заряд. Исследование показало, что на двух взаимно перпендикулярных прямых Ox и Oy, лежащих в этой плоскости и пересекающихся в некоторой точке O, зависимость модуля напряженности электрического поля от координаты точки на прямой, $E(x)$ и $E(y)$, имеет схематический вид, представленный на рисунках.

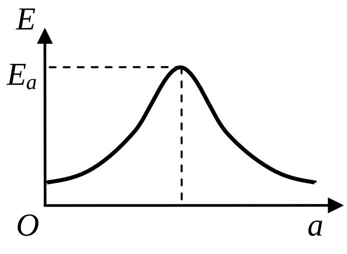


Рис. 1

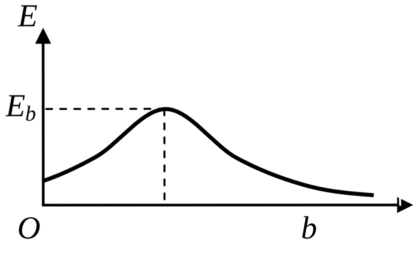


Рис. 2

Максимальное значение E на прямой Ox достигается при $x = a = 500$ м и равно $E_a = 36 \cdot 10^{-3}$ В/м, а на прямой Oy достигается при $y = b = 300$ м и равно $E_b = 22 \cdot 10^{-3}$ В/м. Какова максимальная величина E_{max} модуля напряженности электрического поля на плоскости?

Решение

Модуль E напряженности электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него равен

$$E = \frac{k|q|}{r^2}.$$

Поэтому на осях Ox и Oy максимум E достигается в точках, ближайших к заряду q, то есть лежащих в основании перпендикуляров, опущенных на оси Ox и Oy из точки, куда помещен заряд q. Таким образом, заряд q лежит на линии пересечения вертикальных плоскостей, проведенных перпендикулярно осям Ox и Oy через точки $x = a$ и $y = b$. Эта вертикальная прямая пересекает горизонтальную плоскость в точке $M(a,b)$. Пусть заряд находится на глубине h под горизонтальной плоскостью. Тогда

$$E_a = \frac{k|q|}{h^2 + b^2}, \quad E_b = \frac{k|q|}{h^2 + a^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{h^2 + a^2}{h^2 + b^2}.$$

Из этого равенства находим

$$h^2 = \frac{a^2 E_b - b^2 E_a}{E_a - E_b}.$$

Тогда для максимальной величины E_{max} модуля напряженности электрического поля на плоскости, то есть для E в точке $M(a,b)$, получаем

$$E_{max} = \frac{k|q|}{h^2} = E_a \frac{h^2 + b^2}{h^2} = \frac{E_a E_b\left(a^2 - b^2\right)}{a^2 E_b - b^2 E_a} = \frac{36 \cdot 10^{-3} \cdot 22 \cdot 10^{-3}\left(25 \cdot 10^4 - 9 \cdot 10^4\right)}{25 \cdot 10^4 \cdot 22 \cdot 10^{-3} - 9 \cdot 10^4 \cdot 36 \cdot 10^{-3}} \approx 56 \cdot 10^{-3}\text{ В/м}.$$

Ответ: $E_{max} \approx 56 \cdot 10^{-3}$ В/м

Задача 4.6. Залежи ископаемых часто сопровождаются появлением дополнительных электрических и магнитных полей в окружающем пространстве. Обнаружение и изучение аномальных электрических полей на земной поверхности с целью поиска полезных ископаемых составляет суть метода электроразведки.

В недоступную для наблюдения часть пустого пространства, находящуюся под горизонтальной плоскостью, поместили точечный электрический заряд q. Исследование показало, что на двух взаимно перпендикулярных прямых Ox и Oy, лежащих в этой плоскости и пересекающихся в некоторой точке O, зависимость модуля напряженности электрического поля от координаты точки на прямой, $E(x)$ и $E(y)$, имеет схематический вид, представленный на рисунках. Максимальное значение E на прямой Ox достигается при $x = a = 800$ м и равно $E_a = 70 \cdot 10^{-3}$ В/м, а на прямой Oy достигается при $y = b = 400$ м и равно $E_b = 32 \cdot 10^{-3}$ В/м. Какова максимальная величина E_{max} модуля напряженности электрического поля на плоскости?

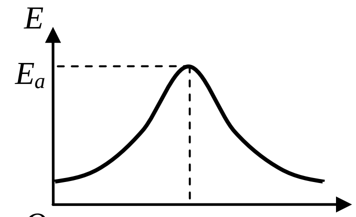


Рис. 1

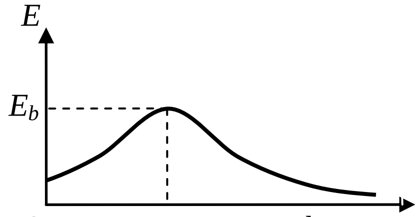


Рис. 2

Решение

Модуль E напряженности электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него равен

$$E = \frac{k|q|}{r^2}.$$

Поэтому на осях Ox и Oy максимум E достигается в точках, ближайших к заряду q, то есть лежащих в основании перпендикуляров, опущенных на оси Ox и Oy из точки, куда помещен заряд q. Таким образом, заряд q лежит на линии пересечения вертикальных плоскостей, проведенных перпендикулярно осям Ox и Oy через точки $x = a$ и $y = b$. Эта вертикальная прямая пересекает горизонтальную плоскость в точке $M(a,b)$. Пусть заряд находится на глубине h под горизонтальной плоскостью. Тогда

$$E_a = \frac{k|q|}{h^2 + b^2}, \quad E_b = \frac{k|q|}{h^2 + a^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{h^2 + a^2}{h^2 + b^2}.$$

Из этого равенства находим

$$h^2 = \frac{a^2 E_b - b^2 E_a}{E_a - E_b}.$$

Тогда для максимальной величины E_{max} модуля напряженности электрического поля на плоскости, то есть для E в точке $M(a,b)$, получаем

$$E_{max} = \frac{k|q|}{h^2} = E_a \frac{h^2 + b^2}{h^2} = \frac{E_a E_b \left(a^2 - b^2\right)}{a^2 E_b - b^2 E_a} = \frac{70 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3} \left(64 \cdot 10^4 - 16 \cdot 10^4\right)}{64 \cdot 10^4 \cdot 32 \cdot 10^{-3} - 16 \cdot 10^4 \cdot 70 \cdot 10^{-3}} \approx 116 \cdot 10^{-3}\ \text{В/м}.$$

Ответ: $E_{max} \approx 116 \cdot 10^{-3}$ В/м

Задача 4.7. Залежи ископаемых часто сопровождаются появлением дополнительных электрических и магнитных полей в окружающем пространстве. Обнаружение и изучение аномальных электрических полей на земной поверхности с целью поиска полезных ископаемых составляет суть метода электроразведки.

В недоступную для наблюдения часть пустого пространства, находящуюся под горизонтальной плоскостью, поместили точечный электрический заряд. Исследование показало, что на двух взаимно перпендикулярных прямых Ox и Oy, лежащих в этой плоскости и пересекающихся в некоторой точке O, зависимость модуля напряженности электрического поля от координаты точки на прямой, $E(x)$ и $E(y)$, имеет схематический вид, представленный на рисунках. Максимальное значение E на прямой Ox достигается при $x = a = 500$ м и равно $E_a = 36 \cdot 10^{-3}$ В/м, а на прямой Oy достигается при $y = b = 300$ м и равно $E_b = 22 \cdot 10^{-3}$ В/м. Каков модуль E_0 напряженности электрического поля в точке O?

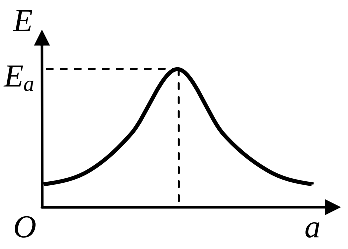


Рис. 1

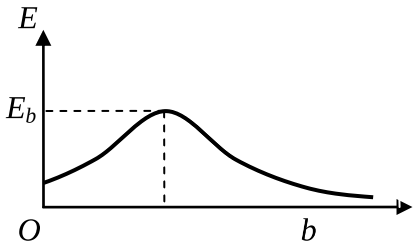


Рис. 2

Решение

Модуль E напряженности электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него равен

$$E = \frac{k|q|}{r^2}.$$

Поэтому на осях Ox и Oy максимум E достигается в точках, ближайших к заряду q, то есть лежащих в основании перпендикуляров, опущенных на оси Ox и Oy из точки, куда помещен заряд q. Таким образом, заряд q лежит на линии пересечения вертикальных плоскостей, проведенных перпендикулярно осям Ox и Oy через точки $x = a$ и $y = b$. Эта вертикальная прямая пересекает горизонтальную плоскость в точке $M(a,b)$. Пусть заряд находится на глубине h под горизонтальной плоскостью. Тогда

$$E_a = \frac{k|q|}{h^2 + b^2}, \quad E_b = \frac{k|q|}{h^2 + a^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{h^2 + a^2}{h^2 + b^2}.$$

Из этого равенства находим

$$h^2 = \frac{a^2 E_b - b^2 E_a}{E_a - E_b}.$$

Тогда для модуля напряженности электрического поля в точке O получаем

$$E_0 = \frac{k|q|}{h^2 + a^2 + b^2} = E_a \frac{h^2 + b^2}{h^2 + a^2 + b^2} = \frac{E_a E_b \left(a^2 - b^2\right)}{a^2 E_a - b^2 E_b} =$$

$$= \frac{36 \cdot 10^{-3} \cdot 22 \cdot 10^{-3} \left(25 \cdot 10^4 - 9 \cdot 10^4\right)}{25 \cdot 10^4 \cdot 36 \cdot 10^{-3} - 9 \cdot 10^4 \cdot 22 \cdot 10^{-3}} \approx 18 \cdot 10^{-3} \text{ В/м.}$$

Ответ: $E_0 \approx 18 \cdot 10^{-3}$ В/м

Задача 4.8. Залежи ископаемых часто сопровождаются появлением дополнительных электрических и магнитных полей в окружающем пространстве. Обнаружение и изучение аномальных электрических полей на земной поверхности с целью поиска полезных ископаемых составляет суть метода электроразведки.

В недоступную для наблюдения часть пустого пространства, находящуюся под горизонтальной плоскостью, поместили точечный электрический заряд q. Исследование показало, что на двух взаимно перпендикулярных прямых Ox и Oy, лежащих в этой плоскости и пересекающихся в некоторой точке O, зависимость модуля напряженности электрического поля от координаты точки на прямой, $E(x)$ и $E(y)$, имеет схематический вид, представленный на рисунках. Максимальное значение E на прямой Ox достигается при $x = a = 800$ м и равно $E_a = 70 \cdot 10^{-3}$ В/м, а на прямой Oy достигается при $y = b = 400$ м и равно $E_b = 32 \cdot 10^{-3}$ В/м. Каков модуль E_0 напряженности электрического поля в точке O?

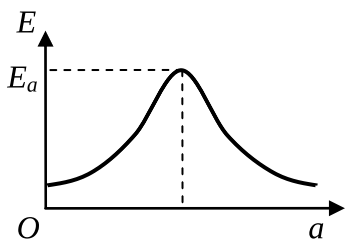


Рис. 1

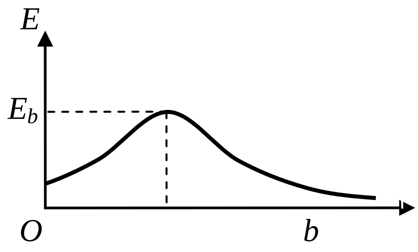


Рис. 2

Решение

Модуль E напряженности электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него равен

$$E = \frac{k|q|}{r^2}.$$

Поэтому на осях Ox и Oy максимум E достигается в точках, ближайших к заряду q, то есть лежащих в основании перпендикуляров, опущенных на оси Ox и Oy из точки, куда помещен заряд q. Таким образом, заряд q лежит на линии пересечения вертикальных плоскостей, проведенных перпендикулярно осям Ox и Oy через точки $x = a$ и $y = b$. Эта вертикальная прямая пересекает горизонтальную плоскость в точке $M(a,b)$. Пусть заряд находится на глубине h под горизонтальной плоскостью. Тогда

$$E_a = \frac{k|q|}{h^2 + b^2}, \quad E_b = \frac{k|q|}{h^2 + a^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{h^2 + a^2}{h^2 + b^2}.$$

Из этого равенства находим

$$h^2 = \frac{a^2 E_b - b^2 E_a}{E_a - E_b}.$$

Тогда для модуля напряженности электрического поля в точке O получаем

$$E_0 = \frac{k|q|}{h^2 + a^2 + b^2} = E_a \frac{h^2 + b^2}{h^2 + a^2 + b^2} = \frac{E_a E_b \left(a^2 - b^2\right)}{a^2 E_a - b^2 E_b} =$$

$$= \frac{70 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3} \left(64 \cdot 10^4 - 16 \cdot 10^4\right)}{64 \cdot 10^4 \cdot 70 \cdot 10^{-3} - 16 \cdot 10^4 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} \approx 27 \cdot 10^{-3} \text{ В/м.}$$

Ответ: $E_0 \approx 27 \cdot 10^{-3}$ В/м

Тестовые задания для разминки 2-го тура отборочного этапа:

Какого цвета изумруд?
Красного
Синего
Зеленого

Какого цвета сапфир?
Красного
Синего
Зеленого

Какого цвета рубин?
Красного
Синего
Зеленого

Как называется место на поверхности Земли с наибольшей силой землетрясения?
Эпицентр
Горячая точка
Кратер

Как называются небольшие неокатанные обломки горных пород?
Валуны
Мел
Гравий

Как называется полоса берега, сложенная песком и заливаемая морем?
Терраса
Пляж
Лагуна

Что образуется в результате карстовых процессов?
Пещера
Кратер
Пляж

Чему равен средний радиус планеты Земля?
150 км
999 км
6371 км

Чему равна средняя плотность планеты Земля?
500 г/см^3
1000 г/см^3
5500 г/см^3

Чему равна плотность воды?
1000 г/см^3
1500 г/см^3
5500 г/см^3

Содержание какого газа самое высокое в атмосфере планеты Земля?
Азота
Водорода
Гелия

Укажите самое распространенное химическое соединение в земной коре.
H_2O
CaO
SiO_2

Укажите температуру замерзания воды.
0^0C
3^0C
7^0C

Какая горная порода имеет магматическое происхождение?
Гранит
Глина
Известняк

Какая порода относится к группе осадочных горных пород?
Гранит
Известняк
Базальт

Какие горные породы слагают около 90% объема земной коры?
Осадочные карбонатные
Осадочные глинистые
Магматические и метаморфические

Как называются расплавленные горные породы, изливающиеся из жерла вулкана?
Магма
Гидротермы
Лава

Как называются расплавленные горные породы, находящиеся в земных недрах?
Магма
Гидротермы
Лава

Что относится к продуктам извержения вулкана?
Пепел
Глина
Мрамор

ЗАДАНИЯ ТРЕТЬЕГО ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задание 1

1.1. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен.

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, $x+11y=11$, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{11}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(11,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(11,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{33}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{11}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 11.

Ответ: 11

1.2. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, $x+13y=13$, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{13}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(13,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(13,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{39}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{13}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 13.

Ответ: 13

1.3. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, *x+17y=17*, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{17}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(17,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(17,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{51}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{17}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 17.

Ответ: 17

1.4. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, *x+19y=19*, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{19}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(19,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(19,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{57}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{19}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 19.

Ответ: 19

1.5. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, *x+23y=23*, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{23}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(23,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(23,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{69}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{23}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 23.

Ответ: 23

1.6. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен.

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, *x+29y=29*, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{29}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(29,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(29,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{87}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{29}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 29.

Ответ: 29

1.7. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен.

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, *x+31y=31*, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{31}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(31,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(31,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{93}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{31}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 31.

Ответ: 31

1.8. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен.

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, *x+37y=37*, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{37}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(37,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(37,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{111}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{37}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 37.

Ответ: 37

Задание 2

2.1. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, имеет массу $m = 1$ кг и движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля его скорости: $F_{\text{сопр}} = \beta\upsilon^2$ ($\beta = 3\cdot10^{-3}$ кг/м). Найти величину v скорости камня в наивысшей точке его траектории, если величина его ускорения в этой точке в $n = 1{,}4$ раза больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{\text{сопр}}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{\text{сопр}}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{\text{сопр}}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\,.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\beta}\sqrt{n^2 - 1}} = \sqrt{\frac{1\cdot10}{3\cdot10^{-3}}\sqrt{1{,}4^2 - 1}} \approx 57\,\text{м/с}.$$

Ответ: $v \approx 57$ м/с.

2.2. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, имеет массу $m = 0{,}5$ кг и движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля его скорости: $F_{\text{сопр}} = \beta\upsilon^2$ ($\beta = 2\cdot10^{-3}$ кг/м). Найти величину v скорости камня в наивысшей точке его траектории, если величина его ускорения в этой точке в $n = 1{,}3$ раза больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{\text{сопр}}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{\text{сопр}}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{\text{сопр}}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\,.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\beta}\sqrt{n^2 - 1}} = \sqrt{\frac{0{,}5\cdot10}{2\cdot10^{-3}}\sqrt{1{,}3^2 - 1}} \approx 46\,\text{м/с}.$$

Ответ: $v \approx 46$ м/с.

2.3. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля скорости: $F_{\text{сопр}} = \beta \upsilon^2$ ($\beta = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/м). В наивысшей точке траектории скорость камня $\upsilon = 45$ м/с, а модуль его ускорения в этой точке в $n = 1{,}3$ раза больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$. Найти массу m камня.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{\text{сопр}}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{\text{сопр}}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{\text{сопр}}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\,.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$m = \frac{\beta v^2}{g\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 45^2}{10\sqrt{1{,}3^2 - 1}} \approx 0{,}49\,\text{кг}.$$

Ответ: $m \approx 0{,}49$ кг.

2.4. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля скорости: $F_{\text{сопр}} = \beta \upsilon^2$ ($\beta = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/м). В наивысшей точке траектории скорость камня $\upsilon = 50$ м/с, а модуль его ускорения в этой точке в $n = 1{,}4$ раза больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$. Найти массу m камня.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{\text{сопр}}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{\text{сопр}}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{\text{сопр}}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\,.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$m = \frac{\beta v^2}{g\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 50^2}{10\sqrt{1{,}4^2 - 1}} \approx 0{,}64\,\text{кг}.$$

Ответ: $m \approx 0{,}64$ кг.

2.5. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, имеет массу $m = 1$ кг и движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля его скорости: $F_{сопр} = \beta \upsilon^2$. В наивысшей точке траектории скорость камня равна $\upsilon = 50$ м/с, а модуль его ускорения в этой точке в $n = 1{,}4$ раза больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$. Найти коэффициент β.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{сопр}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{сопр}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{сопр}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\,.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$\beta = \frac{mg\sqrt{n^2 - 1}}{v^2} = \frac{1 \cdot 10 \cdot \sqrt{1{,}4^2 - 1}}{50^2} \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}.$$

Ответ: $\beta \approx 4 \cdot 10^{-3}$ кг/м.

2.6. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, имеет массу $m = 0{,}5$ кг и движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля его скорости: $F_{сопр} = \beta \upsilon^2$. В наивысшей точке траектории скорость камня равна $\upsilon = 45$ м/с, а модуль его ускорения в этой точке в $n = 1{,}3$ раза больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$. Найти коэффициент β.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{сопр}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{сопр}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{сопр}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\,.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$\beta = \frac{mg\sqrt{n^2 - 1}}{v^2} = \frac{0{,}5 \cdot 10 \cdot \sqrt{1{,}3^2 - 1}}{45^2} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}.$$

Ответ: $\beta \approx 2 \cdot 10^{-3}$ кг/м.

2.7. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, имеет массу $m = 1$ кг и движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля его скорости: $F_{сопр} = \beta\upsilon^2$ ($\beta = 3\cdot10^{-3}$ кг/м). В наивысшей точке траектории скорость камня равна $\upsilon = 50$ м/с, а модуль его ускорения в этой точке в n раз больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$. Найти n.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{сопр}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{сопр}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{сопр}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\,.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$n = \sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{3\cdot10^{-3}\cdot50^2}{1\cdot10}\right)^2 + 1} = 1{,}25\,.$$

Ответ: n = 1,25.

2.8. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, имеет массу $m = 0{,}5$ кг и движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля его скорости: $F_{сопр} = \beta\upsilon^2$ ($\beta = 2\cdot10^{-3}$ кг/м). В наивысшей точке траектории скорость камня равна $\upsilon = 45$ м/с, а модуль его ускорения в этой точке в n раз больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$. Найти n.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{сопр}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{сопр}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{сопр}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\,.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$n = \sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{2\cdot10^{-3}\cdot45^2}{0{,}5\cdot10}\right)^2 + 1} \approx 1{,}29\,.$$

Ответ: $n \approx$ 1,29.

Задание 3

3.1. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $10\sin(\frac{x}{20})+10\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 7.5 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a*,*b*,*c*, где *b*>*c*, указанная в условии разность глубин равна

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})+2c\cdot\sin^2(\frac{x}{40})=a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c.$$

Эта разность не менее величины *b* тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\geq b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\leq-(b-c),$$

где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi-u-v\leq\frac{x}{20}\leq\pi-u+v$, $0\leq x\leq 20$, где $v=\arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi-u-v)$>0. Для заданных значений a=10, b=7.5, c=5 получим $x_{\min}$=13.78<20.

Ответ: 14 км

3.2. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $9\sin(\frac{x}{20})+10\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 6.5 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a*,*b*,*c*, где *b*>*c*, указанная в условии разность глубин равна

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})+2c\cdot\sin^2(\frac{x}{40})=a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c.$$

Эта разность не менее величины *b* тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\geq b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\leq-(b-c),$$

где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi - u - v \le \dfrac{x}{20} \le \pi - u + v$, $0 \le x \le 20$, где $v = \arccos(\dfrac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}}) \in (0, \dfrac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi - u - v) > 0$. Для заданных значений a=9, b=6.5, c=5 получим $x_{\min}$ =13.07<20.

Ответ: 13 км

3.3. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $8\sin(\dfrac{x}{20}) + 8\sin^2(\dfrac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 6.5 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a,b,c,* где *b>c,* указанная в условии разность глубин равна

$$a \cdot \sin(\frac{x}{20}) + 2c \cdot \sin^2(\frac{x}{40}) = a \cdot \sin(\frac{x}{20}) - c \cdot \cos(\frac{x}{20}) + c.$$

Эта разность не менее величины *b* тогда и только тогда, когда

$$a \cdot \sin(\frac{x}{20}) - c \cdot \cos(\frac{x}{20}) + c \ge b \Leftrightarrow \sqrt{c^2+a^2} \cdot \cos(\frac{x}{20} + u) \le -(b-c),$$

где $u = \arccos(\dfrac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}) \in (0, \dfrac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi - u - v \le \dfrac{x}{20} \le \pi - u + v$, $0 \le x \le 20$, где $v = \arccos(\dfrac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}}) \in (0, \dfrac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi - u - v) > 0$. Для заданных значений a=8, b=6.5, c=4 получим $x_{\min}$ =14.94<20.

Ответ: 15 км

3.4. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $7\sin(\dfrac{x}{20}) + 8\sin^2(\dfrac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее $6\dfrac{2}{3}$ км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a,b,c,* где *b>c,* указанная в условии разность глубин равна

$$a \cdot \sin(\frac{x}{20}) + 2c \cdot \sin^2(\frac{x}{40}) = a \cdot \sin(\frac{x}{20}) - c \cdot \cos(\frac{x}{20}) + c.$$

Эта разность не менее величины b тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\ge b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\le-(b-c),$$

где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi-u-v\le\frac{x}{20}\le\pi-u+v$, $0\le x\le 20$, где $v=\arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi-u-v)$>0. Для заданных значений a=7, b=6.(6), c=4 получим $x_{\min}$=17.12<20.

Ответ: 17 км

3.5. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $\frac{19}{2}\sin(\frac{x}{20})+8\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 6 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a,b,c,* где *b>c,* указанная в условии разность глубин равна

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})+2c\cdot\sin^2(\frac{x}{40})=a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c.$$

Эта разность не менее величины b тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\ge b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\le-(b-c),$$

где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi-u-v\le\frac{x}{20}\le\pi-u+v$, $0\le x\le 20$, где $v=\arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi-u-v)$>0. Для заданных значений a=9.5, b=6, c=4 получим $x_{\min}$=11.88<20.

Ответ: 12 км

3.6. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $\frac{17}{2}\sin(\frac{x}{20})+12\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 8 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a,b,c,* где *b>c,* указанная в условии разность глубин равна

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})+2c\cdot\sin^2(\frac{x}{40})=a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c.$$

Эта разность не менее величины *b* тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\ge b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\le-(b-c),$$

где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi-u-v\le\frac{x}{20}\le\pi-u+v$, $0\le x\le 20$, где $v=\arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi-u-v)>0$. Для заданных значений a=8.5, b=8, c=6 получим $x_{\min}$ =16.16<20.

Ответ: 16 км

3.7. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $\frac{15}{2}\sin(\frac{x}{20})+12\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 9 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a,b,c,* где *b>c,* указанная в условии разность глубин равна

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})+2c\cdot\sin^2(\frac{x}{40})=a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c.$$

Эта разность не менее величины *b* тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\ge b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\le-(b-c),$$

где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi-u-v\le\frac{x}{20}\le\pi-u+v$, $0\le x\le 20$, где $v=\arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi-u-v)>0$. Для заданных значений a=7.5, b=9, c=6 получим $x_{\min}$ =19.84<20.

Ответ: 20 км

3.8. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $\frac{13}{2}\sin(\frac{x}{20})+8\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 7 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение. Для положительных значений параметров *a,b,c,* где *b>c,* указанная в условии разность глубин равна

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})+2c\cdot\sin^2(\frac{x}{40})=a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\,.$$

Эта разность не менее величины *b* тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\ge b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\le-(b-c)\,,$$

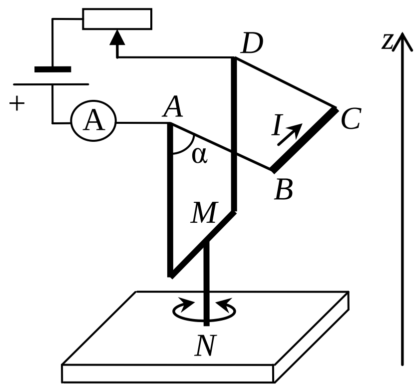
где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi-u-v\le\frac{x}{20}\le\pi-u+v$, $0\le x\le 20$, где $v=\arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi-u-v)>0$. Для заданных значений a=6.5, b=7, c=4 получим $x_{\min}$ =19.11<20.

Ответ: 19 км

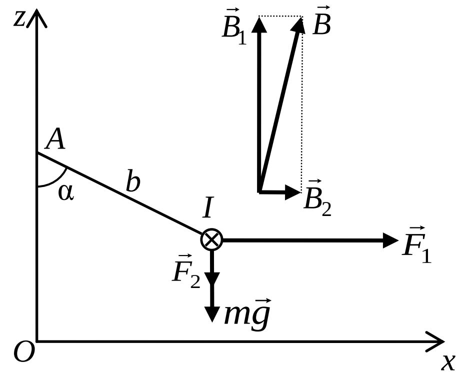
Задание 4

4.1. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка $ABCD$ состоит из трех отрезков одинаковой длины b = 10 см. Отрезки AB и CD – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок BC – стержень массой m = 20 г. В точках A и D рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси MN. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток I в направлении от B к C, то вилка поворачивается так, что отрезок BC устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости AMD на угол α (см. рисунок).
При $I = I_1$ = 5 А угол $\alpha = \alpha_1 = 30°$, при $I = I_2$ = 10 А угол $\alpha = \alpha_2 = 45°$. Найти проекцию B_z вектора $\vec{B}$ на вертикальную ось z. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_x$. Повернуть рамку вокруг оси AD могут только внешние силы, приложенные к отрезку BC: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_xb$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси AD в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} I_1B_zb\cdot b\cos\alpha_1 - \left(I_1B_xb + mg\right)\cdot b\sin\alpha_1 = 0, \\ I_2B_zb\cdot b\cos\alpha_2 - \left(I_2B_xb + mg\right)\cdot b\sin\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $I_2\sin\alpha_2$, а второе на $\left(-I_1\sin\alpha_1\right)$ и сложим их. Получим:

$$I_1I_2B_zb\cdot\left(\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\right) - mg\left(I_2 - I_1\right)\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2 = 0,$$

откуда

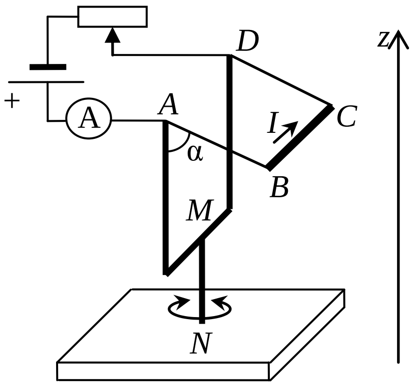
$$B_z = \frac{mg\left(I_2 - I_1\right)\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{I_1I_2b\cdot\left(\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\right)} = \frac{mg\left(I_2 - I_1\right)}{I_1I_2b\cdot\left(\mathrm{ctg}\alpha_1 - \mathrm{ctg}\alpha_2\right)}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_z = \frac{0{,}02\cdot 10\cdot\left(10-5\right)}{5\cdot 10\cdot 0{,}1\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)} = 0{,}1\cdot\left(\sqrt{3}+1\right) \approx 0{,}27\ (\text{Тл}).$$

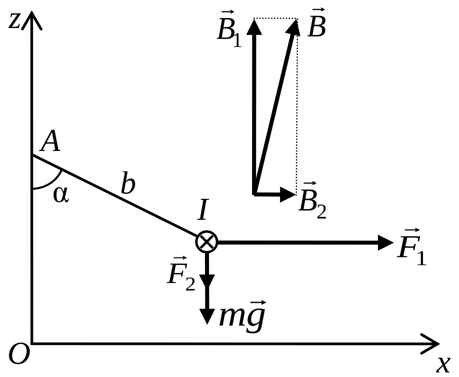
Ответ: $\boldsymbol{B_z \approx 0{,}27}$ **Тл.**

4.2. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка *ABCD* состоит из трех отрезков одинаковой длины b = 20 см. Отрезки *AB* и *CD* – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок *BC* – стержень массой m = 50 г. В точках *A* и *D* рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси *MN*. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток I в направлении от *B* к *C*, то вилка поворачивается так, что отрезок *BC* устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости *AMD* на угол α (см. рисунок).
При $I = I_1$ = 4 А угол $\alpha = \alpha_1 = 30°$, при $I = I_2$ = 10 А угол $\alpha = \alpha_2 = 45°$. Найти проекцию B_z вектора $\vec{B}$ на вертикальную ось z. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_x$. Повернуть рамку вокруг оси *AD* могут только внешние силы, приложенные к отрезку *BC*: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_xb$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси *AD* в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} I_1B_zb\cdot b\cos\alpha_1-(I_1B_xb+mg)\cdot b\sin\alpha_1=0, \\ I_2B_zb\cdot b\cos\alpha_2-(I_2B_xb+mg)\cdot b\sin\alpha_2=0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $I_2\sin\alpha_2$, а второе на $(-I_1\sin\alpha_1)$ и сложим их. Получим:

$$I_1I_2B_zb\cdot(\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2-\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2)-mg(I_2-I_1)\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2=0,$$

откуда

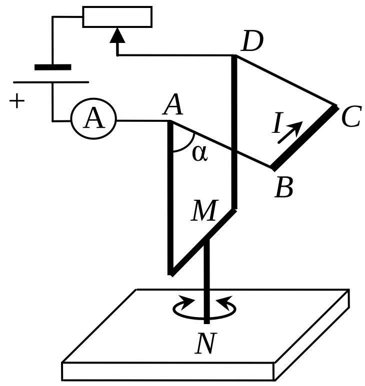
$$B_z=\frac{mg(I_2-I_1)\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{I_1I_2b\cdot(\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2-\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2)}=\frac{mg(I_2-I_1)}{I_1I_2b\cdot(\mathrm{ctg}\alpha_1-\mathrm{ctg}\alpha_2)}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_z=\frac{0{,}05\cdot10\cdot(10-4)}{4\cdot10\cdot0{,}2\cdot(\sqrt{3}-1)}=\frac{3}{16}\cdot(\sqrt{3}+1)\approx0{,}51(\text{Тл}).$$

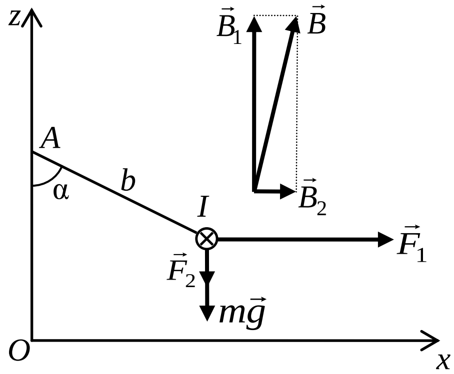
Ответ: $B_z \approx 0{,}51$ Тл.

4.3. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка $ABCD$ состоит из трех отрезков одинаковой длины b = 10 см. Отрезки AB и CD – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок BC – стержень массой m = 20 г. В точках A и D рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси MN. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток I в направлении от B к C, то вилка поворачивается так, что отрезок BC устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости AMD на угол α (см. рисунок).
При $I = I_1$ = 5 А угол $\alpha = \alpha_1 = 30°$, при $I = I_2$ = 10 А угол $\alpha = \alpha_2 = 45°$. Найти проекцию $B_{гор}$ вектора $\vec{B}$ на горизонтальную плоскость. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_{гор}$. Повернуть рамку вокруг оси AD могут только внешние силы, приложенные к отрезку BC: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_{гор}b$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси AD в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} I_1B_zb\cdot b\cos\alpha_1 - \left(I_1B_{гор}b + mg\right)\cdot b\sin\alpha_1 = 0, \\ I_2B_zb\cdot b\cos\alpha_2 - \left(I_2B_{гор}b + mg\right)\cdot b\sin\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $I_2\cos\alpha_2$, а второе на $\left(-I_1\cos\alpha_1\right)$ и сложим их. Получим:

$$\left(I_2B_{гор}b + mg\right)\cdot\sin\alpha_2\cdot I_1\cos\alpha_1 - \left(I_1B_{гор}b + mg\right)\cdot\sin\alpha_1\cdot I_2\cos\alpha_2 = 0,$$

откуда

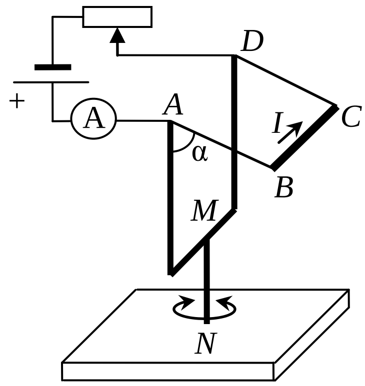
$$B_{гор} = \frac{mg\left(I_2\cdot\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 - I_1\cdot\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\right)}{I_1I_2b\cdot\left(\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\right)} = \frac{mg\left(I_2\,\mathrm{tg}\alpha_1 - I_1\,\mathrm{tg}\alpha_2\right)}{I_1I_2b\cdot\left(\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1\right)}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_{гор} = \frac{0{,}02\cdot 10\cdot\left(10\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 5\cdot 1\right)}{5\cdot 10\cdot 0{,}1\cdot\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\left(2\sqrt{3} - 3\right)\cdot\left(3 + \sqrt{3}\right)}{30} = \frac{\sqrt{3} - 1}{10} \approx 0{,}07\ (\text{Тл}).$$

Ответ: $B_{гор}$ ≈ 0,07 Тл.

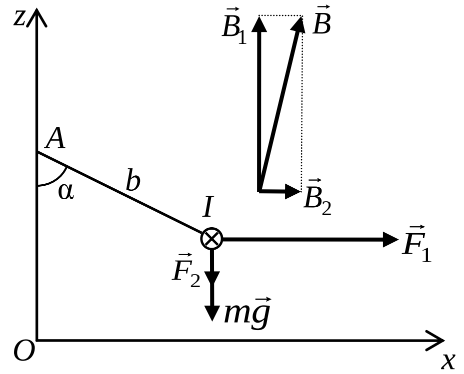
4.4. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка $ABCD$ состоит из трех отрезков одинаковой длины b = 20 см. Отрезки AB и CD – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок BC – стержень массой m = 50 г. В точках A и D рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси MN. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток I в направлении от B к C, то вилка поворачивается так, что отрезок BC устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости AMD на угол α (см. рисунок).

При $I = I_1$ = 4 А угол $\alpha = \alpha_1 = 30°$, при $I = I_2$ = 10 А угол $\alpha = \alpha_2 = 45°$. Найти проекцию $B_{\text{гор}}$ вектора $\vec{B}$ на горизонтальную плоскость. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_{\text{гор}}$. Повернуть рамку вокруг оси AD могут только внешние силы, приложенные к отрезку BC: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_{\text{гор}}b$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси AD в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} I_1B_zb\cdot b\cos\alpha_1 - \left(I_1B_{\text{гор}}b + mg\right)\cdot b\sin\alpha_1 = 0, \\ I_2B_zb\cdot b\cos\alpha_2 - \left(I_2B_{\text{гор}}b + mg\right)\cdot b\sin\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $I_2\cos\alpha_2$, а второе на $\left(-I_1\cos\alpha_1\right)$ и сложим их. Получим:

$$\left(I_2B_{\text{гор}}b + mg\right)\cdot\sin\alpha_2\cdot I_1\cos\alpha_1 - \left(I_1B_{\text{гор}}b + mg\right)\cdot\sin\alpha_1\cdot I_2\cos\alpha_2 = 0,$$

откуда

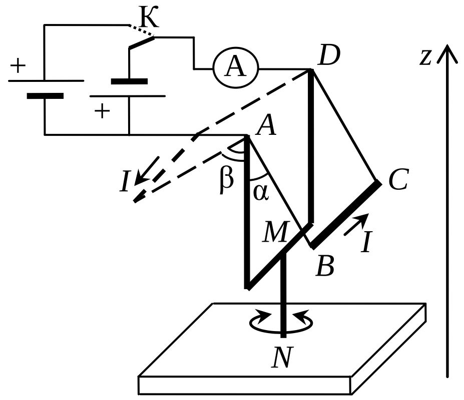
$$B_{\text{гор}} = \frac{mg\left(I_2\cdot\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 - I_1\cdot\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\right)}{I_1I_2b\cdot\left(\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\right)} = \frac{mg\left(I_2\operatorname{tg}\alpha_1 - I_1\operatorname{tg}\alpha_2\right)}{I_1I_2b\cdot\left(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1\right)}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_{\text{гор}} = \frac{0{,}05\cdot10\cdot\left(10\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 4\cdot1\right)}{4\cdot10\cdot0{,}2\cdot\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\left(5\sqrt{3} - 6\right)\cdot\left(3 + \sqrt{3}\right)}{48} = \frac{3\sqrt{3} - 1}{16} \approx 0{,}26\ (\text{Тл}).$$

Ответ: $B_{\text{гор}} \approx 0{,}26$ Тл.

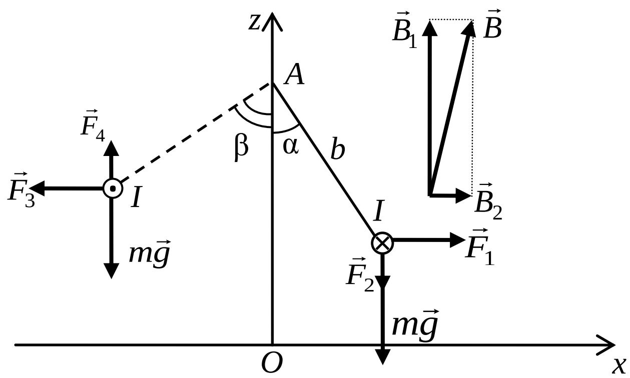
4.5. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка $ABCD$ состоит из трех отрезков одинаковой длины $b = 10$ см. Отрезки AB и CD – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок BC – стержень массой m = 20 г. В точках A и D рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси MN. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток $I = 5$ А в направлении от B к C, то вилка поворачивается так, что отрезок BC устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости AMD на угол α = 30° (см. рисунок). Если тот же ток протекает в направлении от C к B, то плоскость рамки отклоняется от плоскости AMD на угол β = 45° в противоположном направлении.

Найти проекцию B_z вектора $\vec{B}$ на вертикальную ось z. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_x$. Повернуть рамку вокруг оси AD могут только внешние силы, приложенные к отрезку BC: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_xb$. При смене направления тока на противоположное повернуть рамку могут только сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_3$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_4$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_3 = F_1 = IB_zb$, $F_4 = F_2 = IB_xb$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси AD в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} IB_zb \cdot b\cos\alpha - (IB_xb + mg)\cdot b\sin\alpha = 0, \\ -IB_zb \cdot b\cos\beta + (mg - IB_xb)\cdot b\sin\beta = 0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $\sin\beta$, а второе на $(-\sin\alpha)$ и сложим их. Получим:

$$IB_zb\cdot(\cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta) - 2mg\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = 0,$$

откуда

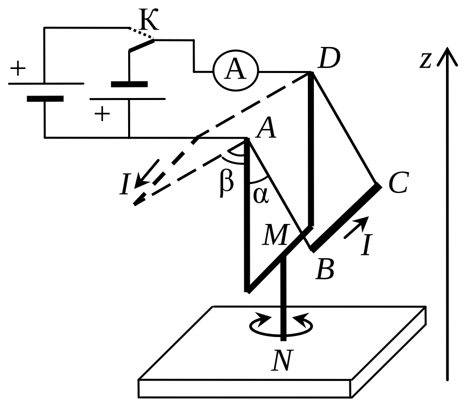
$$B_z = \frac{2mg \cdot sin\alpha \cdot sin\beta}{Ib \cdot (cos\alpha \cdot sin\beta + sin\alpha \cdot cos\beta)} = \frac{2mg}{Ib \cdot (\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta)}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_z = \frac{2 \cdot 0{,}02 \cdot 10}{5 \cdot 0{,}1 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)} = 0{,}4 \cdot \left(\sqrt{3}-1\right) \approx 0{,}29\ (\text{Тл}).$$

Ответ: $B_z \approx 0{,}29$ Тл.

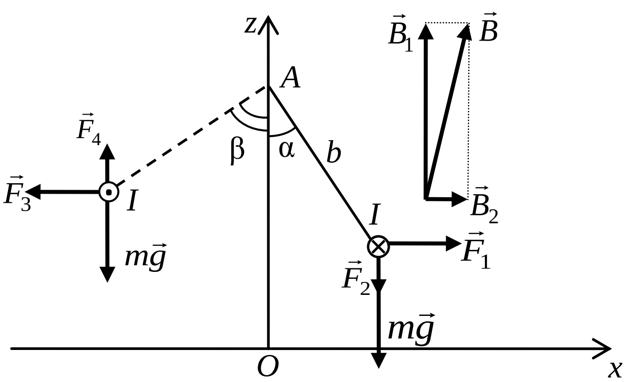
4.6. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка *ABCD* состоит из трех отрезков одинаковой длины $b = 20$ см. Отрезки *AB* и *CD* – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок *BC* – стержень массой m = 50 г. В точках *A* и *D* рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси *MN*. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток $I = 4$ А в направлении от *B* к *C*, то вилка поворачивается так, что отрезок *BC* устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости *AMD* на угол α = 30° (см. рисунок). Если тот же ток протекает в направлении от *C* к *B*, то плоскость рамки отклоняется от плоскости *AMD* на угол β = 45° в противоположном направлении.

Найти проекцию B_z вектора $\vec{B}$ на вертикальную ось *z*. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_x$. Повернуть рамку вокруг оси *AD* могут только внешние силы, приложенные к отрезку *BC*: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_xb$. При смене направления тока на противоположное повернуть рамку могут только сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_3$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_4$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_3 = F_1 = IB_zb$, $F_4 = F_2 = IB_xb$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси *AD* в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} IB_z b\cdot b\cos\alpha-\left(IB_x b+mg\right)\cdot b\sin\alpha=0,\\ -IB_z b\cdot b\cos\beta+\left(mg-IB_x b\right)\cdot b\sin\beta=0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $\sin\beta$, а второе на $\left(-\sin\alpha\right)$ и сложим их. Получим:

$$IB_z b\cdot\left(\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta\right)-2mg\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta=0,$$

откуда

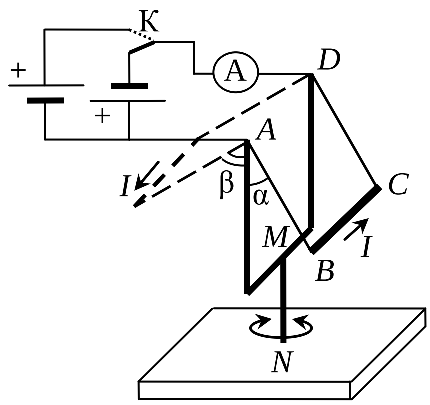
$$B_z=\frac{2mg\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{Ib\cdot\left(\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta\right)}=\frac{2mg}{Ib\cdot\left(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta\right)}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_z=\frac{2\cdot 0{,}05\cdot 10}{4\cdot 0{,}2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{5}{8}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\approx 0{,}46\,(\text{Тл}).$$

Ответ: $B_z\approx 0{,}46$ Тл.

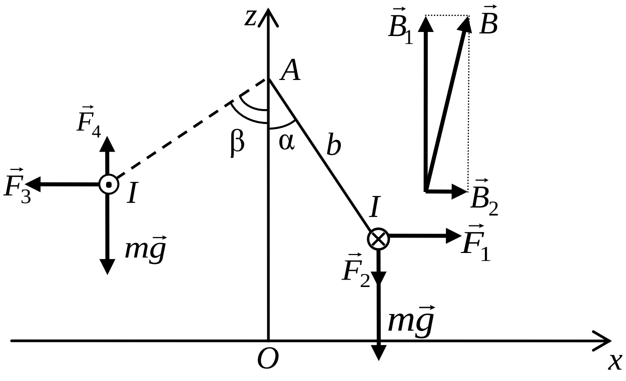
4.7. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка $ABCD$ состоит из трех отрезков одинаковой длины $b = 10$ см. Отрезки AB и CD – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок BC – стержень массой m = 20 г. В точках A и D рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси MN. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток $I = 5$ А в направлении от B к C, то вилка поворачивается так, что отрезок BC устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости AMD на угол α = 30° (см. рисунок). Если тот же ток протекает в направлении от C к B, то плоскость рамки отклоняется от плоскости AMD на угол β = 45° в противоположном направлении.

Найти проекцию $B_{\text{гор}}$ вектора $\vec{B}$ на горизонтальную плоскость. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_{\text{гор}}$. Повернуть рамку вокруг оси AD могут только внешние силы, приложенные к отрезку BC: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$).

При этом $F_1 = IB_z b$, $F_2 = IB_{гор}b$. При смене направления тока на противоположное повернуть рамку могут только сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_3$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_4$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_3 = F_1 = IB_z b$, $F_4 = F_2 = IB_{гор}b$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси AD в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} IB_z b\cdot b\cos\alpha - \left(IB_{гор}b + mg\right)\cdot b\sin\alpha = 0, \\ -IB_z b\cdot b\cos\beta + \left(mg - IB_{гор}b\right)\cdot b\sin\beta = 0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $\cos\beta$, а второе на $\cos\alpha$ и сложим их. Получим:

$$IB_{гор}b\left(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha\right) = mg\left(\sin\beta\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\beta\right),$$

откуда

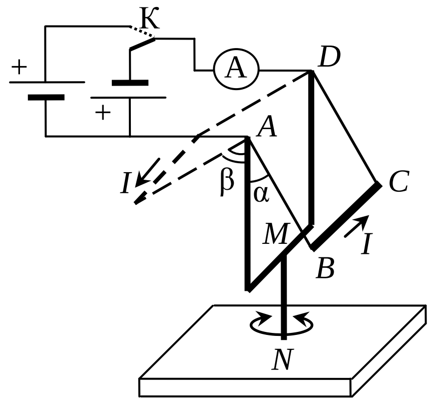
$$B_{гор} = \frac{mg\left(\sin\beta\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\beta\right)}{Ib\left(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha\right)} = \frac{mg}{Ib}\cdot\frac{tg\beta - tg\alpha}{tg\alpha + tg\beta}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_{гор} = \frac{0{,}02\cdot 10}{5\cdot 0{,}1}\cdot\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}+1} = 0{,}4\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 0{,}4\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\approx 0{,}11\,(\text{Тл}).$$

Ответ: $B_{гор} \approx 0{,}11$ Тл.

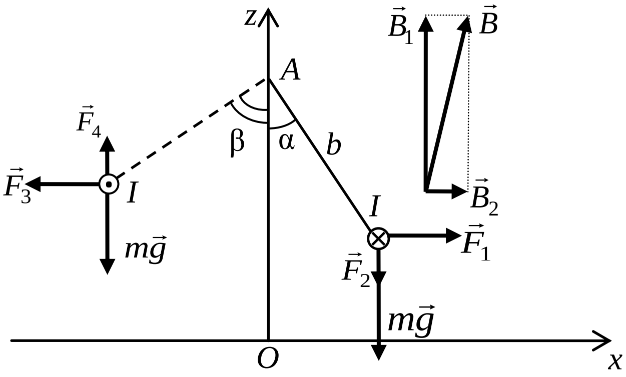
4.8. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка $ABCD$ состоит из трех отрезков одинаковой длины $b = 20$ см. Отрезки AB и CD – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок BC – стержень массой m = 50 г. В точках A и D рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси MN. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток $I = 4$ А в направлении от B к C, то вилка поворачивается так, что отрезок BC устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости AMD на угол $\alpha = 30°$ (см. рисунок). Если тот же ток протекает в направлении от C к B, то плоскость рамки отклоняется от плоскости AMD на угол $\beta = 45°$ в противоположном направлении.

Найти проекцию $B_{гор}$ вектора $\vec{B}$ на горизонтальную плоскость. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_{\text{гор}}$. Повернуть рамку вокруг оси AD могут только внешние силы, приложенные к отрезку BC: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_{\text{гор}}b$. При смене направления тока на противоположное повернуть рамку могут только сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_3$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_4$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_3 = F_1 = IB_zb$, $F_4 = F_2 = IB_{\text{гор}}b$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси AD в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} IB_zb \cdot b\cos\alpha - \left(IB_{\text{гор}}b + mg\right)\cdot b\sin\alpha = 0, \\ -IB_zb \cdot b\cos\beta + \left(mg - IB_{\text{гор}}b\right)\cdot b\sin\beta = 0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $\cos\beta$, а второе на $\cos\alpha$ и сложим их. Получим:

$$IB_{\text{гор}}b\left(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha\right) = mg\left(\sin\beta\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\beta\right),$$

откуда

$$B_{\text{гор}} = \frac{mg\left(\sin\beta\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\beta\right)}{Ib\left(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha\right)} = \frac{mg}{Ib}\cdot\frac{tg\beta - tg\alpha}{tg\alpha + tg\beta}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_{\text{гор}} = \frac{0{,}05\cdot 10}{4\cdot 0{,}2}\cdot\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}+1} = \frac{5}{8}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{5}{8}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) \approx 0{,}17 \text{ (Тл)}.$$

Ответ: $B_{\text{гор}} \approx 0{,}17$ Тл.

Тестовые задания для разминки третьего тура отборочного этапа:

Как называются мелкие живые организмы, живущие во взвешенном состоянии в толще морской воды?

Рыбы

Кораллы

Планктон

Как называется ископаемая смола деревьев?

Янтарь

Кварцит

Торф

Как называется обширная выровненная поверхность Земли (обычно не выше 200 м над уровнем моря)?

Балка

Равнина

Пойма

Как называется совокупность неровностей поверхности земли?

Терраса

Пустыня

Рельеф

Как называется узкая V-образная долина реки?

Каньон

Овраг

Терраса

В какой галактике расположена планета Земля?

Туманность Андромеды

Млечный путь

Солнечная галактика

Как называется выступающая из воды постройка из морских известковых организмов?

Валун

Вулкан

Риф

Как называется естественный выход подземных вод на поверхность?

Родник

Водопад

Пруд

Как называется источник горячей воды в областях активной вулканической деятельности?

Родник

Гейзер

Горячая точка

Как называется канал, через который выбрасывается лава?
Жерло
Шахта
Колодец

Как называется процесс разрушения и химического изменения горных пород вследствие перепадов температуры, химического и механического воздействия атмосферы, воды и организмов?
Выветривание
Сальтация
Литогенез

Как называется агрегат кристаллов, наросших на общее основание?
Конгломерат
Брекчия
Друза

Как называется форма рельефа в виде понижения, узкое по сравнению со своей длиной, в основном извилистое углубление в земной поверхности?
Бархан
Долина
Плато

Как называется углубление (воронка), возникающее в результате взрыва, который происходит при ударе крупного метеорита о твердую поверхность?
Метеоритный кратер
Метеоритный желоб
Метеоритный колодец

Как называется твердое тело, имеющее естественную форму правильного многогранника, атомы которого образуют трехмерно-периодическую пространственную укладку?
Горная порода
Диапир
Кристалл

Как называется оболочка Земли между земной корой и ядром Земли?
Мантия
Литосфера
Осадочный чехол

Как называется однородное по физическим свойствам и химическому составу природное тело, образующееся в результате физико-химических процессов в глубинах или на поверхности Земли?
Резервуар
Минерал
Коралл

Как называется скопление на суше или на дне морей мелких обломков, включающих в себя зерна или кристаллы в промышленных концентрациях?
Залежь
Карст
<u>Россыпь</u>

Как называется кусок природного металла (золота, платины, серебра, меди) достаточно больших размеров, найденный в россыпных или коренных месторождениях?
<u>Самородок</u>
Кристалл
Слиток

Как называется рыхлые отложения, состоящие из остроугольных неокатанных обломков горных пород размером от 1 до 10 мм?
Галька
Туф
<u>Щебень</u>

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2013/2014 учебный год

МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

Вариант заданий для 5-9 классов

Задание 1.

Одним из направлений гидрогеологии является исследование влияния движения подземных вод на динамику структуры грунтов. В данной задаче рассматривается пример изменения количественного показателя грунта в некотором объеме.

В исследуемом объеме грунта, расположенном под землей и равном 0.5 куб. м, изначально установлено, что данный объем состоит из равномерной смеси крупного и мелкого песка, причем крупных частиц в нем 75%. Под влиянием подземных вод часть исходной смеси была вытеснена другой равномерной смесью крупного и мелкого песка, в которой содержится 25% крупных частиц. Повторный анализ того же объема грунта показал, что крупного песка в нем осталось не более 40%. Какой объем крупных частиц мог попасть в указанный объем со второй смесью?

Решение. Пусть V (куб. м) – общий объем исходной песчаной смеси, a(куб. м) – объем вытесненной исходной смеси, равный вновь поступившему объему новой смеси. Тогда $(0.75\cdot(V\text{-}a)+0.25\cdot a)$ (куб. м) – объем крупных частиц песка при повторном анализе грунта. По условию задачи

$$(0.75\cdot(V-a)+0.25\cdot a)/V \le 0.4 \Leftrightarrow 0.75-0.5\frac{a}{V} \le 0.4 \Leftrightarrow 0.5\frac{a}{V} \ge 0.35 \Rightarrow \frac{a}{V} \ge 0.7,$$

откуда $V \ge a \ge 0.7\cdot V$=0.35(куб. м). Значит, крупных частиц попало $0.25\cdot a$, эта величина находится в пределах от 0.0875 до 0.125 (куб. м).

Ответ: [0.0875;0.125] (куб. м)

Задание 2.

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит, в основном, из метана, но содержат также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Часто он содержит также значительную примесь сернистого водорода – ядовитого газа, от которого добываемый природный газ необходимо очищать. Вместе с тем, сернистый водород является важным сырьем для химической промышленности.

Доля сернистого водорода, содержащегося в природном газе, добываемом на газовом месторождении, составляет α = 5 % от общего количества вещества добытого газа. Какой объем V природного газа (рассчитанный для нормальных условий: температуры t = 0 °C и атмосферного давления p_0 = 0,1 МПа) добывается на данном месторождении за год, если ежесуточно путем глубокой очистки добываемого газа удается получить объем V_1 = 2 м^3 сжиженного сернистого водорода? Молярная масса сернистого водорода равна μ = 34 г/моль, плотность жидкого сернистого водорода ρ = 950 кг/м^3. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(К·моль).

Решение.

1. Найдем массу m сернистого водорода, добываемую на месторождении ежесуточно.

$$m = \rho V_1.$$

2. Теперь найдем количество вещества сернистого водорода, соответствующее массе m:

$$\nu_1 = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho V_1}{\mu},$$

где μ – молярная масса сернистого водорода.

3. Тогда количество вещества ν_2 сернистого водорода, добываемое на месторождении за год, равно

$$\nu_2 = N\nu_1 = \frac{N\rho V_1}{\mu},$$

где N = 365 – число календарных дней в году.

4. Количество вещества ν природного газа, добываемого на месторождении за год, составляет

$$\nu = \frac{\nu_2}{\alpha} = \frac{N\rho V_1}{\alpha\mu}.$$

5. Объем V природного газа, добываемого на месторождении за год, рассматривается при нормальных условиях (p_0 = 0,1 МПа и t = 0 °С, т.е. абсолютная температура T = 273 К). в этом случае газ можно считать близким к идеальному и использовать для его описания уравнение Клапейрона–Менделеева:

$$pV = \nu RT.$$

В нашем случае из этого уравнения получаем:

$$V = \frac{\nu RT}{p_0} = \frac{N\rho V_1}{\alpha\mu} \cdot \frac{RT}{p_0}.$$

Подставим в формулу числовые данные из условия. При этом переведем температуру из шкалы Цельсия в шкалу Кельвина:

$$t = 0\ ^\circ\mathrm{C} \Rightarrow T = 273\ \mathrm{K}.$$

Получаем:

$$V = \frac{365 \cdot 950 \cdot 2 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{0{,}05 \cdot 34 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5} = \frac{3{,}65 \cdot 0{,}95 \cdot 2 \cdot 8{,}31 \cdot 2{,}73}{170} \cdot 10^7 \approx 9{,}3 \cdot 10^6\ \text{м}^3.$$

Ответ: $V = \dfrac{N\rho V_1}{\alpha\mu} \cdot \dfrac{RT}{p_0} \approx 9{,}3 \cdot 10^6$ м^3.

Задание 3.

Процесс остывания магмы определяется ее свойствами и свойствами окружающей среды. Оценка скорости остывания вулканической магмы является важной задачей с точки зрения установления закономерностей структуры грунтов и как следствие развития технологий разведки полезных ископаемых. В данной задаче рассматривается пример зависимости температуры магмы от глубины залегания.

Известно, что температура магмы $t(x)$ (в градусах по Цельсию) в зависимости от глубины залегания x определяется соотношением $t(x) + (x^2 - 3) \cdot t(1) + t(0) - 3 - x^3 = 0$. Чему равно значение $t(10)$?

Решение. Подставляя в качестве x значения 0 и 1, из соотношения задачи получим

$$\begin{cases} t(0) - 3t(1) + t(0) - 3 = 0, \\ t(1) - 2t(1) + t(0) - 4 = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $t(0)$=9, $t(1)$=5. Отсюда получаем

$t(x) = 3 + x^3 - 9 + 5 \cdot (3 - x^2) = x^3 - 5x^2 + 9$.

Ответ: $t(10)$=509 градусов.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ
Заключительный этап
Вариант 1.

Задание 1.

Химический состав воды в грунтах дает важные сведения о геологической истории вмещающих пород. Если поверхность грунтовых вод залегает вблизи земной поверхности, грунтовые воды испаряются в атмосферу, в результате чего меняется химический состав воды. В данной задаче рассматривается пример изменения структуры воды в некотором подземном объеме.

В исследуемом объеме грунта, расположенном под поверхностью земли и содержащем 0.6 куб. м. воды, изначально установлено, что в этой воде содержится 2% калиевой соли. В результате испарения влажность грунта в этом объеме уменьшилась. Повторный анализ состава воды показал, что концентрация соли стала не менее 2.5%. Сколько воды испарилось в данном объеме?

Решение. Пусть из объема V куб. м. испаряется a куб. м. воды, тогда если начальная концентрация соли k_1, то концентрация соли после испарения

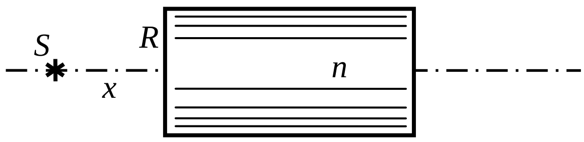
$$\frac{k_1 V}{V-a} \geq p \Leftrightarrow a \geq V(1-\frac{k_1}{p}).$$

Подставляя значения k_1=0.02, V=0.6, p=0.025, получим $a \geq 0.12$.

Ответ: [0.12;0.6) куб. м.

Задание 2.

Точечный источник S монохроматического света находится на оси цилиндра радиусом R, вырезанного из прозрачного кристалла с показателем преломления n = 1,37, на расстоянии x = 10 мм от ближайшего к нему основания цилиндра (см. рисунок). Найдите максимальное значение R, при котором весь свет от источника, падающий на это основание, распространяется в цилиндре, не выходя наружу через его боковую поверхность.

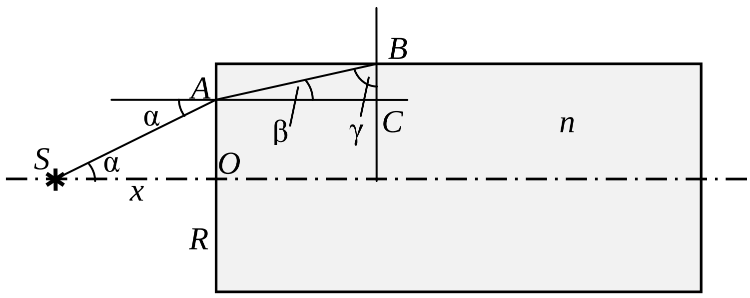


Решение.

Обозначим угол падения луча на торец цилиндра через α.

$$\alpha = \text{arctg}\,\frac{OA}{x}.$$

$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$, отсюда $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$.



В треугольнике ΔABC угол $\angle C = 90°$, отрезок AC является по построению нормалью к левому торцу цилиндра, а отрезок BC – нормалью к боковой поверхности цилиндра. Поэтому $\gamma = 90° - \beta$.

Чтобы в точке B луч AB не выходил из кристалла наружу, угол падения γ должен быть достаточно велик, а именно, он должен превосходить предельный угол полного внутреннего отражения $\gamma_{\text{пр}} = \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Нам по условию задачи требуется, чтобы даже наименьшее значение γ превосходило величину $\gamma_{\text{пр}}$. Поскольку $\gamma = 90° - \beta$, минимальное значение γ достигается при максимуме β.

Далее, из формулы $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$ следует, что максимум β достигается при максимуме α. Но $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{OA}{x}$, поэтому при заданном x максимум α достигается при максимальном значении OA, равном, очевидно, R.

Таким образом, наименьшее значение γ при заданном x достигается, если $OA = R$, то есть когда луч SA попадает в самый край торца цилиндра.

Пусть $OA = R$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{R}{x}$,

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{R}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}},$$

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{R}{n\sqrt{R^2+x^2}},$$

$$\sin\gamma = \sin\left(90^\circ-\beta\right) = \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{R^2}{n^2\left(R^2+x^2\right)}}.$$

Чтобы в точке B луч AB не выходил из кристалла наружу, даже для наименьшего угла γ должно выполняться неравенство: $\gamma > \gamma_{пр}$ или $\sin\gamma > \sin\gamma_{пр}$. Из определения $\gamma_{пр}$ следует, что $\sin\gamma_{пр} = \dfrac{1}{n}$.

Подставим эти результаты в неравенство $\sin\gamma > \sin\gamma_{пр}$, и оно приобретет вид:

$$\sqrt{1-\frac{R^2}{n^2\left(R^2+x^2\right)}} > \frac{1}{n}.$$

Поскольку $n > 1$, выражение под корнем положительно при $R > 0$ и любых x, и неравенство имеет смысл.

Отсюда:

$$1-\frac{R^2}{n^2\left(R^2+x^2\right)} > \frac{1}{n^2}\ \text{, или}\ 1 > \frac{1}{n^2}\left[1+\frac{R^2}{R^2+x^2}\right].$$

$$n^2 > 1+\frac{R^2}{R^2+x^2},\quad n^2-1 > \frac{R^2}{R^2+x^2},$$

$$\left(R^2+x^2\right)\left(n^2-1\right) > R^2,$$

$$x^2\left(n^2-1\right) > R^2\left[1-\left(n^2-1\right)\right] = R^2\left(2-n^2\right).$$

Т.к. $1 < n < \sqrt{2}$, то $R^2 < x^2\cdot\dfrac{n^2-1}{2-n^2}$.

Т.о. $R < x\sqrt{\dfrac{n^2-1}{2-n^2}} = R_{макс}$.

$$R_{макс} = x\sqrt{\frac{n^2-1}{2-n^2}} = 10\text{ мм}\cdot\sqrt{\frac{1{,}37^2-1}{2-1{,}37^2}} = 10\text{ мм}\cdot\sqrt{\frac{1{,}8769-1}{2-1{,}8769}} = 10\text{ мм}\cdot\sqrt{\frac{0{,}8769}{0{,}1231}} = 10\text{ мм}\cdot\sqrt{\frac{8769}{1231}} \approx$$

≈ 27 мм.

Ответ: $R_{макс} = x\sqrt{\dfrac{n^2-1}{2-n^2}} = 10\text{ мм}\cdot\sqrt{\dfrac{8769}{1231}} \approx 27$ мм.

Задание 3.

Оценка скорости остывания вулканической магмы в различных условиях является важной задачей с точки зрения установления закономерностей динамики структуры земли и как следствие развития технологий разведки полезных ископаемых. В данной задаче рассматривается пример зависимости температуры магмы от расстояния до центра очага.

Магматический очаг окружен горными породами, в которых температура существенно ниже чем в самом узле. Если в магме расстояние от центра очага обозначить через *s*, то температура *t(s)* (в градусах по Цельсию) в соответствующей точке в магме подчиняется закону

$$t(s+1) = t(s) - 2 - \frac{1}{5}s\text{, s=0,1,2,3,…}.$$

Чему равна величина *t(0),* если *t(*100*)*=400?

Решение. Суммируя равенства $t(s+1) = t(s) - 2 - \frac{1}{5}s$ по s от 0 до 99, получим

$$t(100) = t(0) - 2\cdot 100 - \frac{1}{5}\cdot(1+2+3+...+99) = t(0) - 200 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1+99}{2}\cdot 99 = t(0) - 200 - 990,$$

откуда *t(0)*= *t(*100*)*+1190=1590.

Ответ: 1590 градусов.

Задание 4.

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит, в основном, из метана, но содержат также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Часто он содержит также значительную примесь сернистого водорода – ядовитого газа, от которого добываемый природный газ необходимо очищать. Вместе с тем, сернистый водород является важным сырьем для химической промышленности.

Доля сернистого водорода, содержащегося в природном газе, добываемом на газовом месторождении, составляет α = 3 % от общего количества вещества добытого газа. Какой объем V природного газа (рассчитанный для нормальных условий: температуры t = 0 °С и атмосферного давления p_0 = 0,1 МПа) добывается на данном месторождении за год, если ежесуточно путем глубокой очистки добываемого газа удается получить объем V_1 = 13 м^3 сжиженного сернистого водорода? Молярная масса сернистого водорода равна μ = 34 г/моль, плотность жидкого сернистого водорода ρ = 950 кг/м^3. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(К·моль).

Решение.

Масса m сернистого водорода, добываемую на месторождении ежесуточно:

$$m = \rho V_1.$$

Количество вещества сернистого водорода, соответствующее массе m:

$$\nu_1 = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho V_1}{\mu},$$

где μ – молярная масса сернистого водорода.

Количество вещества ν_2 сернистого водорода, добываемое на месторождении за год:

$$\nu_2 = N\nu_1 = \frac{N\rho V_1}{\mu},$$

где N = 365 – число календарных дней в году.

Количество вещества ν природного газа, добываемого на месторождении за год:

$$\nu = \frac{\nu_2}{\alpha} = \frac{N\rho V_1}{\alpha\mu}.$$

Объем V природного газа, добываемого на месторождении за год, рассматривается при нормальных условиях (p_0 = 0,1 МПа и t = 0 °С, т.е. абсолютная температура T = 273 К). В этом случае газ можно считать близким к идеальному и использовать для его описания уравнение Клапейрона–Менделеева:

$$V = \frac{\nu RT}{p_0} = \frac{N\rho V_1}{\alpha\mu} \cdot \frac{RT}{p_0}.$$

$$V = \frac{365 \cdot 950 \cdot 13 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{0{,}03 \cdot 34 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5} = \frac{3{,}65 \cdot 0{,}95 \cdot 13 \cdot 8{,}31 \cdot 2{,}73}{102} \cdot 10^7 \approx 10^8 \text{ м}^3.$$

Ответ: $V = \frac{N\rho V_1}{\alpha\mu} \cdot \frac{RT}{p_0} \approx 10^8$ м^3.

Задание 5.

Изучение полиэдрических структур кристаллов является перспективным направлением в области нанотехнологий. Приведенная ниже задача рассматривает один специальный вид полиэдра, т.е. многогранника.

Многогранник представляет собой соединение призмы с пирамидой. Основаниями прямой призмы являются правильные треугольники *ABE* и *DCF* с длиной стороны равной 3, боковая сторона призмы равна 4. Боковая грань *ABCD* призмы является основанием пирамиды *SABCD*, вершина *S* и ребро *EF* находятся по разные стороны от плоскости *ABCD*, боковые ребра пирамиды равны 5. Построенный многогранник *SABCDEF* называется семивершинником. Точка *P* находится на диагонали *AC* прямоугольника *ABCD*, при этом $\frac{AP}{PC} = \frac{1}{3}$. Прямая, проходящая через точки *S* и *P*, пересекает границу семивершинника в точке *X*. Найдите площадь сечения семивершинника плоскостью, содержащей прямые *SP* и *SO*, где *O* – центр боковой грани *ABCD*. Чему равна длина отрезка *SX*?

Решение. Пусть *a* – сторона основания призмы, *b* – боковое ребро, *c* – боковое ребро пирамиды *SABCD.* Пусть далее точка *H* – середина отрезка *EF*, прямая *SH* перпендикулярна плоскости *ABCD*. Искомое сечение – четырехугольник *ASCH*, площадь которого равна сумме площадей *ASC* и *ACH*.

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2}; SO = \sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)/4} \Rightarrow S_{\Delta ASC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)/4}.$$

В треугольнике *ACH*: $OH = a\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\Delta ACH} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot a\sqrt{3}$. Подставляя значения a=3, b=4, c=5, получаем $S_{\Delta ASC} = \frac{25}{4}\sqrt{3}, S_{\Delta ACH} = \frac{15}{4}\sqrt{3} \Rightarrow S_{ASCH} = 10\sqrt{3}$.

Точка *X* – точка пересечения прямых *SP* и *AH*. Обозначим угол *OSP* через α, а угол *SHX* через β. Тогда в треугольнике *SHX* сторона $SH = OH + OS = \frac{a\sqrt{3} + \sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Кроме того,

$$tg\alpha = OP/OS = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

Аналогично $tg\beta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a\sqrt{3}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\beta = \frac{5}{2\sqrt{13}}, \cos\beta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$.

По теореме синусов в треугольнике *SHX*:

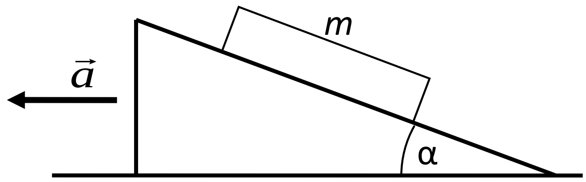
$$\frac{SX}{\sin\beta} = \frac{SH}{\sin(\alpha + \beta)} \Leftrightarrow SX = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{20}{\sqrt{13}}.$$

Ответ: $10\sqrt{3}$; $\frac{20\sqrt{13}}{13}$.

Задание 6.

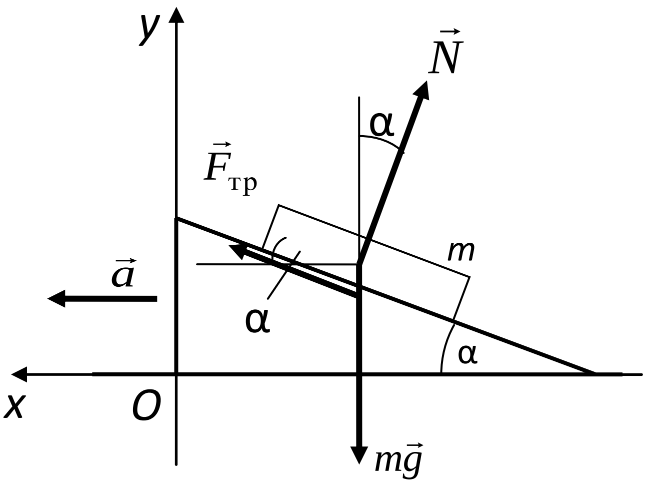
При землетрясениях происходит движение точек земной поверхности, до которых дошла сейсмическая волна. Характер разрушений, вызываемых сейсмической волной, сильно зависит от того, сопровождается ли это движение значительными деформациями земной поверхности, или нет. Представление о последствиях прохождения сейсмической волны без значительных деформаций земной поверхности можно получить, решая следующую задачу.

Брусок m покоится на наклонном плоском недеформируемом основании, составляющем угол α с горизонтом. Коэффициент трения между бруском и наклонным основанием μ = 0,5. Основание движется поступательно с постоянным горизонтальным ускорением $\vec{a}$, как показано на рисунке. Максимальное значение модуля ускорения $\vec{a}$, при котором брусок сохраняет свое состояние покоя относительно основания при движении последнего, равно a = 0,8 м/с^2. Найдите α (в ответе достаточно указать численное значение sin α, cos α или tg α). Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.



Решение.

На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной по касательной к наклонной плоскости.



Согласно 2-му закону Ньютона, сумма приложенных к телу сил вызывает его ускорение: $\vec{F} = m\vec{a}$. Ускорение бруска равно ускорению основания и поэтому направлено влево (см. рисунок). Значит, равнодействующая приложенных к бруску сил тоже направлена влево. Но сила $m\vec{g}$ вертикальна, а сила $\vec{N}$ направлено вверх-вправо. Поэтому сила трения должна быть направлена вдоль наклонной плоскости вверх-влево.

Сила трения в данной задаче является силой трения покоя, ее модуль связан с модулем нормальной составляющей силы реакции опоры неравенством $F_{\text{тр}} \le \mu N$, где μ – коэффициент трения. В случае максимального ускорения модуль силы трения тоже максимален и выражается равенством $F_{\text{тр}} = \mu N$.

$$\begin{cases} F_{\text{тр}}\cos\alpha - N\sin\alpha = ma \\ F_{\text{тр}}\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = 0 \\ F_{\text{тр}} = \mu N \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu N\cos\alpha - N\sin\alpha = ma \\ \mu N\sin\alpha + N\cos\alpha = mg \end{cases}$$

$$\frac{ma}{\mu\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{mg}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha},$$

$$a_{\text{макс}} = g\,\frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha} = g\,\frac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{\mu\operatorname{tg}\alpha + 1}.$$

$$a \cdot (\mu\operatorname{tg}\alpha + 1) = g \cdot (\mu - \operatorname{tg}\alpha).$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu g - a}{g + \mu a}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu g - a}{g + \mu a} = \frac{0{,}5 \cdot 10 - 0{,}8}{10 + 0{,}5 \cdot 0{,}8} = \frac{4{,}2}{10{,}4} = \frac{21}{52} \approx 0{,}4.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu g - a}{g + \mu a} = \frac{21}{52} \approx 0{,}4$, или $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu g - a}{g + \mu a}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{21}{52}\right) \approx \operatorname{arctg} 0{,}4$.

2014 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ
Заключительный этап
Вариант 2.

Задание 1.

Химический состав воды в грунтах дает важные сведения о геологической истории вмещающих пород. Если поверхность грунтовых вод залегает вблизи земной поверхности, грунтовые воды испаряются в атмосферу, в результате чего меняется химический состав воды. В данной задаче рассматривается пример изменения структуры воды в некотором подземном объеме.

В исследуемом объеме грунта, расположенном под поверхностью земли и содержащем 0.8 куб. м. воды, изначально установлено, что в этой воде содержится 1.5% калиевой соли. В результате испарения влажность грунта в этом объеме уменьшилась. Повторный анализ состава воды показал, что концентрация соли стала не менее 2%. Сколько воды испарилось в данном объеме?

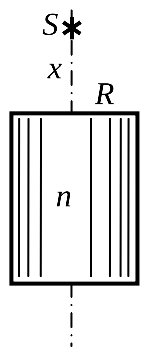
Решение. Пусть из объема V куб. м. испаряется a куб. м. воды, тогда если начальная концентрация соли k_1, то концентрация соли после испарения

$$\frac{k_1 V}{V-a} \geq p \Leftrightarrow a \geq V\left(1-\frac{k_1}{p}\right).$$

Подставляя значения k_1=0.015, V=0.8, p=0.02, получим $a \geq 0.2$.

Ответ: [0.2;0.8) (куб. м.)

Задание 2. Точечный источник S монохроматического света находится на оси цилиндра радиусом R, вырезанного из прозрачного кристалла с показателем преломления $n = 1{,}39$, на расстоянии x = 8 мм от ближайшего к нему основания цилиндра (см. рисунок). Найдите максимальное значение R, при котором весь свет от источника, падающий на это основание, распространяется в цилиндре, не выходя наружу через его боковую поверхность.



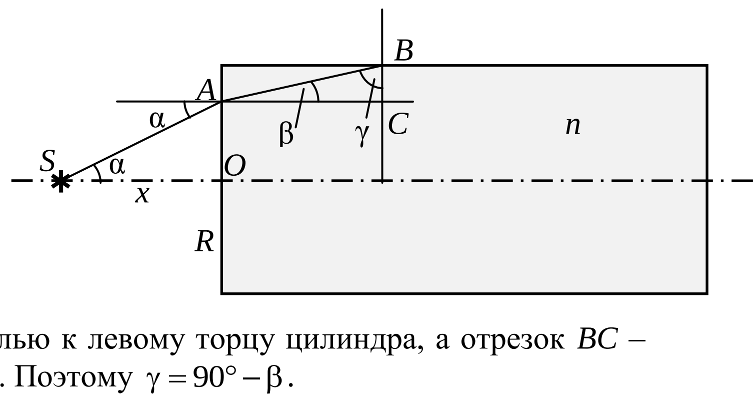
Решение.

Обозначим угол падения луча на торец цилиндра через α.

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{OA}{x}.$$

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

отсюда $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$.



В треугольнике ΔABC угол $\angle C = 90°$, отрезок AC является по построению нормалью к левому торцу цилиндра, а отрезок BC – нормалью к боковой поверхности цилиндра. Поэтому $\gamma = 90° - \beta$.

Чтобы в точке B луч AB не выходил из кристалла наружу, угол падения γ должен быть достаточно велик, а именно, он должен превосходить предельный угол полного внутреннего отражения $\gamma_{пр} = \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Нам по условию задачи требуется, чтобы даже наименьшее значение γ превосходило величину $\gamma_{пр}$. Поскольку $\gamma = 90° - \beta$, минимальное значение γ достигается при максимуме β.

Далее, из формулы $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$ следует, что максимум β достигается при максимуме α. Но $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{OA}{x}$, поэтому при заданном x максимум α достигается при максимальном значении OA, равном, очевидно, R.

Таким образом, наименьшее значение γ при заданном x достигается, если $OA = R$, то есть когда луч SA попадает в самый край торца цилиндра.

Пусть $OA = R$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{R}{x}$,

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{R}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}},$$

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{R}{n\sqrt{R^2+x^2}},$$

$$\sin\gamma = \sin(90^\circ-\beta) = \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{R^2}{n^2\left(R^2+x^2\right)}}.$$

Чтобы в точке B луч AB не выходил из кристалла наружу, даже для наименьшего угла γ должно выполняться неравенство: $\gamma > \gamma_{пр}$ или $\sin\gamma > \sin\gamma_{пр}$. Из определения $\gamma_{пр}$ следует, что $\sin\gamma_{пр} = \dfrac{1}{n}$.

Подставим эти результаты в неравенство $\sin\gamma > \sin\gamma_{пр}$, и оно приобретет вид:

$$\sqrt{1-\frac{R^2}{n^2\left(R^2+x^2\right)}} > \frac{1}{n}.$$

Поскольку $n > 1$, выражение под корнем положительно при $R > 0$ и любых x, и неравенство имеет смысл.

Отсюда:

$$1-\frac{R^2}{n^2\left(R^2+x^2\right)} > \frac{1}{n^2}, \text{ или } 1 > \frac{1}{n^2}\left[1+\frac{R^2}{R^2+x^2}\right].$$

$$n^2 > 1+\frac{R^2}{R^2+x^2},$$

$$n^2-1 > \frac{R^2}{R^2+x^2},$$

$$\left(R^2+x^2\right)\left(n^2-1\right) > R^2,$$

$$x^2\left(n^2-1\right) > R^2\left[1-\left(n^2-1\right)\right] = R^2\left(2-n^2\right).$$

Т.к. $1 < n < \sqrt{2}$, то $R^2 < x^2\cdot\dfrac{n^2-1}{2-n^2}$.

Т.о. $R < x\sqrt{\dfrac{n^2-1}{2-n^2}} = R_{макс}$.

$$R_{\text{макс}} = x\sqrt{\frac{n^2-1}{2-n^2}} = 8\,\text{мм}\cdot\sqrt{\frac{1{,}39^2-1}{2-1{,}39^2}} = 8\,\text{мм}\cdot\sqrt{\frac{1{,}9321-1}{2-1{,}9321}} =$$

$$= 8\,\text{мм}\cdot\sqrt{\frac{0{,}9321}{0{,}0679}} = 8\,\text{мм}\cdot\sqrt{\frac{9321}{679}} \approx 30\,\text{мм.}$$

Ответ: $R_{\text{макс}} = x\sqrt{\dfrac{n^2-1}{2-n^2}} = 8\,\text{мм}\cdot\sqrt{\dfrac{9321}{679}} \approx 30\,\text{мм.}$

Задание 3.

Оценка скорости остывания вулканической магмы в различных условиях является важной задачей с точки зрения установления закономерностей динамики структуры земли и как следствие развития технологий разведки полезных ископаемых. В данной задаче рассматривается пример зависимости температуры магмы от расстояния до центра очага.

Магматический очаг окружен горными породами, в которых температура существенно ниже чем в самом узле. Если в магме расстояние от центра очага обозначить через *s*, то температура *t(s)* (в градусах по Цельсию) в соответствующей точке в магме подчиняется закону

$$t(s+1) = t(s) - 1 - \frac{1}{10}s\text{, s=0,1,2,3,\ldots}$$

Чему равна величина *t(0)*, если *t(*100*)=5*00?

Решение. Суммируя равенства $t(s+1) = t(s) - 1 - \frac{1}{10}s$ по s от 0 до 99, получим

$$t(100) = t(0) - 100 - \frac{1}{10}\cdot(1+2+3+...+99) = t(0) - 100 - \frac{1}{10}\cdot\frac{1+99}{2}\cdot 99 = t(0) - 100 - 495,$$

откуда *t(0)= t(*100*)+5*95*=10*95.

Ответ: 1095 градусов.

Задание 4.

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит, в основном, из метана, но содержат также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Часто он содержит также значительную примесь сернистого водорода – ядовитого газа, от которого добываемый природный газ необходимо очищать. Вместе с тем, сернистый водород является важным сырьем для химической промышленности.

Доля сернистого водорода, содержащегося в природном газе, добываемом на газовом месторождении, составляет α = 5 % от общего количества вещества добытого газа. Какой объем *V* природного газа (рассчитанный для нормальных условий: температуры t = 0 °С и атмосферного давления $p_0 = 0{,}1$ МПа) добывается на данном месторождении за год, если ежесуточно путем глубокой очистки добываемого газа удается получить объем $V_1 = 2$ м^3 сжиженного сернистого водорода? Молярная масса сернистого водорода равна $\mu = 34$ г/моль, плотность жидкого сернистого водорода ρ = 950 кг/м^3. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(К·моль).

Решение.

<u>Масса</u> *m* сернистого водорода, <u>добываемую</u> на месторождении <u>ежесуточно:</u>

$$m = \rho V_1.$$

Количество вещества сернистого водорода, соответствующее массе *m*:

$$\nu_1 = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho V_1}{\mu},$$

где μ – молярная масса сернистого водорода.

<u>Количество вещества</u> ν_2 <u>сернистого водорода</u>, <u>добываемое</u> на месторождении <u>за год:</u>

$$\nu_2 = N\nu_1 = \frac{N\rho V_1}{\mu},$$

где N = 365 – число календарных дней в году.

<u>Количество вещества</u> ν <u>природного газа</u>, добываемого на месторождении <u>за год:</u>

$$\nu = \frac{\nu_2}{\alpha} = \frac{N\rho V_1}{\alpha\mu}.$$

Объем V природного газа, добываемого на месторождении за год, рассматривается при нормальных условиях (p_0 = 0,1 МПа и t = 0 °С, т.е. абсолютная температура T = 273 К). В этом случае газ можно считать близким к идеальному и использовать для его описания уравнение Клапейрона–Менделеева:

$$V = \frac{\nu RT}{p_0} = \frac{N\rho V_1}{\alpha\mu}\cdot\frac{RT}{p_0}.$$

$$V = \frac{365\cdot 950\cdot 2\cdot 8{,}31\cdot 273}{0{,}05\cdot 34\cdot 10^{-3}\cdot 10^5} = \frac{3{,}65\cdot 0{,}95\cdot 2\cdot 8{,}31\cdot 2{,}73}{170}\cdot 10^7 \approx 9{,}3\cdot 10^6\,\text{м}^3.$$

Ответ: $V = \dfrac{N\rho V_1}{\alpha\mu}\cdot\dfrac{RT}{p_0} \approx 9{,}3\cdot 10^6$ м^3.

Задание 5.

Изучение полиэдрических структур кристаллов является перспективным направлением в области нанотехнологий. Приведенная ниже задача рассматривает один специальный вид полиэдра, т.е. многогранника.

Многогранник представляет собой соединение призмы с пирамидой. Основаниями прямой призмы являются правильные треугольники *ABE* и *DCF* с длиной стороны равной 1, боковое ребро призмы равно 2. Боковая грань *ABCD* призмы является основанием пирамиды *SABCD*, вершина *S* и ребро *EF* находятся по разные стороны от плоскости *ABCD*, боковые ребра пирамиды равны $\frac{3}{2}$. Построенный многогранник *SABCDEF* называется семивершинником. Точка *P* находится на диагонали *AC* прямоугольника *ABCD*, при этом $\frac{AP}{PC} = \frac{1}{3}$. Прямая, проходящая через точки *S* и *P*, пересекает границу семивершинника в точке *X*. Найдите площадь сечения семивершинника плоскостью, содержащей прямые *SP* и *SO*, где *O* – центр боковой грани *ABCD*. Чему равна длина отрезка *SX*?

Решение. Пусть *a* – сторона основания призмы, *b* – боковое ребро, *c* – боковое ребро пирамиды *SABCD*. Пусть далее точка Н – середина отрезка *EF*, прямая *SH* перпендикулярна плоскости *ABCD*. Искомое сечение – четырехугольник *ASCH*, площадь которого равна сумме площадей *ASC* и *ACH*, где $AC = \sqrt{5}; SO = 1 \Rightarrow S_{\Delta ASC} = AC\cdot SO/2 = \sqrt{5}/2$.

В треугольнике *ACH*: $OH = a\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\Delta ACH} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot a\sqrt{3}$. Подставляя значения *a*=1, *b*=2, *c*=3/2, получаем $S_{\Delta ASC} = \frac{\sqrt{5}}{2}, S_{\Delta ACH} = \frac{1}{4}\sqrt{15} \Rightarrow S_{ASCH} = \frac{\sqrt{5}}{4}(2+\sqrt{3})$.

Точка X – точка пересечения прямых SP и AH. Обозначим угол OSP через α, а угол SHX через β. Тогда в треугольнике SHX сторона $SH = OH + OS = \dfrac{a\sqrt{3}+\sqrt{4c^2-a^2-b^2}}{2} = 1+\sqrt{3}/2$. Кроме того,

$$tg\alpha = OP/OS = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{4c^2-a^2-b^2}} = \frac{\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}, \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Аналогично $tg\beta = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{\dfrac{5}{8}}, \cos\beta = \sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

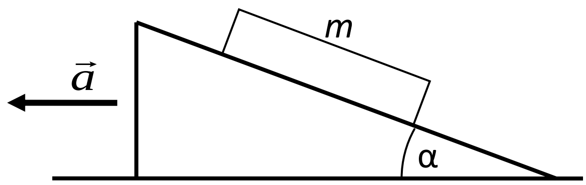
По теореме синусов в треугольнике SHX:

$$\frac{SX}{\sin\beta} = \frac{SH}{\sin(\alpha+\beta)} \Leftrightarrow SX = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{(5+2\sqrt{3})\sqrt{21}}{26}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}}{4}(2+\sqrt{3}); \dfrac{(5+2\sqrt{3})\sqrt{21}}{26}$.

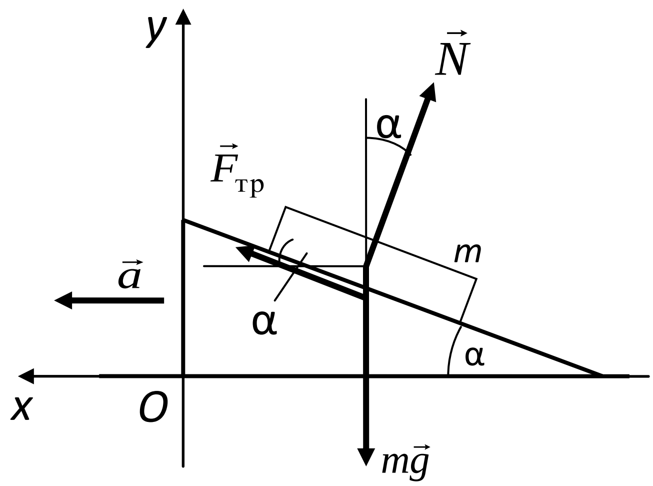
Задание 6.

При землетрясениях происходит движение точек земной поверхности, до которых дошла сейсмическая волна. Характер разрушений, вызываемых сейсмической волной, сильно зависит от того, сопровождается ли это движение значительными деформациями земной поверхности, или нет. Представление о последствиях прохождения сейсмической волны без значительных деформаций земной поверхности можно получить, решая следующую задачу.



Брусок m покоится на наклонном плоском недеформируемом основании, составляющем угол α с горизонтом. Коэффициент трения между бруском и наклонным основанием μ = 0,6. Основание движется поступательно с постоянным горизонтальным ускорением $\vec{a}$, как показано на рисунке. Максимальное значение модуля ускорения $\vec{a}$, при котором брусок сохраняет свое состояние покоя относительно основания при движении последнего, равно a = 2,5 м/с^2. Найдите α (в ответе достаточно указать численное значение sin α, cos α или tg α). Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение.



На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{тр}$, направленной по касательной к наклонной плоскости.

Согласно 2-му закону Ньютона, сумма приложенных к телу сил вызывает его ускорение: $\vec{F} = m\vec{a}$. Ускорение бруска равно ускорению основания и поэтому направлено <u>влево</u> (см. рисунок). Значит, равнодействующая приложенных к бруску сил тоже направлена влево. Но сила $m\vec{g}$ вертикальна, а сила $\vec{N}$ направлено вверх-вправо. Поэтому сила трения должна быть направлена вдоль наклонной плоскости вверх-влево.

Сила трения в данной задаче является силой трения покоя, ее модуль связан с модулем нормальной составляющей силы реакции опоры неравенством $F_{\text{тр}} \le \mu N$, где μ – коэффициент трения. В случае максимального ускорения модуль силы трения тоже максимален и выражается равенством $F_{\text{тр}} = \mu N$.

$$\begin{cases} F_{\text{тр}}\cos\alpha - N\sin\alpha = ma \\ F_{\text{тр}}\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = 0 \\ F_{\text{тр}} = \mu N \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu N\cos\alpha - N\sin\alpha = ma \\ \mu N\sin\alpha + N\cos\alpha = mg \end{cases}$$

$$\frac{ma}{\mu\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{mg}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha},$$

$$a_{\text{макс}} = g\,\frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha} = g\,\frac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{\mu\operatorname{tg}\alpha + 1}.$$

$$a\cdot(\mu\operatorname{tg}\alpha + 1) = g\cdot(\mu - \operatorname{tg}\alpha).$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu g - a}{g + \mu a}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu g - a}{g + \mu a} = \frac{0{,}6\cdot 10 - 2{,}5}{10 + 0{,}6\cdot 2{,}5} = \frac{3{,}5}{11{,}5} = \frac{7}{23} \approx 0{,}3.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\mu g - a}{g + \mu a} = \dfrac{7}{23} \approx 0{,}3$, или $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\mu g - a}{g + \mu a}\right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{7}{23}\right) \approx \operatorname{arctg} 0{,}3$.

Ответы на задания заключительного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по геологии 2013-2014 уч.г.

Вариант для 5-9 классов

№ задания	Ответ	Выставляемые баллы				
		+	+.	±	∓	-
1	[0.0875;0.125] $м^3$	**30**	**20**	**15**	**5**	**0**
2	$9{,}3\cdot10^6$ $м^3$	**30**	**20**	**15**	**5**	**0**
3	509 градусов	**30**	**20**	**15**	**5**	**0**

Вариант №1 для 10-11 классов

№ задания	Ответ	Выставляемые баллы				
		+	+.	±	∓	-
1	[0.12;0.6) $м^3$	**15**	**12-13**	**7-8**	**5**	**0**
2	27 мм	**15**	**12-13**	**7-8**	**5**	**0**
3	1590 градусов	**15**	**12-13**	**7-8**	**5**	**0**
4	10^8 $м^3$	**15**	**12-13**	**7-8**	**5**	**0**
5	$10\sqrt{3}$; $\frac{20\sqrt{13}}{13}$	**20**	**14-16**	**9-11**	**5**	**0**
6	$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mu g - a}{g + \mu a}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{21}{52}\right) \approx \mathrm{arctg}\, 0{,}4$	**20**	**14-16**	**9-11**	**5**	**0**

Вариант №2 для 10-11 классов

№ задания	Ответ	Выставляемые баллы				
		+	+.	±	∓	-
1	[0.2;0.8) $м^3$	**15**	**12-13**	**7-8**	**5**	**0**
2	$R_{\text{макс}} = x\sqrt{\frac{n^2-1}{2-n^2}} = 8\text{ мм}\cdot\sqrt{\frac{9321}{679}} \approx 30\text{ мм}.$	**15**	**12-13**	**7-8**	**5**	**0**
3	1590 градусов	**15**	**12-13**	**7-8**	**5**	**0**
4	$9{,}3\cdot10^6$ $м^3$	**15**	**12-13**	**7-8**	**5**	**0**
5	$\frac{\sqrt{5}}{4}(2+\sqrt{3});\frac{(5+2\sqrt{3})\sqrt{21}}{26}$	**20**	**14-16**	**9-11**	**5**	**0**
6	$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mu g - a}{g + \mu a}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{7}{23}\right) \approx \mathrm{arctg}\, 0{,}3$	**20**	**14-16**	**9-11**	**5**	**0**

2013/2014 учебный год
КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[1]

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ»
по ГЕОЛОГИИ для 5-9 классов

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **80** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **50** баллов до **79** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **90** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **75** баллов до **89** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **65** баллов до **74** баллов включительно.*

[1] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по геологии.*

2013/2014 учебный год
КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[2]

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ»
по ГЕОЛОГИИ для 10-11 классов

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **80** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **50** баллов до **79** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **90** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **75** баллов до **89** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **65** баллов до **74** баллов включительно.*

---

[2] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по геологии.*

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
2012-2013 учебный год

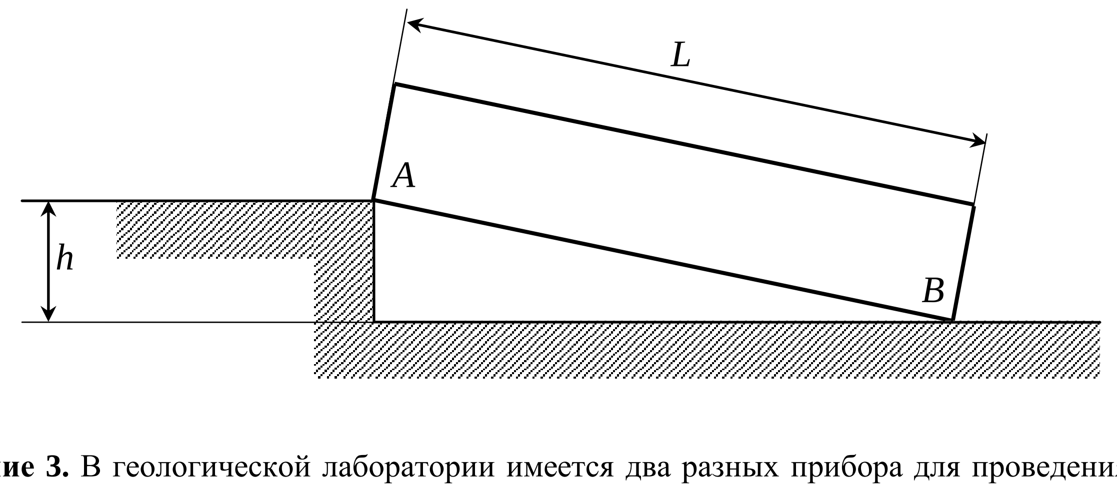
ЗАДАНИЕ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ «ГЕОЛОГИЯ»

Олимпиадные задания рассчитаны на возрастную категорию школьников с 7 по 11 классы. Задания №№ 1 и 2 рассчитаны на учащихся 7-8-х классов. Задания №№ 3 и 4 - на учащихся 9-10-х классов. Учащимся 11-х классов по силам справиться со всеми заданиями, однако, для того чтобы стать призером отборочного этапа не обязательно присылать решения всех заданий. Решайте столько заданий, сколько сможете. Жюри олимпиады при оценке работы будет учитывать обоснование, правильность и полноту решений каждого задания.

Задание 1. Имеется 200 одинаковых образцов горной породы, в каждом из которых имеется положительная доля глинистого компонента. При исследовании образцов выяснилось, что любые 50 из них содержат не менее 20% общей совокупности этого компонента. Каков максимальный процент от общей совокупности глинистого компонента может содержаться в одном образце?

Задание 2. На Земле и в ее недрах часто происходят процессы, связанные с относительными перемещениями структурных элементов земной коры, завершающиеся срывом (обвалы в горах, движения тектонических плит и т.п.). В качестве простой иллюстрации предлагается следующая задача.

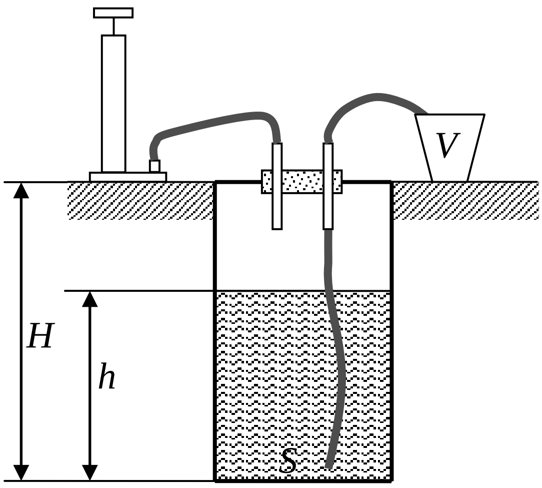
Однородная плита в форме прямоугольного параллелепипеда длиной L, опирающаяся своим основанием AB на уступ в виде прямоугольной ступеньки высотой h и ребром B – на гладкую горизонтальную поверхность, медленно сползает по уступу, а затем, сорвавшись с него, падает на горизонтальную поверхность. На каком расстоянии s от основания уступа будет находиться ребро A плиты в момент соударения основания плиты с горизонтальной поверхностью, если известно, что в момент срыва с уступа (показан на рис.) центр масс плиты находился на той же высоте h над горизонтальной поверхностью, что и ступенька уступа? Скорость плиты в момент срыва считать равной нулю.



Задание 3. В геологической лаборатории имеется два разных прибора для проведения двух видов исследований образцов горных пород и два одинаковых компьютера, при этом каждый прибор соединен с одним компьютером. В распоряжении руководителя лаборатории имеется 7 студентов второго и 8 студентов первого курсов. Предполагается выбрать двух студентов-второкурсников и поручить им работать на5-ти приборах, а выбранных двух первокурсников привлечь к работе на компьютерах. Сколькими способами можно сделать указанный выбор?

Задание 4. Для увеличения добычи нефти на нефтяных месторождениях часто по периметру месторождения обустраивают специальные нагнетательные скважины, через которые в осадочные породы, содержащие нефть, под высоким давлением закачивают воду. Давление воды способствует движению нефти по пласту в направлении от периферии месторождения к добывающим скважинам. Данный метод, получивший название заводнения месторождения, играет важную роль при добыче нефти на истощенных месторождениях, а также при добыче вязких сортов нефти. В качестве иллюстрации идеи вытеснения жидкости из объема приложенным давлением предлагается следующая задача.

Тонкостенная бочка высотой H = 1,3 м и площадью основания S = 0,2 м^2, закопанная в землю так, что ее верхнее основание находится на уровне земли, используется в качестве емкости для хранения бензина. Для извлечения бензина из емкости применяют следующий прием: бочку герметически закрывают пробкой, содержащей два патрубка, один из которых служит для закачки воздуха в бочку с помощью обычного насоса (см. рис.), а другой – тонкой трубкой соединяется с придонным пространством емкости и служит для отбора бензина. Сколько качаний нужно сделать насосом, чтобы извлечь из емкости на поверхность земли объем V = 20л бензина? За одно качание насос захватывает из атмосферы и нагнетает в емкость объем воздуха v = 240 см^3. Начальная высота уровня бензина в емкости составляет h = 1 м, плотность бензина ρ= 900 кг/м^3, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.



Задание 5. Деформированный кристалл кварца имеет форму треугольной пирамиды, у которой грани не являются равнобедренными треугольниками, но в каждой из трех пар скрещивающихся ребер длины этих ребер равны. Может ли какая-либо грань кристалла иметь тупой угол? Ответ обоснуйте.

Задание 6. Для снабжения электроэнергией отдаленного рыбацкого поселка, расположенного в бухте на побережье Берингова моря, предлагается построить приливную ГЭС, использующую для выработки электроэнергии кинетическую энергию приливного течения в устье бухты. Площадь водной поверхности бухты в отлив равна S_1 = 10 км^2, а в прилив – S_2 = 11 км^2, перепад высот уровня воды между приливом и отливом h = 2 м, площадь поперечного сечения устья бухты изменяется от прилива к отливу от S_3 = 1100 м^2 до S_4 = 900 м^2. Оцените, какова максимальная энергия, которую можно получить за сутки от воды, текущей через устье бухты. Учтите при этом, что разница уровней воды в бухте и в море ничтожна по сравнению с h даже при максимальной скорости приливного течения. Плотность морской воды ρ = $1{,}03\cdot10^3$ кг/м^3.

Используя показания электрического счетчика у себя дома, оцените, хватит ли этой энергии для снабжения поселка с населением 2000 человек.

Укажите самый доступный, на Ваш взгляд, способ, как при строительстве ГЭС увеличить энергию текущей воды в несколько раз.

Решения заданий отборочного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по геологии 2013 г.

Задание 1. Пусть V- общий объем глинистого компонента в образцах, x_i - доля его в образце с номером i. Будем считать, что $x_1 \le x_2 \le ... x_{200}$. Тогда по условию задачи требуется определить максимальное значение x_{200} при условиях $x_1 + x_2 + ... + x_{50} \ge 0.2$, $x_1 + x_2 + ... + x_{200} = 1$, $x_i \ge 0$,i=1,2,3,…,200. Заметим, что если в паре номеров *i и i+1,* такой, что $50 \le i < i+1 < 200$ соответствующие доли связаны неравенством $x_i < x_{i+1}$, то набор значений x_i можно улучшить, уменьшив значение x_{i+1} на величину $x_{i+1} - x_i$>0 и увеличив x_{200} на это же величину. Это означает, что в наборе долей с максимальной последней долей значения $x_{50} = x_{51} = ... = x_{199} \le x_{200}$. Совершенно аналогично рассуждая, приходим к выводу, что в наборе долей с максимальной последней долей значения $x_1 = x_2 = ... = x_{49} = x_{50}$ По условию $50x_1 \ge 0.2 \Leftrightarrow x_1 \ge 1/250$. Отсюда следует $x_{200} \le 1 - 199/250 = 51/250$. Полагая $x = x_1 = x_2 = ... = x_{199} = 1/250, x_{200} = 51/250$, получаем, что такой набор соответствует условиям задачи.

Ответ: 20.4%.

Задание 2. Плита представляет собой твердое тело, движение которого сводится к поступательному и вращательному движению. Описывая поступательное движение плиты, воспользуемся моделью материальной точки, т.е. заменим плиту геометрической точкой, с которой связаны масса плиты и т.п. Этой точкой служит центр масс плиты, который в случае однородной плиты совпадает с ее геометрическим центром. Движение центра масс происходит под действием сил, действующих на плиту, в соответствии со вторым законом Ньютона.

Покажем, что в процессе падения плита не касается вертикальной стенки уступа. Предположим обратное: ребро *A* касается вертикальной стенки *CD* в точке *E* (см. рис. 1).

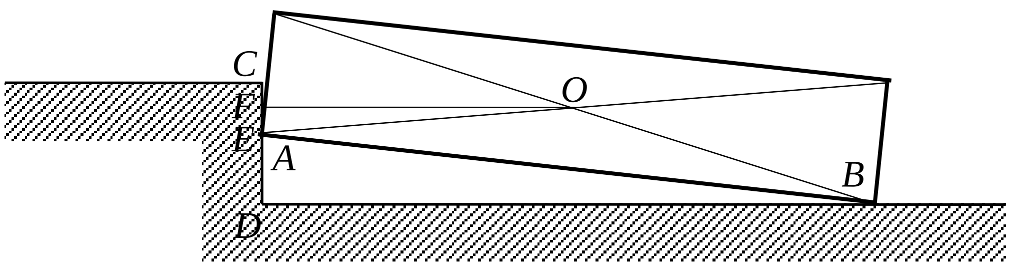


Рис. 1

Тогда длина перпендикуляра *OF*, опущенного из центра масс плиты *O* на стенку *CD*, меньше длины наклонного отрезка *OA*. Это означает, что первоначальное расстояние *OA* от точки *O* до стенки *CD* больше расстояния *OF* от точки *O* до стенки *CD* в процессе падения. Значит, центр масс плиты *O*, двигаясь из состояния покоя, должен, опускаясь, смещаться влево. Для этого горизонтальная составляющая равнодействующей приложенных к плите сил должна быть направлена влево. На плиту действуют вертикальная сила тяжести, вертикальная сила реакции опоры со стороны горизонтальной поверхности и сила реакции опоры со стороны стенки *CD*, имеющая горизонтальную составляющую, либо направленную вправо, либо равную нулю.

Таким образом, горизонтальная составляющая равнодействующей приложенных к плите сил не может быть направлена влево, и исходное предположение, что в процессе падения плита касается вертикальной стенки уступа, неверно.

Итак, в процессе падения плита не касается вертикальной стенки уступа, и на плиту действуют только вертикальные силы: сила тяжести и сила реакции опоры со стороны горизонтальной поверхности. Поэтому центр масс плиты O движется из состояния покоя по вертикали вниз, и расстояние от него до стенки CD остается равным OA. Как видно из рисунка 2, искомое расстояние $s = OA - L/2$.

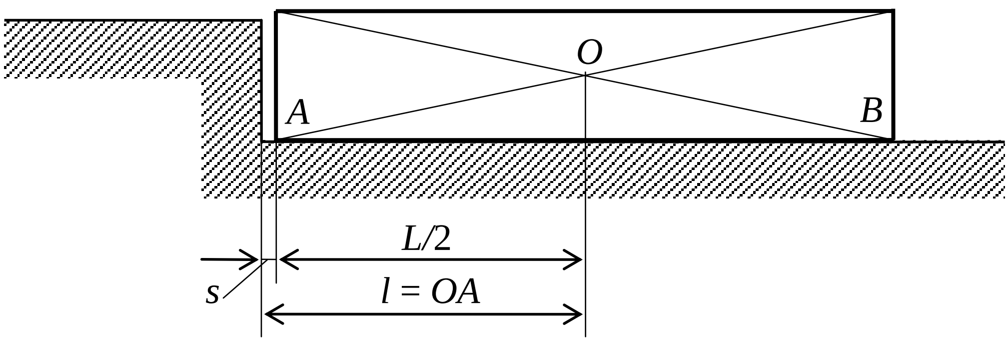


Рис. 2

Обозначим через α угол между горизонтальной плоскостью и основанием плиты в момент отрыва плиты от уступа (см. рисунок в условии задачи). Тогда

$$\sin\alpha = \frac{h}{L},\ OA = \frac{L}{2\cos\alpha},\ s = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(h/L)^2}} - 1\right) = \frac{L}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-(h/L)^2}}{\sqrt{1-(h/L)^2}}.$$

Ответ: $\frac{L}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-(h/L)^2}}{\sqrt{1-(h/L)^2}}$.

Задание 3. По условию задачи приборы разные, и за них можно посадить только студентов второго курса. Поскольку студентов семеро, то в данном случае требуется определить количество упорядоченных двоек из семи человек. Число таких упорядоченных двоек равно числу размещений из семи элементов по два, то есть $A_7^2 = \frac{7!}{5!}$=42. Далее, поскольку компьютеры одинаковые, то для студентов первого курса требуется определить количество неупорядоченных двоек из восьми человек. Число таких неупорядоченных двоек равно числу сочетаний из восьми элементов по два, то есть $C_8^2 = \frac{8!}{2!6!}$=28. Для каждого набора второкурсников таким образом можно указать 28 наборов первокурсников. Значит, всего способов набрать коллектив из четырех человек будет 42·28=1176.

Ответ:1176.

Задание 4. Воздух, находящийся в бочке в момент завершения откачки бензина, занимает объем $(H - h)S + V$ и находится под давлением $p_0 + \rho g(H - h + V/S)$. Первоначально, до выполнения процесса откачки, это же количество вещества воздуха находилось при атмосферном давлении p_0 и занимало объем $(H - h)S + Nv$, где N – число качаний, сделанных насосом. В соответствии с законом Бойля–Мариотта тогда можно записать:

$$p_0[(H-h)S + Nv] = \left[p_0 + \rho g\left(H - h + \frac{V}{S}\right)\right] \cdot [(H-h)S + V].$$

Отсюда

$$N = \frac{V}{v} + \frac{\rho g S}{p_0 v}\left(H - h + \frac{V}{S}\right)^2 = 96.$$

При g = 10 м/с^2 формальный точный результат N = 95,(3). Это означает, что при последнем, 96-м закачивании в бочку нагнетается не вся захваченная насосом из атмосферы порция воздуха, а лишь ее треть. Но сделать это 96-е закачивание все равно нужно, т.к. 95 закачиваний не позволят извлечь из бочки ровно 20 л бензина.

Ответ: 96.

Задание 5. Рассмотрим трехгранный угол S тетраэдра SABC. Будем считать, что $\angle$ASC=α≥$\angle$BSC=β≥ASC=γ. По свойству трехгранных углов справедливо соотношение α≤ β+ γ. По условию задачи четыре грани тетраэдра SABC являются равными треугольниками с углами α, β, γ. Если предположить, что α – тупой угол, то β+ γ> π/2, откуда π = α+ β+ γ> π , из полученного противоречия следует. Что все грани пирамиды – остроугольные треугольники.

Ответ: Не может.

Задание 6. Для выполнения оценки примем сначала несколько упрощений. Будем считать, что время от достижения максимального уровня воды в бухте до достижения ее минимального уровня равно τ = 6 ч. Будем считать, что перепад высот уровня воды между приливом и отливом в каждом переходе «прилив – отлив» и обратно – один и тот же. Оценим среднюю площадь S водной поверхности бухты как среднее арифметическое от S_1 и S_2: $S = \frac{S_1 + S_2}{2} = 10{,}5$ км^2. Аналогично оценим среднюю площадь s поперечного сечения устья бухты: $s = \frac{S_3 + S_4}{2} = 1000$ м^2.

Определим объем V и массу M воды, вытекающей из бухты через устье за время от достижения максимального уровня воды в бухте до достижения ее минимального уровня: $V = hS$ = 2 м · 10,5 км^2 = 21·10^6 м^3; $M = \rho V = \rho hS$ = 21,63·10^9 кг.

Предположим для оценки, что в течение всех 6 часов вода вытекает из бухты с постоянной скоростью v_0. (В действительности вода вытекает из бухты сначала медленно, затем все быстрее, а потом скорость воды уменьшается до нуля, после чего вода начинает затекать в бухту, и процесс изменения величины ее скорости в следующие 6 часов повторяется. Однако мы выберем из-за простоты модель постоянной скорости воды, поскольку нас интересует суммарный эффект за 6 часов. Для грубой оценки это допустимо, в порядке величины полученного результата мы не ошибемся.) В таком случае для v_0 получим уравнение $hS = v_0 \tau s$, откуда $v_0 = \frac{hS}{\tau s} = \frac{21{,}63 \cdot 10^6}{6 \cdot 3600 \cdot 1000} \approx 1{,}0$ (м/с). (Кстати, чтобы получить такую скорость воды на выходе из бухты, нужен перепад уровней воды в море и в бухте $\Delta h = v_0^2/(2g)$ = 5 см, что и отмечено в условии.) Отсюда получается оценка кинетической энергии воды, вытекающей за 6 часов из бухты: $E = \frac{Mv_0^2}{2} \approx 10{,}8 \cdot 10^9$ Дж. За сутки получаем $E_{\text{за сутки}} = 4E \approx 43 \cdot 10^9$ Дж. Это ответ на первый вопрос задачи. Отметим, что приливная ГЭС не может превратить в электроэнергию всю кинетическую энергию текущей воды: в таком случае вода на ГЭС остановилась бы и не перетекала бы в дальнейшем из бухты в море и обратно.

Оценим суточный расход электроэнергии в поселке. Бытовые счетчики обычно показывают расход электроэнергии в киловатт-часах (1кВт·ч = $3{,}6\cdot10^6$ Дж). Социальная норма расхода электроэнергии составляет около 50 кВт·ч в месяц, т.е. около $6\cdot10^6$ Дж на человека в сутки (это значит, что средняя расходуемая мощность всего около 70 Вт). При таком скромном энергопотреблении поселку с населением в 2000 чел. за сутки требуется только на внутриквартирные нужды $12\cdot10^9$ Дж электроэнергии. А еще есть расходы электроэнергии на работу причала, ремонтных мастерских, магазина, школы, на жилищно-коммунальное хозяйство. Поскольку КПД приливной ГЭС заметно меньше 100%, получим, что возможностей ГЭС при числовых данных из условия задачи недостаточно для снабжения поселка электроэнергией.

Поскольку $v_0 = \dfrac{hS}{\tau s}$, энергию текущей воды можно увеличить, уменьшив площадь s поперечного сечения устья бухты при строительстве ГЭС. Но при этом надо учитывать, что рост v_0 связан с ростом перепада $\Delta h = v_0^2/(2g)$ уровней воды в море и в бухте, а это значит, что часть воды может и не успеть пройти через устье.

Ответ: $E_{\text{за сутки}} \approx 43\cdot10^9$ Дж. Возможностей ГЭС недостаточно для снабжения поселка электроэнергией. Энергию текущей воды можно увеличить, уменьшив площадь поперечного сечения устья бухты.

**Ответы на задания отборочного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по геологии
2013 г.**

Задание 1.
Ответ: 20.4%.

Задание 2.
Ответ: $\frac{L}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-\left(h/L\right)^2}}{\sqrt{1-\left(h/L\right)^2}}$.

Задание 3.
Ответ: 1176.

Задание 4.
Ответ: 96.

Задание 5.
Ответ: Ни одна грань кристалла не может иметь тупой угол.

Задание 6.
Ответ: $43\cdot10^9$ Дж.

Возможностей ГЭС недостаточно для снабжения поселка электроэнергией.

Энергию текущей воды можно увеличить, уменьшив площадь поперечного сечения устья бухты.

Олимпиада школьников «Ломоносов»

ГЕОЛОГИЯ

Вариант 1

1. В лабораторию поступила партия новых образцов пород, которую необходимо разложить по ящикам поровну. Лаборант сначала положил в каждый ящик по 12 образцов, но при этом 5 образцов оказались лишними. Тогда лаборант оставил один ящик пустым, а все образцы разложил по оставшимся ящикам поровну. Сколько образов пород было в партии, если в каждый ящик было положено не более 18 образцов?

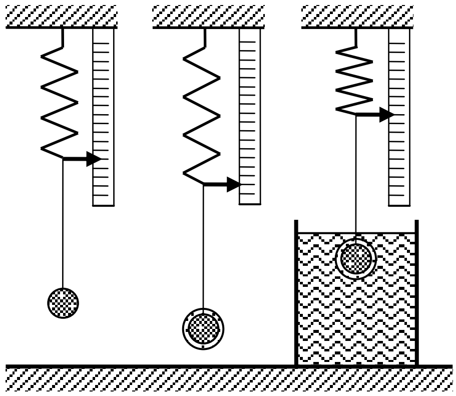
2. Планета имеет форму шара радиусом $R = 4000$ км. Как и Земля, она вращается вокруг своей оси и обладает магнитным полем. Это поле выглядит как поле постоянного полосового магнита, центр которого совпадает с центром планеты. Как и у Земли, положения географического и магнитного полюсов планеты не совпадают.

В точке с долготой θ_1 на экваторе планеты стрелка магнитного компаса направлена по географическому меридиану. Расстояние между географическим и магнитным полюсами планеты вдоль ее поверхности равно $L = 700$ км. Найдите угол α между направлением стрелки магнитного компаса и географическим меридианом в точке экватора с долготой $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$.

3. Одним из разделов современной геологии является геофизика – наука, занимающаяся исследованием геологической среды путем изучения различных физических полей Земли, многие из которых имеют волновую природу (например, электромагнитные или сейсмические поля) и описываются суммами синусов и или косинусов аргумента nwt, где n – положительное целое, w-угловая частота, t – время. Каждое такое слагаемое имеет вид, например, $sin(nwt+\varphi_n)$ и называется n –ой гармоникой. Сложный волновой геофизический сигнал при расчетах часто описывается двумя первыми гармониками. На эту тему предлагается следующая задача.

При проведении геофизических исследований было зарегистрировано волновое поле, представляющее собой результат наложения двух различных гармонических сигналов. Зависимость амплитуды первого сигнала от времени t имеет вид $2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$, а второго сигнала $2\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$. Для каких моментов времени на интервале (4,7) величины амплитуд сигналов совпадут?

4. Для определения плотности пористой горной породы в геологической практике часто используют метод, состоящий из трех последовательных взвешиваний. Сначала берут образец исследуемой породы и взвешивают его в воздухе. Затем образец парафинируют, т.е. целиком опускают в расплавленный парафин и вынимают, чтобы весь образец покрылся слоем застывшего парафина. После этого парафинированный образец взвешивают в воздухе. И, наконец, третье измерение – взвешивание парафинированного образца в воде (см. рисунок).



Какова плотность породы, если результаты последовательных взвешиваний на пружинном динамометре оказались равными соответственно P_1 = 2,6 Н, P_2 = 3,0 Н, P_3 = 1,5 Н? При расчете плотностью воздуха пренебречь, плотность воды принять равной ρ_0 = 1000 кг/м^3, плотность парафина $\rho_п$ = 870 кг/м^3.

5. Неравномерность просадки грунтов под инженерно-техническими сооружениями – одна из актуальных проблем инженерной геологии, которая изучает структуру, динамику верхних горизонтов земной коры при ее взаимодействии с основаниями сооружений разного профиля. Преодоление неравномерной просадки грунтов является стандартной задачей не только для специалистов в области инженерной геологии, такие проблемы часто возникают в нефтяной геологии, строительстве спортивных сооружений. Просадочные грунты, вследствие собственного веса или веса фундамента сооружения, способны давать при замачивании дополнительные осадки, которые в инженерной геологии называются просадками. Любое строительство важного объекта должно быть предварено тщательным изучением просадочных свойств грунтов. Если объект достаточно крупный, то просадочные свойства грунтов под ним могут сильно отличаться в пределах занимаемой площади. В таком случае для корректного определения параметров фундамента сооружения необходимо применять сложные математические модели. Приведенная ниже задача иллюстрирует такую ситуацию. Данные по значениям просадок с целью экономии вычислений являются модельными.
Фундамент под резервуар изначально имел основание в виде прямоугольника ABCD со сторонами AB=50м, AD=20м, при этом плоскость ABCD совпадала с горизонтальной. В результате просадки вершина B стала ниже на 1м, вершина D - на 2м, а вершина A сохранила начальный уровень. Чему равна величина угла, образовавшегося между горизонтальной плоскостью и плоскостью основания фундамента?

6. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, вследствие окислительно-восстановительных реакций их вещества с окружающим водным раствором часто возникают электрические заряды. Это приводит к возникновению в пространстве аномального электрического поля. Обнаружение этих аномалий на поверхности Земли позволяет установить места залегания самих рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 30$ см находится система двух одинаковых по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов, создающих электростатическое поле. Линии одинакового потенциала этого поля на поверхности глобуса совпадают с его параллелями, при этом потенциал точек на параллели с северной широтой $\alpha = 30^\circ$ равен нулю. Найти расстояние от положительного заряда до центра глобуса, если потенциал поля на северном полюсе глобуса равен $\varphi_1 = -10$ мВ, а потенциал поля на южном полюсе глобуса равен $\varphi_2 = +1$ мВ. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрическое поле зарядов. Потенциал зарядов на значительном удалении от глобуса считать равным нулю.

ГЕОЛОГИЯ

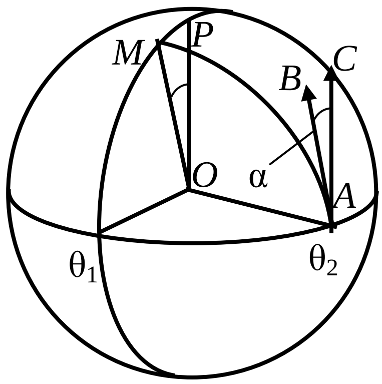
Вариант 1

Решения и ответы

1. Обозначим искомое число образцов через k, а число ящиков через n, тогда по условию задачи $\begin{cases} k = 12n+5, \\ \frac{k}{n-1} \in N. \end{cases}$ Отсюда $\frac{12n+5}{n-1} = 12 + \frac{17}{n-1} \in N$. Поскольку n-1 является делителем 17, то отсюда заключаем, что $n \in \{2,18\}$. Таким образом, число ящиков может быть равно 2 или 18. В случае $n=2$ значение $k=12\cdot 2+5=29$, и в один оставшийся ящик кладутся все 29 образцов, что не соответствует условию задачи. В случае $n=18$ значение $k=12\cdot 18+5=221$, и в каждый ящик кладется 13 образцов.

Ответ: 221 образец

2. На рисунке изображены магнитный (M) и географический (P) полюса планеты, по условию задачи, лежащие на одном географическом меридиане с долготой θ_1, а также угол α между направлением стрелки компаса (изображено вектором AB) и касательной AC к меридиану с долготой $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$ в точке наблюдения A.



Угол MOP равен α по признаку равенства углов с взаимно параллельными сторонами: $OM \parallel AB$, $OP \parallel AC$. Действительно, во-первых, эти прямые попарно лежат в одной плоскости: OM и AB – в плоскости MOA магнитного меридиана, OP и AC – в плоскости POA географического меридиана. Во-вторых, все четыре прямых OM, OP, AB и AC перпендикулярны отрезку OA.

Поэтому угол между направлением стрелки магнитного компаса и географическим меридианом в точке экватора с долготой $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$ равен $\alpha = \frac{L}{2\pi R}\cdot 360^\circ \approx 10^\circ$.

Ответ: 10^0.

3. Условие задачи приводит к уравнению

$$2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right).$$

Для решения последнего запишем его в виде

$$2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-2\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)=0 <==>$$

$<==> 4\sin\frac{\pi}{4}cos\, t + 2sin\frac{\pi}{6}cos\, 2t = 0 <==> 2\sqrt{2}cost + cos2t = 0.$

Из равенства $cos2t = 2cos^2t - 1$ получаем

$$2cos^2t + 2\sqrt{2}cost - 1 = 0 <==> cost = \frac{-\sqrt{2}\pm 2}{2}.$$

В силу ограниченности косинуса случай $cost = \frac{-\sqrt{2}-2}{2}$ не подходит. Следовательно, $cost = \frac{-\sqrt{2}+2}{2}$. Это значение как нетрудно видеть лежит на интервале $(0,\frac{1}{2})$. При этом $7 < \frac{7\pi}{3}$, значит значение $t = 2\pi - \arccos(\frac{-\sqrt{2}+2}{2})$ никаких других корней на указанном интервале нет.

Ответ: при $t = 2\pi - \arccos(\frac{-\sqrt{2}+2}{2})$

4. Пренебрегаем влиянием выталкивающей силы со стороны воздуха на образец при проведении первых двух взвешиваний и учитываем, что силы натяжения нити, действующие на образец при каждом из взвешиваний, составляют соответственно P_1, P_2, P_3. Тогда получим:

$P_1 = mg$,

$P_2 = (m + M)g$,

$P_3 = (m + M)g - \rho_0 g(V + M/\rho_п)$,

где m и V – соответственно масса и объем исходного образца, M – масса налипшего парафина.

Отсюда следует, что

$m = P_1/g$,

$M = (P_2 - P_1)/g$,

$P_2 - P_3 = \rho_0 g(V + M/\rho_п)$.

Из последнего уравнения, подставив в него выражение для M, получаем:

$$V = \frac{P_2 - P_3}{\rho_0 g} - \frac{P_2 - P_1}{\rho_п g}$$

и, следовательно,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P_1}{g\left(\dfrac{P_2 - P_3}{\rho_0 g} - \dfrac{P_2 - P_1}{\rho_п g}\right)} = \frac{P_1}{\dfrac{P_2 - P_3}{\rho_0} - \dfrac{P_2 - P_1}{\rho_п}} = \frac{\rho_0 \rho_п P_1}{\rho_п (P_2 - P_3) - \rho_0 (P_2 - P_1)}.$$

При $P_1 = 2{,}6$ Н, $P_2 = 3{,}0$ Н, $P_3 = 1{,}5$ Н, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $\rho_п = 870$ кг/м^3 имеем $\rho \approx 2500$ кг/м^3.
Ответ: 2500 кг/м^3.

5. Рассмотрим горизонтальную плоскость проходящую через точку A. Обозначим через B_1 и D_1 проекции точек B и D соответственно на эту плоскость. Тогда BB_1 =1 и DD_1=2. По теореме Пифагора $AB_1=\sqrt{2499}$, $AD_1=\sqrt{396}$, $B_1D_1=\sqrt{2899}$. По теореме косинусов в треугольнике AB_1D_1:
2499=2899+396-2$\sqrt{2899}\sqrt{3996}\cos\measuredangle AD1B1$, отсюда $\cos\measuredangle AD1B1 = \frac{1699}{3\sqrt{11}\sqrt{2899}}$.

Далее, пусть E – точка пересечения горизонтальной плоскости и прямой BD. Из теоремы Фалеса ED_1=2 B_1D_1=2$\sqrt{2899}$. По теореме косинусов в треугольнике AD_1E:
AE^2=11596+396-$\frac{398}{3\sqrt{11}\sqrt{2899}}\sqrt{11596}\sqrt{396} = 10400$. Пусть длина высоты D_1P треугольника AED_1 равна h. Тогда из равенства AE·h = $ED_1 \cdot AD_1 \sin\measuredangle AD1E$ найдем h:

$$h=\frac{2\sqrt{1237}}{\sqrt{13}}.$$

откуда тангенс искомого угла D_1PD равен 2/h=$\sqrt{\frac{13}{1237}}$.

Ответ: arctg($\sqrt{\frac{13}{1237}}$).

6. Из картины линий равного потенциала на поверхности глобуса следует, что точечные заряды под его поверхностью находятся на диаметре, соединяющем северный и южный полюсы глобуса, причем отрицательный заряд $-q$ находится к северному полюсу ближе, чем положительный заряд q. Легко проверить, что точки плоскости, перпендикулярной к отрезку, соединяющему два заряда, и проходящей через его середину, имеют потенциал равный нулю. По условию задачи эта плоскость пересекает поверхность глобуса по параллели на широте $\alpha = 30^\circ$ в северном полушарии. Отсюда следует, что расстояние от середины отрезка, соединяющего заряды, до центра O глобуса равно $R\sin\alpha$. Обозначим расстояние между точечными зарядами через $2a$, тогда выражения для потенциалов поля точечных зарядов на северном полюсе и на южном полюсе глобуса могут быть записаны в виде:

$$\varphi_1 = \frac{-kq}{x_1 - a} + \frac{kq}{x_1 + a} = -\frac{2kqa}{x_1^2 - a^2},$$

$$\varphi_2 = \frac{-kq}{x_2 + a} + \frac{kq}{x_2 - a} = \frac{2kqa}{x_2^2 - a^2},$$

где $x_1 = R(1 - \sin\alpha)$ и $x_2 = R(1 + \sin\alpha)$ – расстояния от середины отрезка, соединяющего два заряда, соответственно до северного и южного полюсов глобуса. Разделив первое из этих уравнений на второе и исключив тем самым неизвестную величину q, получим:

$$\frac{x_2^2 - a^2}{x_1^2 - a^2} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2},$$

откуда, с учетом выражений для x_1 и x_2,

$$a^2 = \frac{\varphi_1 x_1^2 + \varphi_2 x_2^2}{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{R^2}{\varphi_1 + \varphi_2}\left[\varphi_1(1 - \sin\alpha)^2 + \varphi_2(1 + \sin\alpha)^2\right] = R^2\left(1 + 2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}\sin\alpha + \sin^2\alpha\right).$$

Искомое расстояние от положительного точечного заряда до центра глобуса составляет

$$l = R\sin\alpha - a = R\left(\sin\alpha - \sqrt{1 + 2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}\sin\alpha + \sin^2\alpha}\right) = 10 \text{ см}.$$

Ответ: 10 см.

ГЕОЛОГИЯ

Вариант 2

1. В лабораторию поступила партия новых образцов пород, которую необходимо разложить по ящикам поровну. Лаборант положил в каждый ящик по 13 образцов, но при этом 3 образца оказалось лишними. Тогда лаборант оставил два ящика пустыми, а все образцы разложил по оставшимся ящикам поровну. Сколько образов пород было в партии, если в каждый ящик было положено не более 19 образцов?

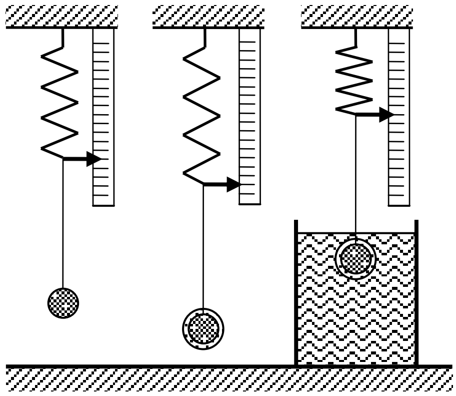
2. Планета имеет форму шара радиусом $R = 5000$ км. Как и Земля, она вращается вокруг своей оси и обладает магнитным полем. Это поле выглядит как поле постоянного полосового магнита, центр которого совпадает с центром планеты. Как и у Земли, положения географического и магнитного полюсов планеты не совпадают.

В точке с долготой θ_1 на экваторе планеты стрелка магнитного компаса направлена по географическому меридиану. Расстояние между географическим и магнитным полюсами планеты вдоль ее поверхности равно L = 1300 км. Найдите угол α между направлением стрелки магнитного компаса и географическим меридианом в точке экватора с долготой $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$.

3. Одним из разделов современной геологии является геофизика – наука, занимающаяся исследованием геологической среды путем изучения различных физических полей Земли, многие из которых имеют волновую природу (например, электромагнитные или сейсмические поля) и описываются суммами синусов и или косинусов аргумента *nwt,* где n – положительное целое, *w*-угловая частота, t – время. Каждое такое слагаемое имеет вид, например, $sin(nwt+\varphi_n)$ и называется *n* –ой гармоникой. Сложный волновой геофизический сигнал при расчетах часто описывается двумя первыми гармониками. На эту тему предлагается следующая задача.

При проведении геофизических исследований было зарегистрировано волновое поле, представляющее собой результат наложения двух различных гармонических сигналов. Зависимость амплитуды первого сигнала от времени t имеет вид $2\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$, а второго сигнала $2\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$. Для каких моментов времени на интервале (-7,-4) величины амплитуд сигналов совпадут?

4. Для определения плотности пористой горной породы в геологической практике часто используют метод, состоящий из трех последовательных взвешиваний. Сначала берут образец исследуемой породы и взвешивают его в воздухе. Затем образец парафинируют, т.е. целиком опускают в расплавленный парафин и вынимают, чтобы весь образец покрылся слоем застывшего парафина. После этого парафинированный образец взвешивают в воздухе. И, наконец, третье измерение – взвешивание парафинированного образца в воде (см. рисунок).



Какова плотность породы, если результаты последовательных взвешиваний на пружинном динамометре оказались равными соответственно P_1 = 1,2 Н, P_2 = 1,5 Н, P_3 = 0,6 Н? При расчете плотностью воздуха пренебречь, плотность воды принять равной ρ_0 = 1000 кг/м^3, плотность парафина $\rho_п$ = 910 кг/м^3.

5. Неравномерность просадки грунтов под инженерно-техническими сооружениями – одна из актуальных проблем инженерной геологии, которая изучает структуру, динамику верхних горизонтов земной коры при ее взаимодействии с основаниями сооружений разного профиля. Преодоление неравномерной просадки грунтов является стандартной задачей не только для специалистов в области инженерной геологии, такие проблемы часто возникают в нефтяной геологии, строительстве спортивных сооружений. Просадочные грунты, вследствие собственного веса или веса фундамента сооружения, способны давать при замачивании дополнительные осадки, которые в инженерной геологии называются просадками. Любое строительство важного объекта должно быть предварено тщательным изучением просадочных свойств грунтов. Если объект достаточно крупный, то просадочные свойства грунтов под ним могут сильно отличаться в пределах занимаемой площади. В таком случае для корректного определения параметров фундамента сооружения необходимо применять сложные математические модели. Приведенная ниже задача иллюстрирует такую ситуацию. Данные по значениям просадок с целью экономии вычислений являются модельными.
Фундамент под резервуар изначально имел основание в виде прямоугольника ABCD со сторонами AB=25м, AD=20м, при этом плоскость ABCD совпадала с горизонтальной. В результате просадки вершина B стала ниже на 2 м, вершина D - на 1м, а вершина A сохранила начальный уровень. Чему равна величина угла, образовавшегося между горизонтальной плоскостью и плоскостью основания фундамента?

6. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, вследствие окислительно-восстановительных реакций их вещества с окружающим водным раствором часто возникают электрические заряды. Это приводит к возникновению в пространстве аномального электрического поля. Обнаружение этих аномалий на поверхности Земли позволяет установить места залегания самих рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом R = 20 см находится система двух одинаковых по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов, создающих электростатическое поле. Линии одинакового потенциала этого поля на поверхности глобуса совпадают с его параллелями, при этом потенциал точек на параллели с северной широтой α = 30° равен нулю. Найти расстояние от положительного заряда до центра глобуса, если потенциал поля на северном полюсе глобуса равен φ_1 = –28 мВ, а потенциал поля на южном полюсе глобуса равен φ_2 = +3 мВ. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрическое поле зарядов. Потенциал зарядов на значительном удалении от глобуса считать равным нулю.

ГЕОЛОГИЯ

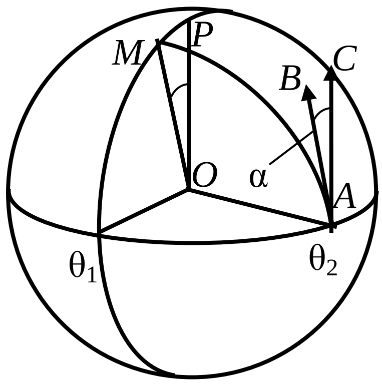
Вариант 2

<u>Решения и ответы</u>

1. Обозначим искомое число образцов через k, а число ящиков через n, тогда по условию задачи $\begin{cases} k = 13n + 3, \\ \frac{k}{n-2} \in N. \end{cases}$ Отсюда $\frac{13n+3}{n-2} = 13 + \frac{29}{n-2} \in N$. Поскольку n-2 является делителем 29, то отсюда заключаем, что $n \in \{3{,}31\}$. Таким образом, число ящиков может быть равно 3 или 29. В случае $n=3$ значение $k=13\cdot 3+3=42$, и в один оставшийся ящик кладутся все 42 образца, что не соответствует условию задачи. В случае $n=31$ значение $k=13\cdot 31+3=406$, и в каждый ящик кладется 14 образцов.

Ответ: 406 образцов

2. На рисунке изображены магнитный (M) и географический (P) полюса планеты, по условию задачи, лежащие на одном географическом меридиане с долготой θ_1, а также угол α между направлением стрелки компаса (изображено вектором AB) и касательной AC к меридиану с долготой $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$ в точке наблюдения A.



Угол MOP равен α по признаку равенства углов с взаимно параллельными сторонами: $OM \parallel AB$, $OP \parallel AC$. Действительно, во-первых, эти прямые попарно лежат в одной плоскости: OM и AB – в плоскости MOA магнитного меридиана, OP и AC – в плоскости POA географического меридиана. Во-вторых, все четыре прямых OM, OP, AB и AC перпендикулярны отрезку OA.

Поэтому угол между направлением стрелки магнитного компаса и географическим меридианом в точке экватора с долготой $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$ равен $\alpha = \dfrac{L}{2\pi R} \cdot 360^\circ \approx 15^\circ$.

Ответ: 15^0.

3. Условие задачи приводит к уравнению

$$2\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Для решения последнего запишем его в виде

$$2\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff$$

$$\iff 4\sin\frac{\pi}{6}\cos t + 2\sin\frac{\pi}{4}\cos 2t = 0 \iff 2\cos t + \sqrt{2}\cos 2t = 0.$$

Из равенства $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ получаем

$$2\sqrt{2}\cos^2 t + 2\cos t - \sqrt{2} = 0 \iff \cos t = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{4}.$$

В силу ограниченности косинуса случай $\cos t = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}$ не подходит. Следовательно, $\cos t = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}$. Это значение как нетрудно видеть лежит на интервале $(0, \frac{1}{2})$. При этом $7 < \frac{7\pi}{3}$, значит значение $t = -2\pi + \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}\right)$ входит в нужный интервал, а $-2\pi + \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}\right)$ нет.

Ответ: при $t = -2\pi + \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}\right)$

4. Пренебрегаем влиянием выталкивающей силы со стороны воздуха на образец при проведении первых двух взвешиваний и учитываем, что силы натяжения нити, действующие на образец при каждом из взвешиваний, составляют соответственно P_1, P_2, P_3. Тогда получим:

$P_1 = mg$,

$P_2 = (m + M)g$,

$P_3 = (m + M)g - \rho_0 g(V + M/\rho_п)$,

где m и V – соответственно масса и объем исходного образца, M – масса налипшего парафина.

Отсюда следует, что

$m = P_1/g$,

$M = (P_2 - P_1)/g$,

$P_2 - P_3 = \rho_0 g(V + M/\rho_п)$.

Из последнего уравнения, подставив в него выражение для M, получаем:

$$V = \frac{P_2 - P_3}{\rho_0 g} - \frac{P_2 - P_1}{\rho_п g}$$

и, следовательно,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P_1}{g\left(\dfrac{P_2 - P_3}{\rho_0 g} - \dfrac{P_2 - P_1}{\rho_п g}\right)} = \frac{P_1}{\dfrac{P_2 - P_3}{\rho_0} - \dfrac{P_2 - P_1}{\rho_п}} = \frac{\rho_0 \rho_п P_1}{\rho_п (P_2 - P_3) - \rho_0 (P_2 - P_1)}.$$

При $P_1 = 1{,}2$ Н, $P_2 = 1{,}5$ Н, $P_3 = 0{,}6$ Н, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $\rho_п = 910$ кг/м^3 имеем $\rho \approx 2100$ кг/м^3.
Ответ: 2100 кг/м^3.

5. Рассмотрим горизонтальную плоскость проходящую через точку A. Обозначим через B_1 и D_1 проекции точек B и D соответственно на эту плоскость. Тогда BB_1 =2 и DD_1=1. По теореме Пифагора $AB_1=\sqrt{621}$, $AD_1=\sqrt{399}$, $B_1D_1=\sqrt{1024}$. По теореме косинусов в треугольнике AB_1D_1:
399=621+1024-2$\sqrt{621}\sqrt{1024}\cos\measuredangle AB1D1$, отсюда $\cos\measuredangle AB1D1 = \frac{1246}{2\sqrt{621}\sqrt{1024}} = \frac{623}{32\sqrt{621}}$.

Далее, пусть E – точка пересечения горизонтальной плоскости и прямой BD. Из теоремы Фалеса EB_1=2 B_1D_1=64. По теореме косинусов в треугольнике AB_1E:

AE^2=621+4096-$\frac{623}{32\sqrt{621}}\sqrt{621}\cdot 4\cdot 64 = 2225$. Пусть длина высоты B_1P треугольника AEB_1 равна h. Тогда из равенства $AE\cdot h = EB_1\cdot AB_1 \sin\measuredangle AB1E$ найдем h:

$$h=\frac{64\sqrt{621}\sqrt{1-\frac{623^2}{1024\cdot 621}}}{5\sqrt{89}}=\frac{2\sqrt{9911}}{\sqrt{89}}.$$

откуда тангенс искомого угла B_1PB равен 2/h=$\sqrt{\frac{89}{9911}}$.

Ответ: arctg($\sqrt{\frac{89}{9911}}$).

6. Из картины линий равного потенциала на поверхности глобуса следует, что точечные заряды под его поверхностью находятся на диаметре, соединяющем северный и южный полюсы глобуса, причем отрицательный заряд $-q$ находится к северному полюсу ближе, чем положительный заряд q. Легко проверить, что точки плоскости, перпендикулярной к отрезку, соединяющему два заряда, и проходящей через его середину, имеют потенциал равный нулю. По условию задачи эта плоскость пересекает поверхность глобуса по параллели на широте $\alpha = 30^\circ$ в северном полушарии. Отсюда следует, что расстояние от середины отрезка, соединяющего заряды, до центра O глобуса равно $R\sin\alpha$. Обозначим расстояние между точечными зарядами через $2a$, тогда выражения для потенциалов поля точечных зарядов на северном полюсе и на южном полюсе глобуса могут быть записаны в виде:

$$\varphi_1 = \frac{-kq}{x_1 - a} + \frac{kq}{x_1 + a} = -\frac{2kqa}{x_1^2 - a^2},$$

$$\varphi_2 = \frac{-kq}{x_2 + a} + \frac{kq}{x_2 - a} = \frac{2kqa}{x_2^2 - a^2},$$

где $x_1 = R(1 - \sin\alpha)$ и $x_2 = R(1 + \sin\alpha)$ – расстояния от середины отрезка, соединяющего два заряда, соответственно до северного и южного полюсов глобуса. Разделив первое из этих уравнений на второе и исключив тем самым неизвестную величину q, получим:

$$\frac{x_2^2 - a^2}{x_1^2 - a^2} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2},$$

откуда, с учетом выражений для x_1 и x_2,

$$a^2 = \frac{\varphi_1 x_1^2 + \varphi_2 x_2^2}{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{R^2}{\varphi_1 + \varphi_2}\left[\varphi_1(1 - \sin\alpha)^2 + \varphi_2(1 + \sin\alpha)^2\right] = R^2\left(1 + 2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}\sin\alpha + \sin^2\alpha\right).$$

Искомое расстояние от положительного точечного заряда до центра глобуса составляет

$$l = R\sin\alpha - a = R\left(\sin\alpha - \sqrt{1 + 2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}\sin\alpha + \sin^2\alpha}\right) = 8 \text{ см}.$$

Ответ: 8 см.

Ответы на задания заключительного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по геологии 2013 г.

Вариант 1

№ задания	Ответ	Выставляемые баллы				
		+	+.	$\pm$	$\mp$	-
1	221 образец	15	12-13	7-8	5	0
2	10^0	15	12-13	7-8	5	0
3	$t = 2\pi - \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}+2}{2}\right)$	15	12-13	7-8	5	0
4	2500 кг/м^3	15	12-13	7-8	5	0
5	$\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{13}{1237}}\right)$	20	14-16	9-11	5	0
6	10 см	20	14-16	9-11	5	0

Вариант 2

№ задания	Ответ	Выставляемые баллы				
		+	+.	$\pm$	$\mp$	-
1	406 образцов	15	12-13	7-8	5	0
2	15^0	15	12-13	7-8	5	0
3	$t = -2\pi + \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}\right)$	15	12-13	7-8	5	0
4	2100 кг/м^3	15	12-13	7-8	5	0
5	$\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{89}{9911}}\right).$	20	14-16	9-11	5	0
6	8 см	20	14-16	9-11	5	0

2012/2013 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[1]

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ»

по ГЕОЛОГИИ

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **90** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **60** баллов до **89** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **80** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **70** баллов до **79** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **60** баллов до **69** баллов включительно.*

[1] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по геологии.*