Олимпиада школьников «Ломоносов» 2013/2014 учебного года по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Заочный этап 1

10-11 класс

В каждой из шести задач требуется дать только ответ. Решение присылать не нужно. Ответом на каждую задачу является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления. При вычислениях (в случае необходимости) считать:

ускорение свободного падения равно 10 м/с^2

абсолютный ноль температур равен $-273°$C .

::1.1:: Воскресным днем, экспериментируя с новым секундомером, Гаврила выяснил, что пока настенные часы бьют три раза, проходит 7 секунд (между возникновением звука от первого удара и затуханием звука от последнего). Через некоторое время, когда часы отбивали шесть ударов, процесс боя занял 16 секунд. Сколько секунд пройдет, пока часы будут бить двенадцать раз?

Ответ: 34

Решение. Обозначим t_1 — длительность звукового сигнала, t_2 — длительность промежутка времени между звуковыми сигналами. Тогда условия задачи сводятся к двум уравнениям $3t_1 + 2t_2 = 7$, $6t_1 + 5t_2 = 16$. Откуда находим $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Теперь легко получить ответ на заданный вопрос $12t_1 + 11t_2 = 34$.

::1.2:: Воскресным днем, экспериментируя с новым секундомером, Гаврила выяснил, что пока настенные часы бьют три раза, проходит 8 секунд (между возникновением звука от первого удара и затуханием звука от последнего). Через некоторое время, когда часы отбивали шесть ударов, процесс боя занял 17 секунд. Сколько секунд пройдет, пока часы будут бить двенадцать раз?

Ответ: 35

::1.3:: Воскресным днем, экспериментируя с новым секундомером, Гаврила выяснил, что пока настенные часы бьют три раза, проходит 11 секунд (между возникновением звука от первого удара и затуханием звука от последнего). Через некоторое время, когда часы отбивали шесть ударов, процесс боя занял 23 секунд. Сколько секунд пройдет, пока часы будут бить двенадцать раз?

Ответ: 47

::1.4:: Воскресным днем, экспериментируя с новым секундомером, Гаврила выяснил, что пока настенные часы бьют три раза, проходит 13 секунд (между возникновением звука от первого удара и затуханием звука от последнего). Через некоторое время, когда часы отбивали шесть ударов, процесс боя занял 28 секунд. Сколько секунд пройдет, пока часы будут бить двенадцать раз?

Ответ: 58

::2.1:: Товарный поезд движется со скоростью 60 км/час, а пассажирский — в a раз быстрее. Гаврила выяснил, что при движении навстречу друг другу один поезд проходит мимо другого за время, в $\frac{21a}{4}$ раз меньшее, чем при обгоне. Найдите скорость пассажирского поезда (в км/час).

Ответ: 80

Решение. Обозначим скорость товарного поезда через V, пассажирского — через aV, длины составов соответственно через L и l. Решим задачу в системе координат, связанной с товарным поездом. Тогда скорость пассажирского поезда равна $V(a+1)$ при движении поездов навстречу друг другу или V(a-1) — при обгоне. Соответственно время движения при встрече равно $\dfrac{L+l}{V(a+1)}$; при обгоне — $\dfrac{L+l}{V(a-1)}$. По условию $\dfrac{L+l}{V(a+1)} \cdot \dfrac{21a}{4} = \dfrac{L+l}{V(a-1)}$, отсюда $21a(a-1) = 4(a+1)$, $21a^2 - 25a - 4 = 0$, $a = \frac{4}{3}$. Значит, скорость пассажирского поезда равна 80 км/час.

::2.2:: Товарный поезд движется со скоростью 80 км/час, а пассажирский — в a раз быстрее. Гаврила выяснил, что при движении навстречу друг другу один поезд проходит мимо другого за время, в $\frac{10a}{3}$ раз меньшее, чем при обгоне. Найдите скорость пассажирского поезда (в км/час).

Ответ: 120

::2.3:: Скорый поезд движется со скоростью 140 км/час, а пассажирский — в a раз медленнее. Гаврила выяснил, что при движении навстречу друг другу один поезд проходит мимо другого за время, в $\frac{21a}{4}$ раз меньшее, чем при обгоне. Найдите скорость пассажирского поезда (в км/час).

Ответ: 105

::2.4:: Скорый поезд движется со скоростью 135 км/час, а пассажирский — в a раз медленнее. Гаврила выяснил, что при движении навстречу друг другу один поезд проходит мимо другого за время, в $\frac{10a}{3}$ раз меньшее, чем при обгоне. Найдите скорость пассажирского поезда (в км/час).

Ответ: 90

::3.1:: Сплошной однородный прямоугольный параллелепипед высотой 50 см, выполненный из материала плотностью 2 г/см^3, стоит основанием 20 см $\times$ 30 см на горизонтальной поверхности стола . В центре боковой грани 50 см $\times$ 30 см приложена сила, перпендикулярная грани. Какой максимальной может быть величина силы (в ньютонах) для того, чтобы параллелепипед оставался неподвижным, если коэффициент трения между параллелепипедом и столом равен $0,45$?

Ответ: 240

Решение. Параллелепипед может начать двигаться по двум причинам: или скользить по поверхности стола (при этом сила трения F_1 достигнет величины силы трения скольжения), или кувыркаться вокруг ребра основания (если момент приложенной силы F_2 превысит момент силы тяжести). Проведем расчеты. Масса параллелепипеда равна $m = \rho abc = 60$ кг. Сила трения скольжения определяется формулой $F_1 = \mu mg = 270$ Н. Равенство моментов данной силы и силы тяжести $F_2 \cdot (a/2) = mg \cdot (b/2)$ приводит к значению силы $F_2 = mg \cdot (b/a) = 240$ Н. Результаты вычислений показывают, что данный параллелепипед начнет кувыркаться, еще до того, как трение достигнет величины трения скольжения.

::3.2:: Сплошной однородный прямоугольный параллелепипед высотой 40 см, выполненный из материала плотностью 2 г/см^3, стоит основанием 15 см $\times$ 20 см на горизонтальной поверхности стола. В центре боковой грани 40 см $\times$ 20 см приложена сила, перпендикулярная грани. Какой максимальной может быть величина силы (в ньютонах) для того, чтобы параллелепипед оставался неподвижным, если коэффициент трения между параллелепипедом и столом равен $0,40$?

Ответ: 90

::3.3:: Сплошной однородный прямоугольный параллелепипед высотой 60 см, выполненный из материала плотностью 2 г/см^3, стоит основанием 25 см $\times$ 30 см на горизонтальной поверхности стола. В центре боковой грани 60 см $\times$ 30 см приложена сила, перпендикулярная грани. Какой максимальной может быть величина силы (в ньютонах) для того, чтобы параллелепипед оставался неподвижным, если коэффициент трения между параллелепипедом и столом равен $0,43$?

Ответ: 375

::3.4:: Сплошной однородный прямоугольный параллелепипед высотой 30 см, выполненный из материала плотностью 2 г/см^3, стоит основанием 10 см $\times$ 20 см на горизонтальной поверхности стола. В центре боковой грани 30 см $\times$ 20 см приложена сила, перпендикулярная грани. Какой максимальной может быть величина силы (в ньютонах) для того, чтобы параллелепипед оставался неподвижным, если коэффициент трения между параллелепипедом и столом равен $0,41$?

Ответ: 40

::4.1:: Материальная точка массой 110 г движется по плоскости по закону $\begin{cases} x(t) = 2t - t^2, \\ y(t) = 1 - 4t. \end{cases}$ Здесь координаты x, y — измеряются в метрах, время t — в секундах. Найдите величину изменения импульса этой материальной точки (в единицах СИ) за третью секунду движения.

Ответ: 0,22

Решение. Вычислим координаты вектора ускорения

$$\overline{a}(a_x; a_y) = \overline{a}(\ddot{x}; \ddot{y}) = \overline{a}(-2; 0).$$

Полученный результат говорит о том, что движение — равноускоренное, величина ускорения равна 2 м/с^2. Из второго закона Ньютона следует, что движение происходит под действие силы равной $F = ma = 0,22$ Н. Из другой формы записи второго закона Ньютона $F = \Delta p/\Delta t$ (в импульсной форме) следует ответ в задаче $\Delta p = F\Delta t = 0,22$ Н·с (в нашем случае $\Delta t = 1$ с).

Координаты вектора ускорения можно найти и без производной. Сравним данный закон движения с общей формой записи закона равноускоренного движения. Коэффициент при квадрате времени — это половина проекции ускорения на соответствующую ось. Отсюда следует, что $\overline{a}(-2; 0)$.

::4.2:: Материальная точка массой 150 г движется по плоскости по закону $\begin{cases} x(t) = t - 2t^2, \\ y(t) = 1 + 3t. \end{cases}$ Здесь координаты x, y — измеряются в метрах, время t — в секундах. Найдите величину изменения импульса этой материальной точки (в единицах СИ) за третью секунду движения.

Ответ: 0,60

::4.3:: Материальная точка массой 120 г движется по плоскости по закону $\begin{cases} x(t) = 2t - 5t^2, \\ y(t) = 1 - 3t. \end{cases}$ Здесь координаты x, y — измеряются в метрах, время t — в секундах. Найдите величину изменения импульса этой материальной точки (в единицах СИ) за третью секунду движения.

Ответ: 1,20

::4.4:: Материальная точка массой 160 г движется по плоскости по закону $\begin{cases} x(t) = 3t - 3t^2, \\ y(t) = 1 - 4t. \end{cases}$ Здесь координаты x, y — измеряются в метрах, время t — в секундах. Найдите величину изменения импульса этой материальной точки (в единицах СИ) за третью секунду движения.

Ответ: 0,96

::5.1:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_2 = 51°C$, $t_1 = 16°C$. Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Укажите среднюю арифметическую температуру (в градусах Цельсия) по всем восьми вершинам четырехугольников.

Ответ: 33,25

Решение. Во-первых, заметим, что для того чтобы в осях VT каждый участок замкнутого цикла был прямолинейным (одной из сторон четырехугольника) необходимо, чтобы этот участок цикла в осях PV был бы вида $P = const$ или $V = const$. Предположим противное, пусть в осях PV на участке замкнутого цикла наблюдается линейная зависимость давления от объема $P = \alpha V$. Подставим эту зависимость в закон Менделеева-Клапейрона $\alpha V^2 = \nu RT$. Отсюда следует, что зависимость объема от температуры оказывается нелинейной и в осях VT процесс не может быть представлен четырехугольником.

Во-вторых, в силу наличия на диаграмме PV двух участков, на которых выполняется условие $V = const$, на диаграмме VT возможна только одна диагональ четырехугольника, соответствующая условию задачи, — диагональ, на которой выполняется условие $T = const$. В итоге получаем, что в осях PV имеется прямоугольник $ABCD$ со сторонами параллельными осям две вершины которого лежат на одной изотерме. Пусть в вершине A температура минимальна и равна $T_1 = 273 + t_1$, а в вершине С — максимальна $T_2 = 273 + t_2$. Тогда вершины B и D лежат на одной изотерме с неизвестной температурой T.

Запишем закон Менделеева-Клапейрона для каждой вершины прямоугольника:

$$(A) : P_1V_1 = \nu RT_1,\ (B) : P_2V_1 = \nu RT,\ (C) : P_2V_2 = \nu RT_2,\ (D) : P_1V_2 = \nu RT$$

Перемножим 1-е и 3-е уравнения, затем 2- е и 4-е:

$$P_1P_2V_1V_2 = (\nu R)^2T_2T_1,\ P_1P_2V_1V_2 = (\nu R)^2T^2$$

Сравнение последних уравнений приводит к выводу $T^2 = T_1T_2$. Отсюда

$$T = \sqrt{T_1T_2} = \sqrt{289 \cdot 324} = 17 \cdot 18 = 306K$$

.

Таким образом, температура в вершинах B и D в градусах Цельсия будет равна $33°C$. Окончательно, средняя температура будет равна

$$\frac{16 + 51 + 33 + 33}{4} = 33,25$$

::5.2:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_2 = 88°C$, $t_1 = 16°C$.

Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Укажите среднюю арифметическую температуру (в градусах Цельсия) по всем восьми вершинам четырехугольников.

Ответ: 51

::5.3:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_1 = 16°C$, $t_2 = -17°C$. Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Укажите среднюю арифметическую температуру (в градусах Цельсия) по всем восьми вершинам четырехугольников.

Ответ: -0,75

::5.4:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_2 = 88°C$, $t_1 = 51°C$. Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Укажите среднюю арифметическую температуру (в градусах Цельсия) по всем восьми вершинам четырехугольников.

Ответ: 69,25

::5.5:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_1 = 51°C$, $t_2 = -17°C$. Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Укажите среднюю арифметическую температуру (в градусах Цельсия) по всем восьми вершинам четырехугольников.

Ответ: 16

::5.6:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_1 = 88°C$, $t_2 = -17°C$. Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Укажите среднюю арифметическую температуру (в градусах Цельсия) по всем восьми вершинам четырехугольников.

Ответ: 33,25

::6.1:: Тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, которая меняется со временем по закону $\omega(t) = \omega_0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и $\omega(t) = \omega_0 \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^2$ при $t \geqslant \tau$, где t — время в секундах, $\omega_0 = 10\pi$ с$^{-1}$ — начальная угловая скорость, $\tau = 1$ с — коэффициент. Оцените: сколько полных оборотов успеет совершить тело за одну минуту?

Ответ: 9

Решение. Количество полных оборотов можно определить по формуле

$$N = \left[\frac{\phi}{2\pi}\right],$$

где ϕ — полный угол поворота тела за время $t_0 = 60$ с, $[x]$ — целая часть числа x. Полный угол поворота ϕ определяется интегралом от $\omega(t)$:

$$\phi = \int_{\tau}^{t_0} \omega(t)dt = \omega_0\tau + \omega_0 \int_{\tau}^{t_0} \left(\frac{\tau}{t}\right)^2 dt = 2\omega_0\tau - \frac{\omega_0\tau^2}{t_0}$$

Подставляя числовые данные, получим ответ.

Ответ можно получить и без интегрирования. Площадь под кривой зависимости угловой скорости от времени можно примерно подсчитать, заменив кривую кусочно линейной функцией с шагом, например, τ. Площадь считается как сумма площадей трапеций. Сумма бесконечна, но на пятом члене суммы становится понятно, что остальные члены не могут повлиять на определения целого числа оборотов тела.

::6.2:: Тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, которая меняется со временем по закону $\omega(t) = \omega_0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и $\omega(t) = \omega_0 \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^2$ при $t \geqslant \tau$, где t — время в секундах, $\omega_0 = 16\pi$ с$^{-1}$ — начальная угловая скорость, $\tau = 2$ с — коэффициент. Оцените: сколько полных оборотов успеет совершить тело за одну минуту?

Ответ: 31

::6.3:: Тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, которая меняется со временем по закону $\omega(t) = \omega_0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и $\omega(t) = \omega_0 \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^2$ при $t \geqslant \tau$, где t — время в секундах, $\omega_0 = 12\pi$ с$^{-1}$ — начальная угловая скорость, $\tau = 3$ с — коэффициент. Оцените: сколько полных оборотов успеет совершить тело за одну минуту?

Ответ: 35

::6.4:: Тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, которая меняется со временем по закону $\omega(t) = \omega_0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и $\omega(t) = \omega_0 \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^2$ при $t \geqslant \tau$, где t — время в секундах, $\omega_0 = 11\pi$ с$^{-1}$ — начальная угловая скорость, $\tau = 4$ с — коэффициент. Оцените: сколько полных оборотов успеет совершить тело за одну минуту?

Ответ: 42

::6.5:: Тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, которая меняется со временем по закону $\omega(t) = \omega_0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и $\omega(t) = \omega_0 \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^2$ при $t \geqslant \tau$, где t — время в секундах, $\omega_0 = 9\pi$ с$^{-1}$ — начальная угловая скорость, $\tau = 5$ с — коэффициент. Оцените: сколько полных оборотов успеет совершить тело за одну минуту?

Ответ: 43

Олимпиада школьников «Ломоносов» 2013/2014 учебного года по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Заочный этап Тур 2

10 – 11 класс

В каждой из шести задач требуется дать только ответ. Решение присылать не нужно. Ответ на каждую задачу должен быть представлен в виде целого числа или десятичной дроби округленной до двух десятичных знаков. В качестве разделителя целой части числа и мантиссы используется точка (например 1.31).При вычислениях (в случае необходимости) считать:ускорение свободного падения равно 10 м/с^2
абсолютный ноль температур равен -273^{o}C .

::1.1:: Из туристического речного трамвайчика, движущегося против течения, выпал и поплыл чемодан туриста. Через 1 минуту после этого команда выслала быстроходный катер. Во сколько раз скорость катера больше скорости трамвайчика, если с момента выхода катера до его возвращения с потерянным чемоданом прошло 4 минуты?

{=1,5}

Решение: Рассмотрим движение всех тел в системе координат, связанной с водой. Пусть скорость речного трамвайчика равна V. Тогда скорость катера – k*V, где k – искомая величина. В момент старта катера расстояние до чемодана равно $V*t_1$ (t_1=1). Из условия задачи следует, что выполняется равенство $2*V*t_1+V*t_2=k*V*t_2$ (t_2=4). Отсюда k=1,5.

::1.2:: Из теплохода, движущегося по течению реки, выпал и поплыл чемодан туриста. Через 3 минуты после этого команда выслала быстроходный катер. Во сколько раз скорость катера больше скорости теплохода, если с момента выхода катера до его возвращения с потерянным чемоданом прошло 24 минуты?

{=1,25}

::1.3:: Из туристического речного трамвайчика, движущегося по течению, выпал и поплыл чемодан туриста. Через 2 минуты после этого команда выслала быстроходный катер. Во сколько раз скорость катера больше скорости трамвайчика, если с момента выхода катера до его возвращения с потерянным чемоданом прошло 8 минут?

{=1,5}

::1.4:: Из теплохода, движущегося против течения реки, выпал и поплыл чемодан туриста. Через 2 минуты после этого команда выслала быстроходный катер. Во сколько раз скорость катера больше скорости теплохода, если с момента выхода катера до его возвращения с потерянным чемоданом прошло 16 минут?

{=1,25}

::2.1:: Лестница длиной 5 м стоит вертикально, вплотную прижатая к стене. Нижний ее конец начинают отодвигать от стены с постоянной скоростью 1 м/с. С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец лестницы через 3 секунды после начала движения?

{=0,75}

Решение: Скорость есть производная от $\sqrt{25-t^2}$, которая равна $\frac{t}{\sqrt{25-t^2}}$.

::2.2:: Лестница длиной 5 м стоит вертикально, вплотную прижатая к стене. Нижний ее конец начинают отодвигать от стены с постоянной скоростью 3 м/с. С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец лестницы через 1 секунду после начала движения?

{=2,25}

::2.3:: Лестница длиной 5 м стоит вертикально, вплотную прижатая к стене. Нижний ее конец начинают отодвигать от стены с постоянной скоростью 6 м/с. С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец лестницы через 0,5 секунды после начала движения?

{=4,5}

::2.4:: Шест длиной 13 м стоит вертикально, вплотную прижатый к стене. Нижний его конец начинают отодвигать от стены с постоянной скоростью 6 м/с. С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец шеста через 2 секунды после начала движения?

{=14,4}

::2.5:: Шест длиной 13 м стоит вертикально, вплотную прижатый к стене. Нижний его конец начинают отодвигать от стены с постоянной скоростью 4 м/с. С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец шеста через 3 секунды после начала движения?

{=9,6}

::2.6:: Шест длиной 13 м стоит вертикально, вплотную прижатый к стене. Нижний его конец начинают отодвигать от стены с постоянной скоростью 3 м/с. С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец шеста через 4 секунды после начала движения?

{=7,2}

::3.1:: Шестьдесят деревьев расположены на прямой линии на расстоянии 5 м друг от друга. На этой же прямой на расстоянии 20 м от первого дерева и 15 м от второго дерева находится колонка с водой. Садовник приносит ведро воды для каждого дерева, поливает его и возвращается обратно к колонке. С полным ведром садовник идёт со скоростью 4 км/час, а с пустым – со скоростью 6 км/час. Время набирания ведра воды из колонки – 2 минуты, время полива одного дерева – 0,5 минуты. Сколько времени займет у садовника полив всех деревьев: от начала набирания первого ведра воды до момента возврата к колонке после полива последнего дерева? Ответ дать в минутах, округлив его до ближайшего целого числа минут (по правилам округления).

{=344}

Решение: На набор воды и поливку 60 деревьев уйдет $\left(2+0,5\right)\cdot 60=150$ минут. Из условия делаем вывод о том, что колонка расположена у 5-го дерева. Сумма расстояний от колонки до всех деревьев от первого до 60-го равна: $20+15+10+5+0+5+10+15+...+5\cdot 55$ $=50+5+5\cdot 2+5\cdot 3+...+5\cdot 55=50+\dfrac{5+5\cdot 55}{2}\cdot 55=7750$ м. Поэтому в пути садовник проведет время, равное $\dfrac{7750}{\frac{6000}{60}}+\dfrac{7750}{\frac{4000}{60}}=\dfrac{7750\cdot 60}{1000}\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{775\cdot 6\cdot 5}{10\cdot 12}=\dfrac{775}{4}=193,75$ мин, а общее время равно $193,75+150=343,75$ мин.

::3.2:: Пятьдесят деревьев расположены на прямой линии на расстоянии 5 м друг от друга. На этой же прямой на расстоянии 15 м от первого дерева и 10 м от второго дерева находится колонка с водой. Садовник приносит ведро воды для каждого дерева, поливает его и возвращается обратно к колонке. С полным ведром садовник идёт со скоростью 4 км/час, а с пустым – со скоростью 8 км/час. Время набирания ведра воды из колонки – 3 минуты, время полива одного дерева – 1 минута. Сколько времени займет у садовника полив всех деревьев: от начала набирания первого ведра воды до момента возврата к колонке после полива последнего дерева? Ответ дать в минутах, округлив его до ближайшего целого числа минут (по правилам округления).

{=322}

::3.3:: Пятьдесят деревьев расположены на прямой линии на расстоянии 5 м друг от друга. На этой же прямой на расстоянии 20 м от первого дерева и 15 м от второго дерева находится колонка с водой. Садовник приносит ведро воды для каждого дерева, поливает его и возвращается обратно к колонке. С полным ведром садовник идёт со скоростью 5 км/час, а с пустым – со скоростью 8 км/час. Время набирания ведра воды из колонки – 2 минуты, время полива одного дерева – 1 минута. Сколько времени займет у садовника полив всех деревьев: от начала набирания первого ведра воды до момента возврата к колонке после полива последнего дерева? Ответ дать в минутах, округлив его до ближайшего целого числа минут (по правилам округления).

{=252}

::3.4:: Шестьдесят деревьев расположены на прямой линии на расстоянии 5 м друг от друга. На этой же прямой на расстоянии 15 м от первого дерева и 10 м от второго дерева находится колонка с водой. Садовник приносит ведро воды для каждого дерева, поливает его и возвращается обратно к колонке. С полным ведром садовник идёт со скоростью 5 км/час, а с пустым – со скоростью 8 км/час. Время набирания ведра воды из колонки – 1,5 минуты, время полива одного дерева – 0,5 минуты. Сколько времени займет у садовника полив всех деревьев: от начала набирания первого ведра воды до момента возврата к колонке после полива последнего дерева? Ответ дать в минутах, округлив его до ближайшего целого числа минут (по правилам округления).

{=276}

::4.1:: Обычно воздушный шар наполняли газом плотности ρ_1. Но однажды наполнили газом вдвое большей плотности ρ_2. При каком отношении ρ_1 к плотности воздуха ρ подъемная сила воздушного шара изменится вдвое при замене газа плотности ρ_1 на газ плотности ρ_2. Весом оболочки шара пренебречь. Температуру и давление газов считать постоянными.
{= 0.33}

Решение. Подъемная сила воздушного шара равна разности выталкивающей архимедовой силы и веса газа в оболочке. Если заменить газ на более тяжелый, то подъемная сила уменьшится. Отсюда и из условий задачи вытекает следующая процедура ее решения:

$$\frac{\rho V-\rho_1 V}{\rho V-\rho_2 V}=2 \Rightarrow \frac{\rho-\rho_1}{\rho-\rho_2}=2 \Rightarrow \frac{\rho-\rho_1}{\rho-2\rho_1}=2 \Rightarrow \rho-\rho_1=2(\rho-2\rho_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho=3\rho_1 \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho}=\frac{1}{3}$$

::4.2:: Обычно воздушный шар наполняли газом плотности ρ_1. Но однажды наполнили газом втрое большей плотности ρ_2. При каком отношении ρ_1 к плотности воздуха ρ подъемная сила воздушного шара изменится вдвое при замене газа плотности ρ_1на газ плотности ρ_2. Весом оболочки шара пренебречь. Температуру и давление газов считать постоянными.
{= 0.2}

::4.3:: Обычно воздушный шар наполняли газом плотности ρ_1. Но однажды наполнили газом вдвое большей плотности ρ_2. При каком отношении ρ_1к плотности воздуха ρ подъемная сила воздушного шара изменится втрое при замене газа плотности ρ_1 на газ плотности ρ_2. Весом оболочки шара пренебречь. Температуру и давление газов считать постоянными.

$\{= 0.4\}$

::4.4:: Обычно воздушный шар наполняли газом плотности ρ_1. Но однажды наполнили газом втрое большей плотности ρ_2. При каком отношении ρ_1 к плотности воздуха ρ подъемная сила воздушного шара изменится втрое при замене газа плотности ρ_1 на газ плотности ρ_2. Весом оболочки шара пренебречь. Температуру и давление газов считать постоянными.

$\{= 0.25\}$

::5.1:: Два шарика одинакового радиуса без начальной скорости были сброшены с одной и той же высоты над поверхностью Земли. За время, требуемое каждому из них, чтобы достичь поверхности с той же начальной высоты при отсутствии атмосферы, первый пролетел половину, а второй - четверть этой высоты. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго, считая силу сопротивления движению постоянной величиной.

{=1.5}

Решение: Из второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} a_1 = g - \frac{F}{m_1} \\ a_2 = g - \frac{F}{m_2} \end{cases} \qquad a_1 = \frac{1}{2}\, g = \, 2a_2 \;\Rightarrow\; m_1 = \frac{3}{2}\, m_2$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

::5.2:: Два шарика одинакового радиуса без начальной скорости были сброшены с одной и той же высоты над поверхностью Земли. За время, требуемое каждому из них, чтобы достичь поверхности с той же начальной высоты при отсутствии атмосферы, первый пролетел третью часть, а второй - четверть этой высоты. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго, считая силу сопротивления движению постоянной величиной.

{= 1,13}

::5.3:: Два шарика одинакового радиуса без начальной скорости были сброшены с одной и той же высоты над поверхностью Земли. За время, требуемое каждому из них, чтобы достичь поверхности с той же начальной высоты при отсутствии атмосферы, первый пролетел половину, а второй - треть этой высоты. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго, считая силу сопротивления движению постоянной величиной.

{= 1,33}

::5.4:: Два шарика одинакового радиуса без начальной скорости были сброшены с одной и той же высоты над поверхностью Земли. За время, требуемое каждому из них, чтобы достичь поверхности с той же начальной высоты при отсутствии атмосферы, первый пролетел половину, а второй - пятую часть этой высоты. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго, считая силу сопротивления движению постоянной величиной.

{= 1,6}

::5.5:: Два шарика одинакового радиуса без начальной скорости были сброшены с одной и той же высоты над поверхностью Земли. За время, требуемое каждому из них, чтобы достичь поверхности с той же начальной высоты при отсутствии атмосферы, первый пролетел третью часть, а второй - пятую часть этой высоты. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго, считая силу сопротивления движению постоянной величиной.

{= 1,2}

::6.1:: В некотором термодинамическом процессе давление и объем заданной порции газа изменяются со временем по закону :

$$\begin{cases} \dfrac{P}{P_1} = 8\,t^2 - 10t + 5, \\ \dfrac{V}{V_1} = 2t + 1. \end{cases}$$

где t - время в секундах, $P_1\ V_1$ - известные параметры процесса. Какой минимальной величины достигает температура этой порции газа в течение первой секунды данного процесса, если начальная температура равна $T_0 = 400K$?

{ =320}

Решение. Температура пропорциональна произведению давления на объем $PV = RT$. Тогда будем иметь

$$\frac{P}{P_1}\frac{V}{V_1} = \frac{T}{T_1} = (8\,t^2 - 10t + 5)(2t + 1) = f(t)$$

Вычислим производную функции $f(t)$ и изучим ее точки экстремума и участки возрастания и убывания.

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}\,(16t^3 - 12t^2 + 5) = 48t^2 - 24t = 0$$

Отсюда следует, что минимальное значение отношения $\frac{T_m}{T_1}$ будет достигаться в момент времени $t_0 = 0.5$. При этом $f(t_0) = 4$. Это значит, что минимальная температура равна $T_m = 4T_1$. При $t = 0$ из условия задачи следует, что $\frac{T_0}{T_1} = 5 \Rightarrow T_1 = 80 \Rightarrow T_m = 320.$

Ответ: $T_m = 320.$

::6.2:: В некотором термодинамическом процессе давление и объем заданной порции газа изменяются со временем по закону

$$\begin{cases} \dfrac{P}{P_1} = 2t^2 - 5t + 5, \\ \dfrac{V}{V_1} = \ t + 1. \end{cases}$$

где t - время в секундах, P_1 V_1 - известные параметры процесса. Какой минимальной величины достигает температура этой порции газа в течение первой секунды данного процесса, если начальная температура равна $T_0 = 300K$?

{= 240}

::6.3:: В некотором термодинамическом процессе давление и объем заданной порции газа изменяются со временем по закону

$$\begin{cases} \dfrac{P}{P_1} = 2t^2 - 5t + 5, \\ \dfrac{V}{V_1} = t + 1. \end{cases}$$

где t - время в секундах, P_1 V_1 - известные параметры процесса. Какой минимальной величины достигает температура этой порции газа в течение первой секунды данного процесса, если начальная температура равна $T_0 = 850K$?

{ = 680}

::6.4:: В некотором термодинамическом процессе давление и объем заданной порции газа изменяются со временем по закону

$$\begin{cases} \dfrac{P}{P_1} = 32t^2 - 20t + 5, \\ \dfrac{V}{V_1} = 4t + 1. \end{cases}$$

где t - время в секундах, P_1 V_1 - известные параметры процесса. Какой минимальной величины достигает температура этой порции газа в течение первой секунды данного процесса, если начальная температура равна $T_0 = 750K$?

{ = 600}

Олимпиада школьников «Ломоносов» 2013/2014 учебного года

по механике и математическому моделированию

10 – 11 класс

Заочный этап, тур 3

Задачи и решения.

1.1. Эйфелева башня имеет высоту 324 м и весит 10000 тонн. Сколько килограммов будет весить ее копия, имеющая высоту 1,62 м?

Ответ: 1,25. **Решение.** Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Так как коэффициент подобия равен $\frac{324}{1,62}=200$, то данная копия Эйфелевой башни весит $\frac{10000}{200^3}$ тонн, что равно $\frac{10^7}{8\cdot 10^6}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1,25$ кг.

1.2. Эйфелева башня имеет высоту 324 м и весит 10000 тонн. Сколько килограммов будет весить ее копия, имеющая высоту 129,6 см?

Ответ: 0,64.

1.3. Останкинская башня имеет высоту 540 м и весит 50000 тонн. Сколько килограммов будет весить ее копия, имеющая высоту 2,7 м?

Ответ: 6,25.

1.4. Останкинская башня имеет высоту 540 м и весит 50000 тонн. Сколько килограммов будет весить ее копия, имеющая высоту 216 см?

Ответ: 3,2.

2.1. За то время, в течение которого медленно движущийся товарный поезд преодолел 1200 м, школьник успел проехать на велосипеде вдоль железнодорожных путей из хвоста движущегося поезда в его начало и обратно к хвосту. При этом счетчик пройденного пути велосипеда показал, что велосипедист проехал 1800 м. Найдите длину поезда (в метрах).

Ответ: 500. **Решение:** Обозначим V и U – скорости велосипедиста и поезда соответственно, h – длина поезда.

Тогда условия задачи на языке математики можно записать следующим образом:

$$(V-U)t_1=h;\ \ (V+U)t_2=h;\ \ U(t_1+t_2)=l;\ \ V(t_1+t_2)=L.$$

Здесь t_1, t_2 – время движения велосипедиста по ходу поезда и навстречу соответственно. Возьмем отношение последних двух уравнений. Отсюда следует, что скорость велосипедиста в $a = \frac{L}{l} = 1,5$ раза больше скорости поезда. Из первых двух уравнений выражаем время и подставляем в третье. Тогда для длины поезда получим формулу

$$h = \frac{l(\alpha^2 - 1)}{2\alpha} = 500.$$

2.2. За то время, в течение которого медленно движущийся товарный поезд преодолел 800 м, школьник успел проехать на велосипеде вдоль железнодорожных путей из хвоста движущегося поезда в его начало и обратно к хвосту. При этом счетчик пройденного пути велосипеда показал, что велосипедист проехал 1000 м. Найдите длину поезда (в метрах).

Ответ: 180.

2.3. За то время, в течение которого медленно движущийся товарный поезд преодолел 600 м, школьник успел проехать на велосипеде вдоль железнодорожных путей из хвоста движущегося поезда в его начало и обратно к хвосту. При этом счетчик пройденного пути велосипеда показал, что велосипедист проехал 1500 м. Найдите длину поезда (в метрах).

Ответ: 630.

2.4. За то время, в течение которого медленно движущийся товарный поезд преодолел 1200 м, школьник успел проехать на велосипеде вдоль железнодорожных путей из хвоста движущегося поезда в его начало и обратно к хвосту. При этом счетчик пройденного пути велосипеда показал, что велосипедист проехал 1600 м. Найдите длину поезда (в метрах).

Ответ: 350.

3.1. Пришедшие в гости к Гавриле друзья заняли все находившиеся в комнате трёхногие табуретки и четырёхногие стулья, а самому Гавриле места не хватило. Гаврила посчитал, что ног в комнате оказалось 45, включая «ноги» табуреток и стульев, ноги пришедших гостей (по две у каждого!) и две ноги самого Гаврилы. Сколько людей было в комнате?

Ответ: 9. **Решение.** Если было n табуреток и m стульев, то ног в комнате $3n + 4m + 2\cdot(n+m) + 2$, отсюда получаем $5n + 6m = 43$. Это уравнение в целых числах имеет решение $n = 5 - 6p$, $m = 3 + 5p$. Значения n и m одновременно положительны только при $p = 0$. Значит, было 5 табуреток и 3 стула. Поэтому людей в комнате: 5 + 3 + Гаврила.

3.2. Пришедшие в гости к Гавриле друзья заняли все находившиеся в комнате трёхногие табуретки и четырёхногие стулья, а самому Гавриле места не хватило. Гаврила посчитал, что ног в комнате оказалось 52, включая «ноги» табуреток и стульев, ноги пришедших гостей (по две у каждого!) и две ноги самого Гаврилы. Сколько людей было в комнате?

Ответ: 10.

3.3. Пришедшие в гости к Гавриле друзья заняли все находившиеся в комнате трёхногие табуретки и четырёхногие стулья, а самому Гавриле места не хватило. Гаврила посчитал, что ног в комнате оказалось 40, включая «ноги» табуреток и стульев, ноги пришедших гостей (по две у каждого!) и две ноги самого Гаврилы. Сколько людей было в комнате?

Ответ: 8.

3.4. Пришедшие в гости к Гавриле друзья заняли все находившиеся в комнате трёхногие табуретки и четырёхногие стулья, а самому Гавриле места не хватило. Гаврила посчитал, что ног в комнате оказалось 51, включая «ноги» табуреток и стульев, ноги пришедших гостей (по две у каждого!) и две ноги самого Гаврилы. Сколько людей было в комнате?

Ответ: 10.

4.1. Железнодорожный состав длиной $L = 600$ м, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ и останавливается, когда на горке находится ровно четверть состава. Какова была начальная скорость состава V (в км/час)? В качестве ответа приведите ближайшее к величине найденной скорости целое число. Трение не учитывать, ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/сек^2.

Ответ: 49. **Решение.** Кинетическая энергия поезда $\frac{mV^2}{2}$ будет равна потенциальной энергии той части поезда, которая въехала в горку $\frac{1}{2}\frac{L}{4}\sin\alpha\frac{m}{4}g$.

Тогда получим $V^2 = \frac{L}{4}\frac{1}{8} * (3{,}6)^2 = \frac{6000*(3{,}6)^2}{32} = 9\sqrt{30}$.

Так как верно следующее двойное неравенство $49 < 9\sqrt{30} < 49{,}5$ (проверяется возведением в квадрат), то ответ 49.

4.2. Железнодорожный состав длиной 700 м, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона 30° и останавливается, когда на горке находится ровно четверть состава. Какова была начальная скорость состава (в км/час)? В качестве ответа приведите ближайшее к величине найденной скорости целое число. Трение не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/сек^2.

Ответ: 53.

4.3. Железнодорожный состав длиной 600 м, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона $30°$ и останавливается, когда на горке находится ровно треть состава. Какова была начальная скорость состава (в км/час)? В качестве ответа приведите ближайшее к величине найденной скорости целое число. Трение не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/сек^2.

Ответ: 66.

4.4. Железнодорожный состав длиной 800 м, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона $30°$ и останавливается, когда на горке находится ровно четверть состава. Какова была начальная скорость состава (в км/час)? В качестве ответа приведите ближайшее к величине найденной скорости целое число. Трение не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/сек^2.

Ответ: 57.

5.1. Граната, лежащая на земле, разрывается на множество мелких одинаковых осколков, которые разлетаются в радиусе L = 90 м. Определите промежуток времени (в секундах) между моментами падения на землю самого первого и самого последнего осколка, если такая граната взорвется в воздухе на высоте H = 10 м. Ускорение свободного падения считать равным g = 10 м/сек^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 6. **Решение.** Из закона движения для тела, брошенного с уровня земли под углом к горизонту α, дальность полета определяется соотношением $L = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha$. Поэтому максимальная дальность полета получается при $\alpha = 45^o$ и равна $L = \frac{V_0^2}{g}$. Значит, $V_0 = \sqrt{gL}$.

Первым упадет на землю осколок, вылетающий вертикально вниз, последним – вылетающий вертикально вверх. Спустя время $\tau = \frac{2V_0}{g}$ последний осколок вернется на место взрыва, то есть окажется в ситуации первого осколка. Поэтому искомый промежуток времени равен $\tau = \frac{2V_0}{g}$ (не зависит от высоты H). Значит, $\tau = \frac{2\sqrt{gL}}{g} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$ = 6 сек.

5.2. Граната взрывается в воздухе на высоте 10 м, разлетевшись на множество мелких одинаковых осколков. Промежуток времени между моментами падения на землю самого первого и самого последнего осколка составил 4 секунды. В каком радиусе (в метрах) осколки упадут на землю, если взорвется такая граната, лежащая на поверхности? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/сек^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 40.

5.3. Граната, лежащая на земле, разрывается на множество мелких одинаковых осколков, которые разлетаются в радиусе 40 м. Определите промежуток времени (в секундах) между моментами падения на землю самого первого и самого последнего осколка, если такая граната взорвется в воздухе на высоте 10 м. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/сек^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 4.

5.4. Граната взрывается в воздухе на высоте 10 м, разлетевшись на множество мелких одинаковых осколков. Промежуток времени между моментами падения на землю самого первого и самого последнего осколка составил 6 секунд. В каком радиусе (в метрах) осколки упадут на землю, если взорвется такая граната, лежащая на поверхности? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/сек^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 90.

6.1. В вертикальный цилиндрический сосуд с поперечным сечением S = 10 см^2, содержащий один моль одноатомного идеального газа, поступает за одну секунду количество тепла Q = 500 Дж. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса P = 100 Н. С какой скоростью (в метрах в секунду) поднимается вверх этот поршень, если атмосферное давление P_0 = 10^5 Па?

Ответ: 1. **Решение.** В соответствии с первым началом термодинамики можно записать $Q\Delta t = \Delta A + \Delta U$ (2) , где Δt – промежуток времени, ΔA– совершенная газом работа, ΔU– изменение внутренней энергии. Так как процесс изобарный, то для работы и внутренней энергии можно записать следующие соотношения:

$$\Delta A = \left(p_0 + \frac{P}{S}\right)\Delta V, \Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\left(p_0 + \frac{P}{S}\right)\Delta V, \quad (3)$$

где ν – количество вещества. Подставив (3) в (2), получим $Q\Delta t = \frac{5}{2}\left(p_0 + \frac{P}{S}\right)S\Delta h$. Откуда для скорости движения поршня получим $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{Q}{2{,}5(p_0 S + P)}$

6.2. В вертикальный цилиндрический сосуд с поперечным сечением S = 20 см^2, содержащий один моль одноатомного идеального газа, поступает за одну секунду количество тепла Q = 600 Дж. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса P = 200 Н.

С какой скоростью (в метрах в секунду) поднимается вверх этот поршень, если атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па?

Ответ: 0,6.

6.3. В вертикальный цилиндрический сосуд с поперечным сечением S = 10 см^2, содержащий один моль одноатомного идеального газа, поступает за одну секунду количество тепла Q = 500 Дж. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса P = 300 Н.

С какой скоростью (в метрах в секунду) поднимается вверх этот поршень, если атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па?

Ответ: 0,5.

6.4. В вертикальный цилиндрический сосуд с поперечным сечением S = 30 см^2, содержащий один моль одноатомного идеального газа, поступает за одну секунду количество тепла Q = 400 Дж. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса P = 100 Н.

С какой скоростью (в метрах в секунду) поднимается вверх этот поршень, если атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па?

Ответ: 0,4.

Олимпиада школьников «Ломоносов» 2013/2014 учебного года по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ
Заочный этап
7-8 класс

1. Аня и Ваня вместе поливают грядки ровно за два часа. Аня и Таня на эту же работу тратят не менее трех часов, а Ваня и Таня — не более полутора часов. а) Сможет ли Аня полить все грядки за десять часов, если будет работать одна? б) За какое наименьшее возможное время может полить грядки одна Аня?

Ответы: а) нет б) 12

2. Деревянный кубик положили сверху на такой же кубик изо льда и опустили в стакан с водой. При этом часть равная 3/8 от объема деревянного кубика оказалась под водой. Какова плотность дерева, из которого сделан куб, если плотность воды 1000 кг/м^3, плотность льда 900 кг/м^3?.

Ответ: 475

3. Изменится ли (и каким образом) уровень воды в условиях предыдущей задачи, после того как лед растает? Ответ обосновать.

Ответ: нет

4. Как соотносятся плотности двух жидкостей, если смешивание одинаковых масс этих жидкостей приводит к получению новой жидкости с плотностью равной средней геометрической плотности исходных жидкостей? Известно, что суммарный объем этих жидкостей после смешивания не меняется.

Ответ: 1:1

5. Сможете ли вы приподнять пустую пластиковую бутылку 0,33 литра над столом, используя только одну руку и упругую соломинку для питья? Запрещается касаться соломинкой наружной поверхности бутылки и нельзя завязывать на соломинке узел.

Ответ: да

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Заочный этап

9 класс

1. Аня и Ваня вместе поливают грядки ровно за два часа. Аня и Таня на эту же работу тратят не менее трех часов, а Ваня и Таня — не более полутора часов. а) Сможет ли Аня полить все грядки за десять часов, если будет работать одна? б) За какое наименьшее возможное время может полить грядки одна Аня?

Ответы: а) нет б) 12

2. Тело брошено горизонтально с высоты $h = 5$ м со скоростью $V_0 = 10$ м/с. Найти проекцию ускорения на направление по касательной к траектории движения через $t_0 = 1$ с после начала движения.

Ответ: 0.71

3. С какой начальной скоростью надо бросить деревянный шар с высоты H над уровнем воды, чтобы он погрузился на такую же глубину под воду, если плотность дерева в два раза меньше, чем плотность воды? Сопротивлением воздуха и воды пренебречь. Силу Архимеда считать постоянной.

Ответ: 0

4. Можно ли так расположить спутник на прямой, проходящей через центры Земли и Луны, чтобы силы его притяжения к Земле и Луне были одинаковы? Если можно, то найдите расстояние от спутника до Земли. В ответ запишите значение в километрах, округленное до целого числа. Если таких значений несколько, то выберете максимальное из всех возможных. Все необходимые для решения задачи данные найдите в литературе.

Ответ: 346084

5. Первый автомобиль имеет мощность двигателя 100 л. с. и развивает максимальную скорость 180 км/час. Второй автомобиль с мощностью двигателя 80 л. с. на той же дороге развивает максимальную скорость 160 км/час. Какую максимальную скорость разовьют автомобили, если первый возьмет на буксир второй? Силу сопротивления движению считать пропорциональной скорости.

Ответ: 126.88

Олимпиада школьников Ломоносов–2014
по механике и математическому моделированию

Заключительный этап

Вариант 141

1. Приборы показали, что юго-западный ветер дует под углом 60° к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за полтора часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 900 км? Дайте как точный ответ (в км/ч), так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

2. С борта неподвижного аэростата, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами: A, B и C. При этом все три угла, под которыми видны с аэростата три отрезка AB, BC и AC, — прямые. Может ли расстояние между объектами A и B быть равным 24 км, если расстояние между B и C равно 12 км, а расстояние между A и C равно 20 км? Укажите все значения, которые может принимать расстояние между объектами A и B.

3. Хитрый волк, засевший в 20 метрах севернее и в 10 метрах восточнее могучего дуба, в момент времени $t = 0$ заметил зайца в 20 метрах севернее от себя. Волк знает, что заяц движется по закону:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt^2, \end{cases}$$

где начало системы координат — могучий дуб, ось x направлена на восток, ось y — на север, расстояния x, x_0, y, y_0 измеряются в метрах, t — время в секундах, $a = 12$ м/с, $b = 1$ м/с^2. Произведя мгновенный расчет, волк стартовал и побежал строго по прямой с постоянной скоростью 15 м/с без поворотов и остановок. Есть ли у него возможность поймать зайца? Если да, то через какое время это может произойти?

4. Жители дома решили построить во дворе ледяную горку для детей. Склон горки прямолинейный и настолько длинный, что, разогнавшись, санки двигаются по склону с постоянной скоростью, определяемой балансом силы тяжести и силы сопротивления, направленной против вектора скорости. Каким следует выбрать угол наклона склона горки к горизонту, чтобы горизонтальная составляющая скорости санок была наибольшей? Считать, что масса санок 20 кг, ускорение свободного падения равно 10 м/с^2, а сила сопротивления движению пропорциональна второй степени скорости санок.

5. Старшеклассник в школьной лаборатории проводил испытания с небольшой порцией идеального одноатомного газа. Оборудование позволяло совершать только изобарный и изохорный процессы так, что давление и объем могли меняться только в целое число раз. Ему удалось заставить газ совершить замкнутый цикл, КПД которого оказался равен $\frac{8}{33}$. Какое максимальное значение может принимать отношение максимального объема к минимальному в этом цикле.

6. Движение точки вдоль прямой фиксируется фотоаппаратом со стробоскопом, дающим ежесекундно вспышки, первая из которых синхронизирована с началом движения точки. При анализе фотоснимков ввели координату точки $x(t)$, $t \geqslant 0$, $x(0) = 0$ и установили, что за каждый секундный промежуток между вспышками изменение координаты точки прямо пропорционально такому изменению за предыдущий промежуток между вспышками. Кроме того, через n секунд после начала движения (т.е. в момент $n + 1$ вспышки) оказалось, что $x(n) = nx(1)$.

а) При каких натуральных значениях n из приведенных выше условий следует, что за каждый промежуток между вспышками изменение координаты точки одинаково?

б) При каких натуральных n существует движение точки, отличное от описанного в пункте а?

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников Ломоносов–2014
по механике и математическому моделированию

Заключительный этап

Вариант 142

1. Приборы показали, что юго-восточный ветер дует под углом 60° к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за два часа пролететь в южном направлении вдоль меридиана 1200 км? Дайте как точный ответ (в км/ч), так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

2. С борта неподвижного аэростата, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами: A, B и C. При этом все три угла, под которыми видны с аэростата три отрезка AB, BC и AC, — прямые. Может ли расстояние между объектами A и B быть равным 10 км, если расстояние между B и C равно 12 км, а расстояние между A и C равно 16 км? Укажите все значения, которые может принимать расстояние между объектами A и B.

3. Хитрый волк, засевший в 10 метрах севернее и в 30 метрах восточнее могучего дуба, в момент времени $t = 0$ заметил зайца в 20 метрах севернее от себя. Волк знает, что заяц движется по закону:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt^2, \end{cases}$$

где начало системы координат — могучий дуб, ось x направлена на восток, ось y — на север, расстояния x, x_0, y, y_0 измеряются в метрах, t — время в секундах, $a = 9$ м/с, $b = 1$ м/с^2. Произведя мгновенный расчет, волк стартовал и побежал строго по прямой с постоянной скоростью 15 м/с без поворотов и остановок. Есть ли у него возможность поймать зайца? Если да, то через какое время это может произойти?

4. Жители дома решили построить во дворе ледяную горку для детей. Склон горки прямолинейный и настолько длинный, что, разогнавшись, санки двигаются по склону с постоянной скоростью, определяемой балансом силы тяжести и силы сопротивления, направленной против вектора скорости. Каким следует выбрать угол наклона склона горки к горизонту, чтобы горизонтальная составляющая скорости санок была наибольшей? Считать, что масса санок 25 кг, ускорение свободного падения равно 10 м/с^2, а сила сопротивления движению пропорциональна второй степени скорости санок.

5. Старшеклассник в школьной лаборатории проводил испытания с небольшой порцией идеального одноатомного газа. Оборудование позволяло совершать только изобарный и изохорный процессы так, что давление и объем могли меняться только в целое число раз. Ему удалось заставить газ совершить замкнутый цикл, КПД которого оказался равен $\frac{2}{7}$. Какое максимальное значение может принимать отношение максимального давления к минимальному в этом цикле.

6. Движение точки вдоль прямой фиксируется фотоаппаратом со стробоскопом, дающим ежесекундно вспышки, первая из которых синхронизирована с началом движения точки. При анализе фотоснимков ввели координату точки $y(t)$, $t \geqslant 0$, $y(0) = 0$ и установили, что за каждый секундный промежуток между вспышками изменение координаты точки прямо пропорционально такому изменению за предыдущий промежуток между вспышками. Кроме того, через k секунд после начала движения (т.е. в момент $k+1$ вспышки) оказалось, что $y(k) = ky(1)$.

а) При каких натуральных значениях k из приведенных выше условий следует, что за каждый промежуток между вспышками изменение координаты точки одинаково?

б) При каких натуральных k существует движение точки, отличное от описанного в пункте а?

1 марта 2014 года *г. Москва*

Олимпиада школьников Ломоносов–2014
по механике и математическому моделированию
Заключительный этап
Вариант 143

1. Приборы показали, что северо-западный ветер дует под углом 60° к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за два часа пролететь в южном направлении вдоль меридиана 1200 км? Дайте как точный ответ (в км/ч), так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

2. С борта неподвижного аэростата, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами: A, B и C. При этом все три угла, под которыми видны с аэростата три отрезка AB, BC и AC, — прямые. Может ли расстояние между объектами B и C быть равным 18 км, если расстояние между A и B равно 9 км, а расстояние между A и C равно 15 км? Укажите все значения, которые может принимать расстояние между объектами B и C.

3. Хитрый волк, засевший в 30 метрах севернее и в 20 метрах восточнее могучего дуба, в момент времени $t = 0$ заметил зайца в 20 метрах севернее от себя. Волк знает, что заяц движется по закону:
$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt^2, \end{cases}$$
где начало системы координат — могучий дуб, ось x направлена на восток, ось y — на север, расстояния x, x_0, y, y_0 измеряются в метрах, t — время в секундах, $a = 12$ м/с, $b = 1$ м/с^2. Произведя мгновенный расчет, волк стартовал и побежал строго по прямой с постоянной скоростью 15 м/с без поворотов и остановок. Есть ли у него возможность поймать зайца? Если да, то через какое время это может произойти?

4. Жители дома решили построить во дворе ледяную горку для детей. Склон горки прямолинейный и настолько длинный, что, разогнавшись, санки двигаются по склону с постоянной скоростью, определяемой балансом силы тяжести и силы сопротивления, направленной против вектора скорости. Каким следует выбрать угол наклона склона горки к горизонту, чтобы горизонтальная составляющая скорости санок была наибольшей? Считать, что масса санок 15 кг, ускорение свободного падения равно 10 м/с^2, а сила сопротивления движению пропорциональна второй степени скорости санок.

5. Старшеклассник в школьной лаборатории проводил испытания с небольшой порцией идеального одноатомного газа. Оборудование позволяло совершать только изобарный и изохорный процессы так, что давление и объем могли меняться только в целое число раз. Ему удалось заставить газ совершить замкнутый цикл, КПД которого оказался равен $\frac{8}{33}$. Какое максимальное значение может принимать отношение максимального давления к минимальному в этом цикле.

6. Движение точки вдоль прямой фиксируется фотоаппаратом со стробоскопом, дающим ежесекундно вспышки, первая из которых синхронизирована с началом движения точки. При анализе фотоснимков ввели координату точки $x(t)$, $t \geqslant 0$, $x(0) = 0$ и установили, что за каждый секундный промежуток между вспышками изменение координаты точки прямо пропорционально такому изменению за предыдущий промежуток между вспышками. Кроме того, через n секунд после начала движения (т.е. в момент $n + 1$ вспышки) оказалось, что $x(n) = nx(1)$.

а) При каких натуральных значениях n из приведенных выше условий следует, что за каждый промежуток между вспышками изменение координаты точки одинаково?

б) При каких натуральных n существует движение точки, отличное от описанного в пункте а?

1 марта 2014 года *г. Москва*

Олимпиада школьников Ломоносов–2014
по механике и математическому моделированию
Заключительный этап
Вариант 144

1. Приборы показали, что северо-восточный ветер дует под углом 60° к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за полтора часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 900 км? Дайте как точный ответ (в км/ч), так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

2. С борта неподвижного аэростата, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами: A, B и C. При этом все три угла, под которыми видны с аэростата три отрезка AB, BC и AC, — прямые. Может ли расстояние между объектами B и C быть равным 13 км, если расстояние между A и B равно 15 км, а расстояние между A и C равно 20 км? Укажите все значения, которые может принимать расстояние между объектами B и C.

3. Хитрый волк, засевший в 10 метрах севернее и в 20 метрах восточнее могучего дуба, в момент времени $t = 0$ заметил зайца в 20 метрах севернее от себя. Волк знает, что заяц движется по закону:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt^2, \end{cases}$$

где начало системы координат — могучий дуб, ось x направлена на восток, ось y — на север, расстояния x, x_0, y, y_0 измеряются в метрах, t — время в секундах, $a = 9$ м/с, $b = 1$ м/с^2. Произведя мгновенный расчет, волк стартовал и побежал строго по прямой с постоянной скоростью 15 м/с без поворотов и остановок. Есть ли у него возможность поймать зайца? Если да, то через какое время это может произойти?

4. Жители дома решили построить во дворе ледяную горку для детей. Склон горки прямолинейный и настолько длинный, что, разогнавшись, санки двигаются по склону с постоянной скоростью, определяемой балансом силы тяжести и силы сопротивления, направленной против вектора скорости. Каким следует выбрать угол наклона склона горки к горизонту, чтобы горизонтальная составляющая скорости санок была наибольшей? Считать, что масса санок 10 кг, ускорение свободного падения равно 10 м/с^2, а сила сопротивления движению пропорциональна второй степени скорости санок.

5. Старшеклассник в школьной лаборатории проводил испытания с небольшой порцией идеального одноатомного газа. Оборудование позволяло совершать только изобарный и изохорный процессы так, что давление и объем могли меняться только в целое число раз. Ему удалось заставить газ совершить замкнутый цикл, КПД которого оказался равен $\frac{2}{7}$. Какое максимальное значение может принимать отношение максимального объема к минимальному в этом цикле.

6. Движение точки вдоль прямой фиксируется фотоаппаратом со стробоскопом, дающим ежесекундно вспышки, первая из которых синхронизирована с началом движения точки. При анализе фотоснимков ввели координату точки $y(t)$, $t \geqslant 0$, $y(0) = 0$ и установили, что за каждый секундный промежуток между вспышками изменение координаты точки прямо пропорционально такому изменению за предыдущий промежуток между вспышками. Кроме того, через k секунд после начала движения (т.е. в момент $k + 1$ вспышки) оказалось, что $y(k) = ky(1)$.

а) При каких натуральных значениях k из приведенных выше условий следует, что за каждый промежуток между вспышками изменение координаты точки одинаково?

б) При каких натуральных k существует движение точки, отличное от описанного в пункте а?

Олимпиада школьников ‹‹Ломоносов›› 2013/2014 учебного года
по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Заключительный этап

10-11 класс

№1. Приборы показали, что юго-западный ветер дует под углом $60°$ к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за полтора часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 900 км? Дайте как точный ответ, так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

Ответ: $\sqrt{339696} = 12\sqrt{2359} \approx 583$ км/ч.

Решение. Нужная скорость находится по теореме косинусов из треугольника скоростей с известными сторонами 36 км/ч (это 10 м/с) и 600 км/ч (скорость, с которой преодолевается 900 км за 1,5 часа) и углом между ними $60°$. Скорость равна корню из $36^2 + 600^2 - 36 \cdot 600$ $= 339696$, то есть $12\sqrt{2359} = \sqrt{339696}$ км/ч. Для получения ближайшего целого нужно или уметь вычислять корни «в столбик», или, сделав «контрольные» возведения в квадрат, постепенно «подобраться» к ближайшему целому (примерно 5 минут вычислений в столбик). В «чистовике» достаточно написать, что $582,5^2 < 339696$, а $583^2 > 339696$. Приближенное значение (для контроля): 582,83445…

Ответ варианта 142: $\sqrt{382896} = 12\sqrt{2659} \approx 619$ км/ч.

Ответ варианта 143: $\sqrt{339696} = 12\sqrt{2359} \approx 583$ км/ч.

Ответ варианта 144: $\sqrt{382896} = 12\sqrt{2659} \approx 619$ км/ч.

№2. С борта неподвижного аэростата, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами: *A*, *B* и *C*. При этом все три угла, под которыми видны с аэростата три отрезка *AB*, *BC* и *AC*, – прямые. Может ли расстояние между объектами *A* и *B* быть равным 24 км, если расстояние между *B* и *C* равно 12 км, а расстояние между *A* и *C* равно 20 км? Укажите все значения, которые может принимать расстояние между объектами *A* и *B*.

Ответ: а) не может; б) от 16 до $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$ км (не включая эти значения).

Решение. Если обозначить стороны треугольника *ABC* через *x*, *y*, *z*, а расстояния от объектов до дирижабля через *a*, *b*, *c*, то получается: $a^2 + b^2 = x^2$, $b^2 + c^2 = y^2$, $c^2 + a^2 = z^2$. Отсюда

$a^2 = \dfrac{z^2 + x^2 - y^2}{2}$; $b^2 = \dfrac{x^2 + y^2 - z^2}{2}$; $c^2 = \dfrac{y^2 + z^2 - x^2}{2}$. Положительное решение a, b, c найдется

тогда и только тогда, когда $z^2 + x^2 > y^2$, $x^2 + y^2 > z^2$, $y^2 + z^2 > x^2$. Если $x = 12$, $y = 20$, то

$20^2-12^2<z^2<20^2+12^2$, откуда $z\in\left(16;\sqrt{544}\right)$. Так как $24>4\sqrt{34}$, то расстояние AB не может быть равным 24.

Возможно и геометрическое решение. Пусть аэростат находится в центре трехмерной системы координат, а объекты находятся на положительных полуосях *Ox, Oy* и *Oz*. Если провести плоскость через эти три объекта (пересечь трехгранный угол плоскостью), то получится остроугольный треугольник. С другой стороны, для любого остроугольного треугольника такая площадь существует. Поэтому ситуация возможна тогда и только тогда, когда *x, y, z* будут сторонами остроугольного треугольника. Это означает, что $z^2+x^2>y^2$, $x^2+y^2>z^2$, $y^2+z^2>x^2$.

Ответ варианта 142: а) не может; б) от $4\sqrt{7}=\sqrt{112}$ до 20 км (не включая эти значения).

Ответ варианта 143: а) не может; б) от 12 до $\sqrt{306}=3\sqrt{34}$ км (не включая эти значения).

Ответ варианта 144: а) не может; б) от $5\sqrt{7}=\sqrt{175}$ до 25 км (не включая эти значения).

№3. Хитрый волк, засевший в 20 метрах севернее и в 10 метрах восточнее могучего дуба, в момент времени $t=0$ заметил зайца в 20 метрах севернее от себя. Волк знает, что заяц движется по закону: $x=x_0+at$, $y=y_0+bt^2$, где начало системы координат – могучий дуб, ось x направлена на восток, ось y – на север, расстояния x, x_0, y, y_0 измеряются в метрах, t – время в секундах, $a=12$ м/с, $b=1$ м/с^2. Произведя мгновенный расчет, волк стартовал и побежал строго по прямой с постоянной скоростью 15 м/с без поворотов и остановок. Есть ли у него возможность поймать зайца? Если да, то через какое время это может произойти?

Ответ: да; через 4 секунды.

Решение. Заяц движется по закону $x=10+12t$, $y=40+t^2$, а Волк по закону $x=10+15t\cos\alpha$, $y=20+15t\sin\alpha$, где α – угол наклона прямой, по которой движется волк. Условие встречи:
$\begin{cases}10+12t=10+15t\cos\alpha,\\ 40+t^2=20+15t\sin\alpha.\end{cases}$ Из первого уравнения $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, поэтому $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, и из второго уравнения: $t^2-9t+20=0$, откуда $t=4$ или $t=5$. Значение $t=5$ следует отбросить, так как встреча в момент времени $t=4$ произойдет раньше (на этой же прямой!).

Другое решение. Заяц движется по правой ветви параболы с вершиной (10, 40), а ГМТ нахождения волка через время t – окружность с центром (10, 20) и радиусом $15t$:
$(x-10)^2+(y-20)^2=225t^2$. Подставив в уравнение окружности закон движения зайца $x=10+12t$, $y=40+t^2$, получим: $t^4-41t^2+400=0$. Отсюда $t=4$ или $t=5$.

Ответ варианта 142: да; через 2 секунды.

Ответ варианта 143: да; через 4 секунды.

Ответ варианта 144: да; через 2 секунды.

№4. Жители дома решили построить во дворе ледяную горку для детей. Склон горки прямолинейный и настолько длинный, что, разогнавшись, санки двигаются по склону с постоянной скоростью, определяемой балансом силы тяжести и силы сопротивления, направленной против вектора скорости. Каким следует выбрать угол наклона склона горки к горизонту, чтобы горизонтальная составляющая скорости санок была наибольшей? Считать, что сила сопротивления движению пропорциональная второй степени скорости санок.

Ответ: $\alpha = arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение: горизонтальная скорость санок равна $V_x = V\cos\alpha,$ условие баланса сил $mg\sin\alpha = \kappa V^2$. Задача сводится к максимизации функции $f(\alpha) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \cdot \sqrt{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha$. Наибольшее значение достигается при $\alpha = arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ варианта 142: $\alpha = arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ варианта 143: $\alpha = arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ варианта 144: $\alpha = arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

№5. Старшеклассник в школьной лаборатории проводил испытания с небольшой порцией идеального одноатомного газа. Оборудование позволяло совершать только изобарный и изохорный процессы так, что давление и объем могли меняться только в целое число раз. Ему удалось заставить газ совершить замкнутый цикл, КПД которого оказался равен 8/33. Какое максимальное значение может принимать отношение максимального объема к минимальному в этом цикле.

Ответ: 5.
Решение.

$$\eta = \frac{(P_{\max} - P_{\min})(V_{\max} - V_{\min})}{\frac{3}{2}V_{\min}(P_{\max} - P_{\min}) + \frac{5}{2}P_{\max}(V_{\max} - V_{\min})} = \frac{1}{\frac{3}{2}\frac{1}{n-1} + \frac{5}{2}\frac{m}{m-1}}$$

m – отношение максимального давления к минимальному давлению;

n – отношение максимального объема к минимальному давлению.

Получается $\eta = \dfrac{1}{\dfrac{3}{2(n-1)} + \dfrac{5m}{2(m-1)}}$. Упрощаем: $\eta = \dfrac{2(n-1)(m-1)}{3(m-1) + 5m(n-1)} = \dfrac{2(mn - m - n + 1)}{5mn - 2m - 3}$.

Дано $\eta = \dfrac{8}{33}$. Найти $n_{\max}$.

$\dfrac{2(mn-m-n+1)}{5mn-2m-3} = \dfrac{8}{33}$; $33mn-33m-33n+33 = 20mn-8m-12$; $33n+25m = 13mn+45$;

$m = \dfrac{33n-45}{13n-25} = \dfrac{\frac{33}{13}(13n-25)+\frac{33\cdot 25}{13}-45}{13n-25} = \dfrac{33}{13}+\dfrac{33\cdot 25-45\cdot 13}{13(13n-25)}$. Поэтому $13m = 33+\dfrac{240}{13n-25}$, и число $240 = 2^4\cdot 3\cdot 5$ должно делиться на $(13n-25)$. Перебором получаются 2 пары решений: $n=2$, $m=21$ и $n=5$, $m=3$. Поэтому ответ: 5.

Ответ варианта 142: 11

Ответ варианта 143: 21

Ответ варианта 144: 10

№6. Движение точки вдоль прямой фиксируется фотоаппаратом со стробоскопом, дающим ежесекундно вспышки, первая из которых синхронизирована с началом движения точки.

При анализе фотоснимков ввели координату точки x(t), t≥0, x(0)=0 и установили, что за каждый секундный промежуток между вспышками изменение координаты точки прямо пропорционально такому изменению за предыдущий промежуток между вспышками. Кроме того, через n секунд после начала движения (т.е. в момент n+1 вспышки) оказалось, что x(n)=nx(1).

а) При каких натуральных значениях n из приведенных выше условий следует, что за каждый промежуток между вспышками изменение координаты точки одинаково?

б) При каких натуральных n существует движение точки, отличное от описанного в пункте а?

Ответ во всех вариантах:

при чётных n за каждую секунду проходятся одинаковые расстояния; при нечётных – возможно другое движение.

Решение. По условию $x(n) = q\cdot x(n-1)$, где q – коэффициент пропорциональности, $x(i)$ – изменение координаты. Следовательно, $x(i)$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q. Дополнительное условие $S(n) = n\cdot x(1)$.

Ясно, что если $q=1$, то $x(n) = x(1)$ и $S(n) = n\cdot x(1)$. Поэтому $q=1$ удовлетворяет условию. Значит, вопрос задачи формулируется следующим образом: при каких n уравнение $S_n = \dfrac{(q^n-1)}{q-1} = nx_1$ имеет решение $q\neq 1$?

1. Рассмотрим чётные n, т. е. $n=2m$. Получаем уравнение $q^{2m}=2m(q-1)+1$. Построив графики функций $y=q^{2m}$ и $y=2m(q-1)+1$, убеждаемся, что при $q=1$ есть решение. Кроме того, вторая функция совпадает с касательной к графику первой, проведенной в точке $q=1$. Поэтому решений $q\neq 1$ нет.

2. Пусть $n=2m+1$. $n=2m$. Построив соответствующие графики, устанавливаем, что кроме касания при $q=1$, имеется ещё ровно одно пересечение при $q<0$.

Ответ: при чётных n за каждую секунду проходятся одинаковые расстояния; при нечётных – возможно другое движение.

Олимпиада школьников ‹‹Ломоносов›› 2013/2014 учебного года по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Заключительный этап

9 класс

№1 Приборы показали, что юго-западный ветер дует под углом 60° к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за полтора часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 900 км? Дайте как точный ответ, так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

Ответ: $36\sqrt{151} \approx 442$ км/ч.

Решение. Нужная скорость находится по теореме косинусов из треугольника скоростей с известными сторонами 36 км/ч (это 10 м/с) и 600 км/ч (это 900 км за 1,5 часа) и углом между ними 60°. Квадрат скорости получается равным $36 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 151 = 195\,696$, то есть скорость равна $36\sqrt{151} = \sqrt{195696}$ км/ч. Для получения ближайшего целого нужно или уметь вычислять корни «в столбик», или, сделав «контрольные» возведения в квадрат, постепенно «подобраться» к ближайшему целому (примерно 5 минут вычислений в столбик). Приближенное значение (для контроля): 442,3754…

№2 Маленький брусок, начиная соскальзывать по наклонной плоскости с углом наклона $\beta = 30^\circ$ к горизонту, через два метра пути приобретает скорость 2 м/с. Какую скорость приобретет брусок на той же дистанции, если эту же наклонную плоскость расположить под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту?

Ответ: ≈5 м/с.

Решение. Из условия задачи можно найти, с каким ускорением тело движется в первой ситуации: $a_1 = \frac{V^2}{2S} = 1$ м/с. Тогда из второго закона ньютона $g\sin\beta - \mu g\cos\beta = a_1$ определяется коэффициент трения. Теперь из второго закона ньютона во второй ситуации $g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = a_2$. И теперь из кинематической связи ускорения и скорости находим скорость $U = \sqrt{2a_2S}$.

№3 Пешеход Петя, велосипедист Вася и мотоциклист Миша движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. Когда Петя и Вася находились в одной точке шоссе, Миша отставал от них на 8 км. Когда Миша догнал Петю, Вася был впереди на 6 км. На сколько километров Петя будет отставать от Миши, когда Миша догонит Васю?

Ответ: 24.

Решение. Рассмотрим движение в системе координат, связанной с пешеходом Петей. Миша проехал 8 км, а Вася за это же время – 6 км. Значит когда Вася проедет еще 18 км, Миша его догонит. И это произойдет на расстоянии 24 км от Пети.

№4 Два одинаковых призматических сосуда с квадратными основаниями со стороной $4a$ и высотой 10а наполовину заполнены водой плотности ρ_0. В каждый из сосудов положили по одному кубику. В первый сосуд положили пластиковый кубик плотности $\rho_1 = \rho_0/4$ со стороной 2а. Во второй --- деревянный $\rho_1 = \rho_0/2$ со стороной а. На сколько процентов изменение уровня в первом сосуде больше изменения уровня воды во втором сосуде?

Ответ: 300%.

Решение. Уровень поднимется в первом сосуде на высоту а/8, во втором сосуде - на а/32.
То есть ответ 300%

№ 5 В условиях предыдущей задачи сосуды с кубиками соединили тонкой трубкой. Какое количество воды при этом перетекло из одного сосуда в другой?

Ответ: 3/4 a^3.

Решение. Разность уровней 3а/32. При соединении сосудов получится среднее арифметическое. Из одного сосуда перетечет слой воды 3а/64. Таким образом, перетечет объем 3а/64 Х 16a^2 = 3/4 a^3. Но надо проверять, не окажется ли один из кубиков на дне. В этом случае уровни не выровнялись бы.

Олимпиада школьников ‹‹Ломоносов›› 2013/2014 учебного года по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Заключительный этап

7-8 класс

№ 1 Пловец на дистанции 100 метров брассом проплыл первые 25 метров за некоторое время. На каждые следующие 25 метров он тратил на 10% времени больше, чем на предыдущие. В итоге его средняя скорость на дистанции оказалась равна 1 м/с. За сколько секунд он проплыл первую четверть дистанции? Ответ округлите до сотых по правилам округления.

Ответ: 21,55 с.

Решение. Если первую четверть дистанции спортсмен проплыл за t секунд, то на всю дистанцию он потратит время $t\left(1+\frac{11}{10}+\left(\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{11}{10}\right)^3\right)=t\frac{1-\left(\frac{11}{10}\right)^4}{1-\frac{11}{10}}$

$=t\frac{11^4-10^4}{10^3}=t\frac{21\cdot 221}{10^3}$. Тогда $V_{ср.}=\frac{10^5}{21\cdot 221\cdot t}$, и $t=\frac{10^5}{21\cdot 221\cdot V_{ср.}}=21,54708...$ с.

№ 2 Приборы показали, что юго-западный ветер дует под углом $60°$ к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за полтора часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 900 км? Дайте как точный ответ, так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

Ответ: $36\sqrt{151}\approx$ 442 км/ч.

Решение. Нужная скорость находится по теореме косинусов из треугольника скоростей с известными сторонами 36 км/ч (это 10 м/с) и 600 км/ч (это 900 км за 1,5 часа) и углом между ними $60°$. Квадрат скорости получается равным $36\cdot 4\cdot 9\cdot 151=195\,696$, то есть скорость равна $36\sqrt{151}=\sqrt{195696}$ км/ч. Для получения ближайшего целого нужно или уметь вычислять корни «в столбик», или, сделав «контрольные» возведения в квадрат, постепенно «подобраться» к ближайшему целому (примерно 5 минут вычислений в столбик). Приближенное значение (для контроля): 442,3754…

№3 Пешеход Петя, велосипедист Вася и мотоциклист Миша движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. Когда Петя и Вася находились в одной точке шоссе, Миша отставал от них на 8 км. Когда Миша догнал Петю, Вася был впереди на 6 км. На сколько километров Петя будет отставать от Миши, когда Миша догонит Васю?

Ответ: 24.

Решение. Рассмотрим движение в системе координат, связанной с пешеходом Петей. Миша проехал 8 км, а Вася за это же время – 6 км. Значит когда Вася проедет еще 18 км, Миша его догонит. И это произойдет на расстоянии 24 км от Пети.

№4 Два одинаковых призматических сосуда с квадратными основаниями со стороной $4a$ и высотой 10а наполовину заполнены водой плотности ρ_0. В каждый из сосудов положили по одному кубику. В первый сосуд положили пластиковый кубик плотности $\rho_1 = \rho_0/4$ со стороной 2а. Во второй --- деревянный $\rho_1 = \rho_0/2$ со стороной а. На сколько процентов изменение уровня в первом сосуде больше изменения уровня воды во втором сосуде?

Ответ: 300%.

Решение. Уровень поднимется в первом сосуде на высоту а/8, во втором сосуде - на а/32. То есть ответ 300%

№5 В условиях предыдущей задачи сосуды с кубиками соединили тонкой трубкой. Какое количество воды при этом перетекло из одного сосуда в другой?

Ответ: 3/4 a^3.

Решение. Разность уровней 3а/32. При соединении сосудов получится среднее арифметическое. Из одного сосуда перетечет слой воды 3а/64. Таким образом, перетечет объем 3а/64 Х 16a^2 = 3/4 a^3. Но надо проверять, не окажется ли один из кубиков на дне. В этом случае уровни не выровнялись бы.

Критерии оценок
олимпиады школьников "Ломоносов" по механике математическому моделированию
в 2014 году

Заочный этап.

1) На заочном этапе участникам 7,8 и 9 классов предстояло решить 5 задач. Каждая задача была оценена максимум в 20 баллов.
2) На заочном этапе участникам 10 и 11 классов предстояло решить 6 задач. Задачи под номерами 1-4 были оценены максимум в 15 баллов, а задачи под номерами 5 и 6 - по 20 баллов.

Заключительный этап.

1) На заключительном очном этапе участникам 7,8 и 9 классов предстояло решить 5 задач. Каждая задача была оценена максимум в 20 баллов.
2) На заключительном очном этапе участникам 10 и 11 классов предстояло решить 6 задач. Задачи под номерами 1-4 были оценены максимум в 15 баллов, а задачи под номерами 5 и 6 - по 20 баллов.

2013/2014 учебный год
КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[1]

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ»
по МЕХАНИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ для 5-9 классов

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **91** балла включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **60** баллов до **90** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **85** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **75** баллов до **84** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **60** баллов до **74** баллов включительно.*

---

[1] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по механике и математическому моделированию.*

2013/2014 учебный год
КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[2]

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ»
по МЕХАНИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ для 10-11 классов

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **91** балла включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **60** баллов до **90** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **85** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **75** баллов до **84** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **60** баллов до **74** баллов включительно.*

---

[2] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по механике и математическому моделированию.*

ЛОМОНОСОВ – 2013. МЕХАНИКА

Краткие решения и критерии оценки задач заочного тура

1. Камень подброшен вертикально вверх с начальной скоростью V. Пренебрегая силой сопротивления воздуха и полагая ускорение свободного падения равным 10 м/с^2, определите, при каких значениях V все моменты достижения высоты 10 м будут лежать между: А) первой и второй секундами после начала движения; Б) второй и четвертой секундами после начала движения.

Решение. Зависимость высоты от времени есть $h(t) = Vt - \frac{gt^2}{2}$. Поэтому на высоте 10 м камень будет в моменты времени $10 = Vt - 5t^2$. Получается уравнение $5t^2 - Vt + 10 = 0$, которое при $V^2 \geqslant 200$ (т. е. при $V \geqslant 10\sqrt{2}$) имеет корни: $t_{1,2} = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 200}}{10}$.

$$\text{А) } 1 < \frac{V - \sqrt{V^2 - 200}}{10} \leqslant \frac{V + \sqrt{V^2 - 200}}{10} < 2 \;\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{V^2 - 200} < V - 10 \\ \sqrt{V^2 - 200} < 20 - V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\sqrt{2} \leqslant V \leqslant 20 \\ V^2 - 200 < (V - 10)^2 \\ V^2 - 200 < (20 - V)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10\sqrt{2} \leqslant V \leqslant 20 \\ V < 15 \end{cases} \Leftrightarrow V \in \left[10\sqrt{2}; 15\right).$$

Б) По теореме Виета произведение корней квадратного уравнения $5t^2 - Vt + 10 = 0$ равно $\frac{10}{5} = 2$. Поэтому условия $t_1 > 2$ и $t_2 > 2$ одновременно выполняться не могут.

Ответ: *А)* $V \in \left[10\sqrt{2}; 15\right)$ *м/с; Б)* $V \in \varnothing$.

Критерии: 20 баллов – верное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ (включение в ответ значения V = 15м/с на оценку не влияет); **15 баллов** – какие-либо существенные недочеты (при правильных ответах); **10 баллов** – верное решение одной из частей: либо А, либо Б; **5 баллов** – выписана верная система иррациональных неравенств, но допущены ошибки при ее решении; **0 баллов** – все остальное.

2. Глобус имеет диаметр 20 см. Определите примерную площадь, которую занимает на этом глобусе территория России. Все недостающие для решения задачи данные найдите в справочниках.

Решение. Из справочника находим $S_{\text{России}} = 17098246$ кв. км $= 17{,}1 \cdot 10^{12}$ кв. м, $R_{\text{Земли}} = 6371$ км $= 637 \cdot 10^4$ м. Коэффициент подобия: $k = \frac{R_{\text{глоб.}}}{R_{\text{Земли}}} = \frac{10^{-1}}{637 \cdot 10^4} = \frac{10^{-5}}{637}$. Значит, $\frac{x}{S_{\text{России}}} = k^2$;

$x = k^2 \cdot S_{\text{России}} = \left(\frac{10^{-5}}{637}\right)^2 \cdot 17{,}1 \cdot 10^{12}$ кв. м $= 4{,}21 \cdot 10^{-3}$ кв. м = 42 кв. см.

Ответ: 42 кв. см.

Критерии: 20 баллов – верное (не обязательно такое, как выше) решение + правильный ответ; **10 баллов** – идейно верное решение, но ответ отличается заметно (на 5 кв. см. или больше) из-за грубых ошибок округления или вычисления; **5 баллов** – идейно верное решение (площади относятся как квадрат коэффициента подобия), но ответ отличается в 2 раза или больше; **0 баллов** – все остальное.

3. В дачном поселке, где летом отдыхает Гаврила, есть водопровод с холодной водой. Родители мальчика установили водонагреватель, который имеет фиксированную мощность, если только температура находящейся в нем воды ниже 100 °C. После входа водопроводной трубы в дом установили тройник, так что часть воды идет через нагреватель в горячий кран, а остальная вода - напрямую в холодный. Перед выходом горячая и холодная вода смешиваются. Гаврила полностью открыл холодный кран и узнал, что температура воды 20 °C, когда он закрыл холодный кран и открыл горячий - пошла вода с тем же расходом с температурой 40 °C. Тогда Гаврила открыл оба крана одинаково так, что расход остался прежним. Какова температура воды в этом случае?

Решение. В обоих случаях при одинаковом расходе за одно и то же время проходит одинаковое количество воды, при этом ей передается одинаковое количество теплоты. Следовательно, температура на выходе та же: $t_3 = t_2 = 40°\text{C}$.

Ответ: $40°\text{C}$.

Критерии: 20 баллов – верное решение, возможно через уравнение теплового баланса; **10 баллов** – показано, что при уменьшении расхода через нагреватель температура горячей воды увеличивается, но итоговая температура найдена неверно; **0 баллов** – все остальное.

4. В десятилитровое ведро до краев насыпали смородину. Гаврила сразу же сказал, что в ведре 10 кг смородины. Глафира подумала и оценила вес ягод в ведре более точно. Как это сделать, если плотность ягоды смородины можно приблизительно считать равной плотности воды?

Решение. При оценочных расчетах можно считать размеры ягод одинаковыми и много меньшими размера ведра. Если насыпать ягоды одним слоем, то при наиболее плотной упаковке у каждой ягоды будет 6 соседей: центры ягод будут в вершинах правильных треугольников со сторонами, равными диаметру ягод. При насыпании следующего слоя ягоды будут располагаться в углублениях между ягодами предыдущего слоя. При такой упаковке у каждой ягоды будет 12 соседей, а центры ягод будут находиться в вершинах правильных тетраэдров.

Для вычисления доли объема, приходящейся на ягоды, можно мысленно «вырезать» из решетки, образованной центрами ягод, параллелепипед с ребрами длиной $2NR$, где R – радиус ягоды, N – число ягод, укладывающихся вдоль стороны, причем в двух противоположных вершинах ребра сходятся под углами $60°$ между собой. Объем такого параллелепипеда $4\sqrt{2}N^3R^3$ и в него помещается около N^3 ягод объемом $\frac{4}{3}\pi R^3$ каждая (около стенок ягоды помещаются не полностью, но их число порядка N^2, так что при больших N этим обстоятельством можно пренебречь). Поэтому отношение объема ягод к объему ведра приблизительно равно $\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,74$, так что в 10-литровом ведре при максимально плотной упаковке примерно 7,4 кг ягод. В реальности их несколько меньше из-за неплотности.

Отношение объема ягод к объему емкости можно считать и иначе. Например, рассматривать прямоугольный параллелепипед, в котором ягоды уложены слоями, расстояние между которыми равно высоте указанного выше тетраэдра $\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$. В каждом слое расстояние между рядами равно высоте правильного треугольника $R\sqrt{3}$. Тем самым N^3 ягод займут параллелепипед длиной $2RN$, шириной $\sqrt{3}RN$ и высотой $\frac{2\sqrt{2}RN}{\sqrt{3}}$. Отношение объемов равно $\frac{N^3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{2RN \cdot \sqrt{3}RN \cdot \frac{2\sqrt{2}RN}{\sqrt{3}}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: около 7 кг.

Критерии: 20 баллов – верное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ (от 7 до 7,4 кг); **15 баллов** – в целом идейно верное решение, имеющее погрешности, не повлиявшие на ответ; **10 баллов** – идейно верное решение, имеющее серьезные погрешности; так же оцениваются решения, в которых коэффициент плотности $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ (или 74%) используется без доказательства; **5 баллов** – учтено уплотнение в слое, но не учтено уплотнение между слоями; **0 баллов** – все остальное.

5. Две гантели, состоящие из невесомых стержней длины $2L$ и одинаковых небольших шариков, скользят с одинаковыми скоростями V навстречу друг другу как показано на рисунке. Опишите движение гантелей после соударения шаров в двух случаях: А) удар абсолютно упругий; Б) удар абсолютно неупругий.

Решение. При ударе любых двух шаров скорость остальных не изменяется, так как удар происходит мгновенно. При абсолютно упругом ударе двух одинаковых шаров они обмениваются скоростями. Следовательно, каждая гантель начнет вращаться вокруг своего центра с угловой скоростью $\frac{V}{L}$. Спустя полпериода шары, которые не участвовали в первом ударе, окажутся в месте первоначального удара (радиусами шаров пренебрегаем). После второго абсолютно упругого удара гантели разойдутся, сохранив поступательный характер движения и скорость.

В случае абсолютно неупругого удара соприкасающиеся шары слипнутся и станут неподвижными. Система начнет вращаться вокруг этой точки с угловой скоростью $\frac{V}{2L}$.

Ответ: А) разойдутся, сохранив исходные скорости;

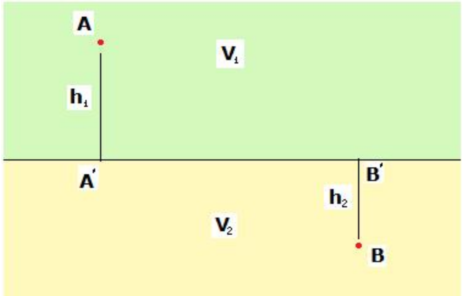
Б) начнут вращаться с угловой скоростью $\frac{V}{2L}$.

Критерии: 20 баллов – верное обоснованное решение (возможно, не такое, как выше); **15 баллов** – решение с недостаточным обоснованием; **10 баллов** – в целом верное решение, но не указаны количественные характеристики; либо в абсолютно упругом ударе не учтен второй удар; **5 баллов** – верное решение одного из пунктов; либо решение, в котором учтены основные эффекты, но делаются какие-либо ошибки; **0 баллов** – все остальное.

6. *Попытайтесь максимально продвинуться в аналитическом решении приведенной ниже задачи. В случае необходимости на завершающем этапе может быть использован компьютер.*

Пункт A расположен на лугу, пункт B – на песчаной пустоши. Расстояние между пунктами равно 24 км. Границей раздела пустоши и луга является прямая линия. Расстояние от пункта A до границы равно 8 км, расстояние от пункта B до границы равно 4 км. Найдите минимальное время, за которое пешеход попадет из пункта A в пункт B, если его максимальная скорость по пустоши равна 3 км/час, а по лугу – 6 км/час.

Решение. Наша задача: найти такую точку C на $A'B'$ (см. рисунок), чтобы путь по траектории $AC + CB$ занимал минимально возможное время. Расстояние $A'B'$ равно $12\sqrt{3}$, пусть $A'C = x$, где $x \in \left[0; 12\sqrt{3}\right]$ (на самом деле очевидно, что $x \in \left[8\sqrt{3}; 12\sqrt{3}\right]$).



Тогда время передвижения t равно

$\dfrac{AC}{V_1} + \dfrac{CB}{V_2} = \dfrac{\sqrt{x^2+64}}{6} + \dfrac{\sqrt{\left(12\sqrt{3}-x\right)^2+16}}{3}$. Таким образом, нужно найти минимум функции

$$f(x) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{x^2+64} + 2\sqrt{\left(12\sqrt{3}-x\right)^2+16}\right). \qquad (1)$$

Первый поход связан с использованием производной. Производная

$$f'(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+64}} - \frac{2\left(12\sqrt{3}-x\right)}{\sqrt{\left(12\sqrt{3}-x\right)^2+16}}\right) \text{ равна нулю при } \frac{x}{\sqrt{x^2+64}} = \frac{2\left(12\sqrt{3}-x\right)}{\sqrt{\left(12\sqrt{3}-x\right)^2+16}}. \qquad (2)$$

Необходимо найти корни этого уравнения.

Второй подход основан на использовании аналогии с распространением света. Соотношение $\dfrac{V_1}{\sin\alpha} = \dfrac{V_2}{\sin\beta}$ в наших обозначениях запишется как $\dfrac{6\sqrt{x^2+64}}{x} = \dfrac{3\sqrt{\left(12\sqrt{3}-x\right)^2+16}}{12\sqrt{3}-x}$, что эквивалентно (2).

Уравнение (2) приводится к виду $x^2\left(\left(12\sqrt{3}-x\right)^2+16\right) = 4\left(12\sqrt{3}-x\right)^2\left(x^2+64\right)$

$$\Leftrightarrow x^4 - 24\sqrt{3}x^3 + 512x^2 - 2048\sqrt{3}x + 36864 = 0. \qquad (3)$$

Это алгебраическое уравнение аналитически не решается. И именно в этом месте следует воспользоваться компьютером. Получаются приближенные корни $x_1 = 18,7138$ и $x_2 = 22,9267$ (не подходит, т. к. это значение больше $12\sqrt{3}$). Это численное решение (достаточная точность $x = 18,7$) участники олимпиады могут получить с использованием калькулятора или любых компьютерных программ: как пакетных (Excel, Mathematica, WolframAlpha и т.п.), так и написанных самостоятельно. Подробное описание процесса получения не требуется.

Подстановка $x = 18,7138$ в (1) дает значение времени $t = 4,89$ час. (или 4 час. 53 мин. 24 сек).

Ответ: 4,89 час (допустимо 4,9 час.) или 4 час 53 мин (4 час 54 мин.).

Критерии: 20 баллов – верное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов** – верное в основном решение, но ответ отличается от правильного более чем на 30 секунд; **10 баллов** – верный ответ, но компьютер привлекается на ранней стадии решения (например, с помощью него ищется минимум функции (1) или нули функции (2)) – тем самым нарушается требование условия: «попытайтесь максимально продвинуться в аналитическом решении задачи»; **5 баллов** – верный подход к решению, но ответ либо отсутствует, либо неверный; **0 баллов** – все остальное.

Внимание! ***Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.***

ЛОМОНОСОВ – 2013. МЕХАНИКА

9 класс

Краткие решения и критерии оценки задач заочного тура

1. Обычно школьник Гаврила за минуту поднимается по движущемуся вверх эскалатору, стоя на его ступеньке. Но если Гаврила опаздывает, он бежит вверх по работающему эскалатору и экономит таким образом 36 секунд. Сегодня у эскалатора столпилось много народа, и Гаврила решил пробежать по соседнему неработающему эскалатору. Сколько времени займет у него такой подъем, если он при беге по эскалатору всегда прикладывает одно и то же усилие?

Решение. Примем длину эскалатора за единицу. Пусть V – скорость движения эскалатора, а U – скорость движения Гаврилы относительно него. Тогда условие задачи можно записать так:

$$\begin{cases} 1 = V \cdot 60 \\ 1 = (V+U)\cdot(60-36) \end{cases}$$

Искомое время определяется из соотношения $1 = U \cdot t$. Из системы получаем $V = \frac{1}{60}$; $U + V = \frac{1}{24}$;

$U = \frac{1}{24} - \frac{1}{60} = \frac{1}{40}$. Поэтому $t = 40$ секунд.

Ответ: 40 секунд.

Критерии: 20 баллов – полное и правильное решение, **15 баллов –** верный ход решения, однако допущена арифметическая ошибка; **10 баллов –** верно составлена система уравнений, но ответ не получен; **0 баллов –** все остальное.

2. Глобус имеет диаметр 20 см. Определите примерную площадь, которую занимает на этом глобусе территория России. Все недостающие для решения задачи данные найдите в справочниках.

Решение. Из справочника находим $S_{\text{России}} = 17098246$ кв. км $= 17{,}1 \cdot 10^{12}$ кв. м, $R_{\text{Земли}} = 6371$ км $= 637 \cdot 10^4$ м. Коэффициент подобия: $k = \frac{R_{\text{глоб.}}}{R_{\text{Земли}}} = \frac{10^{-1}}{637 \cdot 10^4} = \frac{10^{-5}}{637}$. Значит, $\frac{x}{S_{\text{России}}} = k^2$;

$x = k^2 \cdot S_{\text{России}} = \left(\frac{10^{-5}}{637}\right)^2 \cdot 17{,}1 \cdot 10^{12}$ кв. м $= 4{,}21 \cdot 10^{-3}$ кв. м = 42 кв. см.

Ответ: 42 кв. см.

Критерии: 20 баллов – верное (не обязательно такое, как выше) решение + правильный ответ; **10 баллов –** идейно верное решение, но ответ отличается заметно (на 5 кв. см. или больше) из-за грубых ошибок округления или вычисления; **5 баллов –** идейно верное решение (площади относятся как квадрат коэффициента подобия), но ответ отличается в 2 раза или больше; **0 баллов –** все остальное.

3. Гиря изготовлена из сплава четырех металлов и весит 16,3 кг. Вес первого металла в этом сплаве в полтора раза больше, чем второго, вес второго металла относится к весу третьего как 3 : 4, а вес третьего к весу четвертого – как 5 : 6. Определите вес четвертого металла.

Решение. Обозначив вес второго металла через *x*, выразить через *x* остальные веса. Получится вес первого металла: 1,5*x*; вес третьего: $\frac{4}{3}x$; вес четвертого: $\frac{24}{15}x$. Удобно избавиться от знаменателей. Тогда вес металлов соответственно равен: $45a$; $30a$; $40a$; $48a$. В сумме это даст $163a$ или 16,3 кг. Поэтому $a = 0{,}1$, и металлы соответственно весят 4,5 кг; 3 кг; 4 кг; 4,8 кг.

Ответ: 4,8 кг.

Критерии: 20 баллов – верное решение (не обязательно такое, как выше); **10 баллов** – получено верное уравнение (или система уравнений), но допущены ошибки при его решении; **0 баллов** – все остальное.

4. После того как к буксиру, толкающему баржу, добавили еще один буксир, они стали толкать баржу с удвоенной силой. Как изменится мощность, затрачиваемая на движение, если сопротивление воды пропорционально квадрату скорости движения баржи?

Решение. Так как баржа движется с постоянной скорость, сила тяги буксиров уравновешивается силой сопротивления. При увеличении силы тяги вдвое в то же количество раз возрастает сила сопротивления, следовательно, скорость баржи возросла в $\sqrt{2}$ раз. Мощность есть произведение силы на скорость, т.е. мощность возросла в $2\sqrt{2}$ раз.

Ответ: возросла в $2\sqrt{2}$ раз.

Критерии: 20 баллов – полное и правильное решение; **10 баллов –** определена и обоснована скорость баржи при буксировке двумя буксирами; **0 баллов** – все остальное.

5. Возьмите линейку и положите ее концы плашмя на указательные пальцы двух вытянутых перед собой рук. Если теперь двигать пальцы навстречу друг другу, то они встретятся примерно в середине линейки. Если же положить середину линейки на сведенные вместе указательные пальцы и пытаться двигать пальцы друг от друга к концам линейки, то один палец будет двигаться от центра, а второй – нет. Почему?

Ответ: При движении от центра один палец всегда стартует чуть быстрее и обгоняет второй. Поэтому над вторым оказывается всё большая часть веса линейки, и из-за трения он не может двигаться. Первому же пальцу, наоборот, всё легче и легче. При движении к центру, если один из пальцев оказывается ближе к центру масс, чем другой, на него начинает действовать б*о*льшая сила трения, в результате чего он замедляется и останавливается. При этом начинает двигаться второй палец, пока не окажется ближе первого к центру масс. Таким образом, центр масс всегда находится между пальцами.

Критерии: 20 баллов – верное обоснование явления; **15 баллов –** в основном верное обоснование с небольшими недочетами; **10 баллов** – верная идея обоснования; **0 баллов –** все остальное.

ЛОМОНОСОВ – 2013. МЕХАНИКА

7-8 класс

Краткие решения и критерии оценки задач заочного тура

1. Ученые нашли фрагмент древнего манускрипта по механике. Это был кусок книги, первая страница которого имела номер 435, а последняя страница записывалась теми же цифрами, но в каком-то другом порядке. Сколько листов было в этом фрагменте?

Решение. Так как у листа 2 страницы и первая страница нечетная, то последняя страница должна быть четной. Значит, последняя цифра – 4. Номер последней страницы больше, чем первой. Остается единственная возможность: 534. Значит, всего страниц 100, а листов 50.

Ответ: 50.

Критерии: 20 баллов – верное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов** – верное решение, но в ответ записано количество страниц (100), а не листов; **10 баллов** – верно определен номер последней страницы, а далее решение либо прерывается, либо неверное; **5 баллов** – в решении есть отдельные верные идеи; **0 баллов** – все остальное.

2. Глобус имеет диаметр 20 см. Определите примерную площадь, которую занимает на этом глобусе территория России. Все недостающие для решения задачи данные найдите в справочниках.

Решение. Из справочника находим $S_{\text{России}} = 17098246$ кв. км $= 17,1 \cdot 10^{12}$ кв. м, $R_{\text{Земли}} = 6371$ км $= 637 \cdot 10^4$ м. Коэффициент подобия: $k = \dfrac{R_{\text{глоб.}}}{R_{\text{Земли}}} = \dfrac{10^{-1}}{637 \cdot 10^4} = \dfrac{10^{-5}}{637}$. Значит, $\dfrac{x}{S_{\text{России}}} = k^2$;

$x = k^2 \cdot S_{\text{России}} = \left(\dfrac{10^{-5}}{637}\right)^2 \cdot 17,1 \cdot 10^{12}$ кв. м $= 4,21 \cdot 10^{-3}$ кв. м = 42 кв. см.

Ответ: 42 кв. см.

Критерии: 20 баллов – верное (не обязательно такое, как выше) решение + правильный ответ; **10 баллов** – идейно верное решение, но ответ отличается заметно (на 5 кв. см. или больше) из-за грубых ошибок округления или вычисления; **5 баллов** – идейно верное решение (площади относятся как квадрат коэффициента подобия), но ответ отличается в 2 раза или больше; **0 баллов** – все остальное.

3. Обычно школьник Гаврила за минуту поднимается по движущемуся вверх эскалатору, стоя на его ступеньке. Но если Гаврила опаздывает, он бежит вверх по работающему эскалатору и экономит таким образом 36 секунд. Сегодня у эскалатора столпилось много народа, и Гаврила решил пробежать по соседнему неработающему эскалатору. Сколько времени займет у него такой подъем, если он при беге по эскалатору всегда прикладывает одно и то же усилие?

Решение. Примем длину эскалатора за единицу. Пусть V – скорость движения эскалатора, а U – скорость движения Гаврилы относительно него. Тогда условие задачи можно записать так:

$$\begin{cases} 1 = V \cdot 60 \\ 1 = (V + U) \cdot (60 - 36) \end{cases}$$

Искомое время определяется из соотношения $1 = U \cdot t$. Из системы получаем $V = \frac{1}{60}$; $U + V = \frac{1}{24}$;

$U = \frac{1}{24} - \frac{1}{60} = \frac{1}{40}$. Поэтому $t = 40$ секунд.

Ответ: 40 секунд.

Критерии: 20 баллов – полное и правильное решение, **15 баллов –** верный ход решения, однако допущена арифметическая ошибка; **10 баллов –** верно составлена система уравнений, но ответ не получен; **0 баллов –** все остальное.

4. После того как к буксиру, толкающему баржу, добавили еще один буксир, они стали толкать баржу с удвоенной силой. Как изменится мощность, затрачиваемая на движение, если сопротивление воды пропорционально первой степени скорости баржи?

Решение. Так как баржа движется с постоянной скорость, сила тяги буксиров уравновешивается силой сопротивления. При увеличении силы тяги вдвое в то же количество раз возрастает сила сопротивления, следовательно, скорость баржи возросла в 2 раза. Мощность есть произведение силы на скорость, т.е. мощность возросла в 4 раза.

Ответ: возросла в 4 раза.

Критерии: 20 баллов – полное и правильное решение, **10 баллов –** определена и обоснована скорость баржи при буксировке двумя буксирами, **0 баллов –** все остальное

5. Почему зимой лед на окнах в троллейбусах образуется с внутренней стороны, ведь, казалось бы, там теплее, чем на улице?

Ответ: Внутри троллейбуса из-за дыхания пассажиров находится теплый влажный воздух. Стекло согревается этим воздухом с внутренней стороны и охлаждается с внешней морозным воздухом. Если нагрев изнутри мал, то температура внутренней поверхности стекла будет отрицательной, и вода, конденсируясь вблизи стекла в салоне, будет замерзать на поверхности стекла. Снаружи воздух сухой и холодный, поэтому конденсация не происходит.

Критерии: 20 баллов – верное обоснование явления; **15 баллов –** в основном верное обоснование с небольшими недочетами; **10 баллов –** верная идея обоснования; **0 баллов –** все остальное.

ЛОМОНОСОВ – 2013. МЕХАНИКА. 10 – 11 классы. Заключительный этап

Краткие решения и критерии оценки задач

Задача 1 (*вариант 131*)

Перворазрядник Чуков пробегает один круг по пересеченной местности на три минуты быстрее, чем его одноклассник Геков (оба они бегут с постоянной скоростью). Если они побегут одновременно из одного места этого круга, но в разные стороны, то встретятся не ранее, чем через две минуты, а если они стартуют из одного места в одну сторону, то Чуков обгонит Гекова на круг не позже, чем через 18 минут. Определите, какие значения может принимать время, за которое Чуков пробегает один круг.

Решение. Если Чуков пробегает круг за t минут, то у Гекова на это уйдет $t+3$ минуты. Если длина круга равна L метров, то скорость Чукова $V_1=\frac{L}{t}$, а скорость Гекова $V_2=\frac{L}{t+3}$. По условию $\frac{L}{V_1+V_2}\geqslant 2$, $\frac{L}{V_1-V_2}\leqslant 18$.

Поэтому $\frac{L}{\frac{L}{t}+\frac{L}{t+3}}\geqslant 2$, отсюда $\frac{t(t+3)}{2t+3}\geqslant 2$, $t^2+3t\geqslant 4t+6$, $t^2-t-6\geqslant 0$. Корни соответствующего уравнения: -2 и 3. Значит, $t\geqslant 3$.

Аналогично $\frac{L}{\frac{L}{t}-\frac{L}{t+3}}\leqslant 18$, отсюда $\frac{t(t+3)}{3}\leqslant 18$, $t^2+3t-54\leqslant 0$. Корни соответствующего уравнения: -9 и 6. Значит, $t\leqslant 6$. Поэтому ответ: $[3;6]$.

Ответ: От 3 до 6 минут (включая 3 и 6).

Ответы других вариантов:

Вариант 132. От 10 до 15 минут (включая 10 и 15).
Вариант 133. От 3 до 9 минут (включая 3 и 9).
Вариант 134. От 10 до 20 минут (включая 10 и 20).

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **10 баллов –** решение доведено до правильных неравенств относительно *t*, но в дальнейшем сделаны ошибки; **5 баллов –** правильно выписаны уравнение и два неравенства относительно неудачно выбранных неизвестных величин, решение которых или не получено, или получено с ошибками.

Задача 2 (*вариант 131*)

Из точки, находящейся на поверхности земли, по всем направлениям с одинаковой скоростью 10 м/с выпускают большое количество маленьких шариков. Среди всех шариков, упавших от точки старта на расстоянии не ближе, чем 96% от расстояния, на котором упал дальше всех улетевший шарик, найдите тот, который проведет в полете наибольшее время. Чему равно это время? Ответ выразите в секундах и округлите до одного знака после запятой. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Решение. Дальность полета тела, брошенного со скоростью V_0 под углом $\propto$ к горизонту, равна $l=\frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}$, а время полета равно $\tau=\frac{2V_0\sin\alpha}{g}$.

По условию $\frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}\geqslant\frac{96}{100}\frac{V_0^2\sin(2\cdot 45°)}{g}$, т. е. $\sin 2\alpha\geqslant\frac{96}{100}$. Среди этих шариков нужно выбрать тот, у которого максимально $\tau=\frac{2V_0\sin\alpha}{g}$, т. е. тот, у которого $\sin\alpha$ является наибольшим. Т. к. $\arcsin\frac{24}{25} \leqslant 2\alpha \leqslant \pi - \arcsin\frac{24}{25}$, то $\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}$. Поэтому наибольшим временем полета является $\frac{2V_0}{g}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}\right) = \frac{2V_0}{g}\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}\right)$

$$= \frac{2V_0}{g}\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arcsin\frac{24}{25}\right)}{2}} = \frac{2V_0}{g}\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \frac{2V_0}{g}\sqrt{\frac{16}{25}} = 1{,}6 \text{ с.}$$

Ответ: 1,6 секунды.

Ответы других вариантов:

Вариант 132. 9,6 метров. ***Вариант 133.*** 2,0 секунды. ***Вариант 134.*** 10,0 метров.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** в основном верное решение, но имеются дефекты (например, не обоснован выбор значения α); **10 баллов –** решение в основном верное, но содержит вычислительные ошибки; **5 баллов –** выписаны верные формулы для дальности и времени полета, но существенного продвижения нет.

Задача 3 (*вариант 131*)

Три шкива с параллельными осями и одинаковыми радиусами $r = 2$ см должны быть соединены плоской ременной передачей. Расстояние между осями вращения шкивов O_1 и O_2 равно 12 см, а между осями вращения шкивов O_1 и O_3 равно 10 см. Расстояние от оси O_3 до плоскости, в которой находятся оси O_1 и O_2, равно 8 см. Определите длину ремня для передачи, который изготавливается путём сшивания концов нерастяжимого прорезиненного шнура (считаем, что длина ремня равна длине этого шнура). Всегда ли для его изготовления хватит шнура длиной 54 см?

Решение. 1) Вначале решается геометрическая задача о нахождении стороны O_2O_3. По условию $\sin\angle O_1 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; поэтому $\cos\angle O_1 = \pm\frac{3}{5}$. Третья сторона находится по теореме косинусов и равняется или 10 см, или $2\sqrt{97}$ см.

2) Периметр фигуры будет равен сумме трех прямолинейных отрезков и сумме трех дуг. Сумма прямолинейных отрезков равна периметру треугольника $O_1O_2O_3$.

3) Сумма длин трех дуг равна $r\cdot(\pi-\alpha) + r\cdot(\pi-\beta) + r\cdot(\pi-\gamma)$ (здесь α, β, γ – углы треугольника $O_1O_2O_3$), что равняется $r\cdot(3\pi-\alpha-\beta-\gamma) = r\cdot(3\pi-\pi) = 2\pi r$.

4) В случае остроугольного треугольника требуемая длина ремня есть $12+10+10+2\pi\cdot 2 = 32+4\pi$ см (для справки: $32+4\pi \approx 44{,}57$). Это очевидно меньше, чем 54 (т. к. $32+4\pi < 32+4\cdot 4 = 48 < 54$), поэтому шнура хватает.

5) В случае тупоугольного треугольника требуемая длина ремня есть $12+10+2\sqrt{97}+2\pi\cdot 2 = 22+2\sqrt{97}+4\pi$ см (для справки: $22+2\sqrt{97}+4\pi \approx 54{,}26$). Здесь шнура не хватает.

Поэтому ответ: **нет.** Для получения максимального балла требуется аккуратное сравнение $22+2\sqrt{97}+4\pi > 54 \Leftrightarrow \sqrt{97}+2\pi > 16 \Leftrightarrow \sqrt{97}+2\pi > 9{,}8+6{,}2 = 16$.

Ответ: а) $32+4\pi$ см или $22+2\sqrt{97}+4\pi$ см; б) не всегда.

Ответы других вариантов:

Вариант 132. а) $36+6\pi$ см или $23+3\sqrt{41}+6\pi$ см; б) не всегда.

Вариант 133. а) $32+6\pi$ см или $22+2\sqrt{97}+6\pi$ см; б) не всегда.

Вариант 134. а) $36+8\pi$ см или $23+3\sqrt{41}+8\pi$ см; б) не всегда.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** в основном верное решение и верный ответ, но имеются дефекты (например: не проведено или некорректно проведено сравнение чисел в последнем пункте решения; не доказано, что сумма длин дуг равна длине окружности); **10 баллов –** решение в основном верное, но содержит вычислительные ошибки; **5 баллов –** рассмотрен только один из двух случаев, при этом решение и ответ (для данного случая) полностью верные.

Задача 4 (*вариант 131*).

При изучении работы нового типа теплового двигателя, работающего циклически, было обнаружено, что часть периода он получает тепло, причем абсолютная величина мощности теплоподвода выражается законом: $P_1(t) = P_0 \dfrac{\sin \omega t}{100 + \sin t^2}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{\omega}$. Газ совершает работу, развивая механическую мощность $P_2(t) = 3P_0 \dfrac{\sin(2\omega t)}{100 + \sin(2t)^2}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2\omega}$. Работа над газом, которую совершают внешние тела, составляет 2/3 от величины совершенной газом работы. Определите КПД двигателя.

Решение. КПД тепловой машины есть отношение полезной работы к количеству теплоты, полученному газом за цикл. Для того чтобы найти полезную работу, требуется найти разность работ: совершенной газом (A_+) и совершенной над ним (A_-). Каждая из этих величин находится интегрированием мощности по времени или нахождением площади фигуры, заключенной между графиком зависимости мощности от времени и осью времени. Аналогично находится количество теплоты, полученное газом (Q_+).

Заметим, функция $P_2(t) = aP_1(bt)$, поэтому, так как фигура, образованная графиком P_2, получается из фигуры, соответствующей функции P_1 растяжением вдоль вертикальной оси в *a* раз и сжатием вдоль горизонтальной оси в *b* раз, то $A_+ = Q_+ \cdot \dfrac{a}{b}$. По условию, $A_- = \beta A_+$. Окончательно, $\eta = \dfrac{a}{b}(1-\beta)$.

При данных в условии задачи $a = 3$, $b = 2$, $\beta = \dfrac{2}{3}$: $\eta = \dfrac{1}{2}$.

Отметим, что интеграл от функции $P_1(t)$ невозможно выразить через элементарные функции. С другой стороны, подынтегральная функция существенно упрощается, если пренебречь вторым слагаемым в знаменателе. Существенной потери точности при этом не происходит, так как второе слагаемое ограничено и на два порядка меньше первого. После этого интегралы легко вычисляются.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Ответы других вариантов:

Вариант 132. $\dfrac{1}{6}$. ***Вариант 133.*** $\dfrac{5}{6}$. ***Вариант 134.*** $\dfrac{2}{9}$.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** допущена арифметическая ошибка при вычислении окончательного ответа при условии полного правильного решения; **5 баллов –** выписано выражение для КПД, отмечена связь между указанными мощностями, но ответ не получен.

Задача 5 (*вариант 131*).

Вся местность разбита на квадраты, обозначенные двумя целыми индексами *M* и *N* так, что, например, точка с координатами $x = 12,25$, $y = 20,9$ находится в квадрате номер $[12;\, 20]$, а точка с координатами $x = -12,34$, $y = 0,1239$ находится в квадрате номер $[-13;\, 0]$ и так далее. Загадочный объект движется в плоскости *Oxy* по траектории $y = \left(\left(\left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5$, а луч радара на местности направлен вдоль линии $y = x + 2013$. Укажите номера всех квадратов, в которых радаром будет зарегистрировано появление загадочного объекта.

Решение. 1) Уравнение $\left(\left(\left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013 = x$ (1)

равносильно уравнению $x^5 - 2013 = x$. (2)

Возможное доказательство: а) Если *x* является корнем уравнения (2), то $\left(\left(\left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013 = \left(\left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013 = \left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013$ $= x^5 - 2013 = x$, т. е. *x* является корнем уравнения (1). б) Если *x* является корнем уравнения (1), то он обязан являться и корнем уравнения (2). Предположим противное. Пусть $x^5 - 2013 > x$. Тогда из того, что функция $g(x) = x^5 - 2013$ монотонно возрастает, следует: $\left(\left(\left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013 > \left(\left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013 > \left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013 >$ $x^5 - 2013 > x$, т.е. левая часть уравнения (1) больше, чем правая. Аналогично нет решений, если $x^5 - 2013 < x$. в) Значит, все корни (1) и (2) совпадают (или их нет), т. е. уравнения (1) и (2) равносильны.

2) Введем функцию $f(x) = x^5 - x - 2013$. Имеем $f(4) < 0$, $f(5) > 0$, поэтому из-за непрерывности между точками 4 и 5 будут корни (корень один, но это здесь неважно).

3) Уравнение $x^5 - 2013 = x$ не имеет корней вне промежутка $(4;\, 5)$. Докажем это.

Т. к. $f(x) = x\left(x^4 - 1\right) - 2013$, то нет корней при $x \leqslant -1$ и при $x \in (1;4)$ – в этих случаях, очевидно, что $f(x) < 0$. При $x \in [-1;1]$ корней нет, т. к. тогда $x^5 - x < 2013$. Нет корней и при $x > 5$, т. к. тогда $x\left(x^4 - 1\right) - 2013 > 5\left(5^4 - 1\right) - 2013 > 0$.

Отсутствие корней на $(4;\, 5)$ можно доказывать и с помощью производной: $f'(x) = 5x^4 - 1$ – функция возрастает всюду, кроме $x^4 \leqslant \dfrac{1}{5}$ (некая окрестность нуля). Тогда нужно аккуратно эту окрестность «обойти». Например, нет корней на $x \in [-1;1]$ (см. выше), нет корней при $x \leqslant -1$ (см. выше) и будет ровно один корень при $x > 1$.

4) Значит: $x \in (4;\, 5)$. Поэтому $y = x + 2013 \in (2017;\, 2018)$.

Ответ: $[4;\, 2017]$.

Ответы других вариантов:

Вариант 132. $[-5;\, -2018]$. ***Вариант 133.*** $[4;\, 2016]$. ***Вариант 134.*** $[-5;\, -2017]$.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** в основном верное решение и верный ответ, но имеются дефекты (например: переход от (1) к (2) сделан без обоснования или с некорректным обоснованием); **10 баллов –** не доказано что уравнение не имеет других решений, кроме $x \in (4; 5)$ (отметим, что доказательство должно быть четким и аккуратным; рассуждения типа «очевидно, что эта функция круче, и поэтому пересечений быть не может» таковым не является); **5 баллов** – обоснованно сделан переход к уравнению (2), но дальнейших продвижений нет.

Задача 6 (*вариант 131*)

Имеется очень много однородных круглых дисков одинаковой толщины и одинаковой плотности. Эти диски выставляют на горизонтальную доску так, что плоскость дисков вертикальна. Два соседних диска касаются друг друга, причем радиусы двух соседних дисков относятся как 2 : 1. Диск слева всегда больше диска справа (см. рис). Радиус наибольшего диска равен 2 м. Определите расстояние от центра наибольшего диска до центра масс системы.

Решение. Радиусы дисков образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q < 1$. Здесь $q = \frac{1}{2}$, $R = 2$. Следовательно, массы дисков также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q^2 < 1$. Масса всей системы конечна, ее размер тоже, поэтому положение центра масс определено.

Найдем высоту, на которой центр масс расположен над доской:

$M_i = Mq^{2(i-1)}$, $i = 1, 2, 3, \dots$; $R_i = Rq^{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots$

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (M_i R_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} M_i} = R\frac{1-q^2}{1-q^3}.$$

Соединяем отрезком центры двух соседних дисков, и из прямоугольного треугольника с такой гипотенузой и катетами параллельными и перпендикулярными доске, находим угол между этим отрезком и доской: $\sin\alpha = \frac{1-q}{1+q}$. Так как этот угол не зависит от номера диска, все центры дисков, а значит, и центр масс лежит на прямой, проходящей через центр первого диска и имеющей найденный наклон к доске.

Из прямоугольного треугольника с катетами, параллельным и перпендикулярным доске, и гипотенузой, соединяющей центр первого диска с центром масс системы, найдем искомое расстояние: $d = \frac{R-Y}{\sin\alpha} = R\frac{q^2(1+q)}{1-q^3}$.

Ответ: $\frac{6}{7}$ м.

Ответы других вариантов:

Вариант 132. $\frac{180}{49}$ м. ***Вариант 133.*** $\frac{60}{19}$ м. ***Вариант 134.*** $\frac{252}{37}$ м.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный числовой ответ; **15 баллов** – в основном верное решение, допущена арифметическая ошибка; **5 баллов** – верно найдена только одна координата центра масс.

Внимание! ***Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.***

ЛОМОНОСОВ – 2013. МЕХАНИКА. 9 классы

Краткие решения и критерии оценки задач

Заключительный этап

1. Гаврила с Глафирой взяли стакан, заполненный до краев водой, и немного воды вылили в три формочки для льда, положив их потом в морозильник. Когда лед замерз, получившиеся три кубика положили обратно в стакан. Гаврила предсказал, что часть воды из стакана выльется, так как при замерзании лед расширился в объеме. Глафира же утверждала, что уровень воды будет ниже края стакана, так как часть плавающего льда будет выступать над поверхностью воды. Кто же прав и почему?

Решение. Пусть V – объем воды в формочках. Тогда объем W льда в формочках можно определить из закона сохранения массы $V \cdot \rho_{\text{воды}} = W \cdot \rho_{\text{льда}}$. При плавании льда объемом W, погруженную в воду часть этого объема U, можно определить из условия плавания тел $U \cdot \rho_{\text{воды}} = W \cdot \rho_{\text{льда}}$. Очевидно поэтому, что $V = U$.

Ответ: Не прав никто. Вода будет заполнять стакан ровно до его краев.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **10 баллов –** правильный ответ, но недостаточно четкое его обоснование.

2. Перворазрядник Чуков пробегает один круг по пересеченной местности на три минуты быстрее, чем его одноклассник Геков (оба они бегут с постоянной скоростью). Если они побегут одновременно из одного места этого круга, но в разные стороны, то встретятся не ранее, чем через две минуты, а если они стартуют из одного места в одну сторону, то Чуков обгонит Гекова на круг не позже, чем через 18 минут. Определите, какие значения может принимать время, за которое Чуков пробегает один круг.

Решение. Если Чуков пробегает круг за t минут, то у Гекова на это уйдет $t+3$ минуты. Если длина круга равна L метров, то скорость Чукова $V_1 = \dfrac{L}{t}$, а скорость Гекова $V_2 = \dfrac{L}{t+3}$. По условию $\dfrac{L}{V_1+V_2} \geqslant 2$, $\dfrac{L}{V_1-V_2} \leqslant 18$.

Поэтому $\dfrac{L}{\dfrac{L}{t}+\dfrac{L}{t+3}} \geqslant 2$, отсюда $\dfrac{t(t+3)}{2t+3} \geqslant 2$, $t^2+3t \geqslant 4t+6$, $t^2-t-6 \geqslant 0$. Корни соответствующего уравнения: -2 и 3. Значит, $t \geqslant 3$.

Аналогично $\dfrac{L}{\dfrac{L}{t}-\dfrac{L}{t+3}} \leqslant 18$, отсюда $\dfrac{t(t+3)}{3} \leqslant 18$, $t^2+3t-54 \leqslant 0$. Корни соответствующего уравнения: -9 и 6. Значит, $t \leqslant 6$. Поэтому ответ: $[3; 6]$.

Ответ: От 3 до 6 минут (включая 3 и 6).

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **10 баллов –** решение доведено до правильных неравенств относительно t, но в дальнейшем сделаны ошибки; **5 баллов –** правильно выписаны уравнение и два неравенства относительно неудачно выбранных неизвестных величин, решение которых или не получено, или получено с ошибками.

3. Из точки, находящейся на поверхности земли, по всем направлениям с одинаковой скоростью 10 м/с выпускают большое количество маленьких шариков. Среди всех шариков, упавших от точки старта на расстоянии не ближе, чем 96% от расстояния, на котором упал дальше всех улетевший шарик, найдите тот, который проведет в полете наибольшее время.

Чему равно это время? Ответ выразите в секундах и округлите до одного знака после запятой. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Решение. Дальность полета тела, брошенного со скоростью V_0 под углом ∝ к горизонту, равна $l = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, а время полета равно $\tau = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}$.

По условию $\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \geqslant \frac{96}{100} \frac{V_0^2 \sin(2 \cdot 45°)}{g}$, т. е. $\sin 2\alpha \geqslant \frac{96}{100}$. Среди этих шариков нужно выбрать тот, у которого максимально $\tau = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}$, т. е. тот, у которого $\sin\alpha$ является наибольшим. Т. к. $\arcsin\frac{24}{25} \leqslant 2\alpha \leqslant \pi - \arcsin\frac{24}{25}$, то $\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}$. Поэтому наибольшим временем полета является $\frac{2V_0}{g}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}\right) = \frac{2V_0}{g}\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}\right)$

$$= \frac{2V_0}{g}\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arcsin\frac{24}{25}\right)}{2}} = \frac{2V_0}{g}\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \frac{2V_0}{g}\sqrt{\frac{16}{25}} = 1{,}6 \text{ с.}$$

Ответ: 1,6 секунды.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** в основном верное решение, но имеются дефекты (например, не обоснован выбор значения α); **10 баллов –** решение в основном верное, но содержит вычислительные ошибки; **5 баллов –** выписаны верные формулы для дальности и времени полета, но существенного продвижения нет.

4. Три шкива с параллельными осями и одинаковыми радиусами $r = 2$ см должны быть соединены плоской ременной передачей. Расстояние между осями вращения шкивов O_1 и O_2 равно 12 см, а между осями вращения шкивов O_1 и O_3 равно 10 см. Расстояние от оси O_3 до плоскости, в которой находятся оси O_1 и O_2, равно 8 см. Определите длину ремня для передачи, который изготавливается путём сшивания концов нерастяжимого прорезиненного шнура (считаем, что длина ремня равна длине этого шнура). Всегда ли для его изготовления хватит шнура длиной 54 см?

Решение. 1) Вначале решается геометрическая задача о нахождении стороны O_2O_3. По условию $\sin\angle O_1 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; поэтому $\cos\angle O_1 = \pm\frac{3}{5}$. Третья сторона находится по теореме косинусов и равняется или 10 см, или $2\sqrt{97}$ см.

2) Периметр фигуры будет равен сумме трех прямолинейных отрезков и сумме трех дуг. Сумма прямолинейных отрезков равна периметру треугольника $O_1O_2O_3$.

3) Сумма длин трех дуг равна $r\cdot(\pi-\alpha) + r\cdot(\pi-\beta) + r\cdot(\pi-\gamma)$ (здесь α, β, γ – углы треугольника $O_1O_2O_3$), что равняется $r\cdot(3\pi-\alpha-\beta-\gamma) = r\cdot(3\pi-\pi) = 2\pi r$.

4) В случае остроугольного треугольника требуемая длина ремня есть $12+10+10+2\pi\cdot 2 = 32+4\pi$ см (для справки: $32+4\pi \approx 44{,}57$). Это очевидно меньше, чем 54, поэтому шнура хватает.

5) В случае тупоугольного треугольника требуемая длина ремня есть $12+10+2\sqrt{97}+2\pi\cdot 2 = 22+2\sqrt{97}+4\pi$ см (для справки: $22+2\sqrt{97}+4\pi \approx 54{,}26$). Здесь шнура не хватает.

Поэтому ответ: **нет.** Для получения максимального балла требуется аккуратное сравнение $22+2\sqrt{97}+4\pi > 54 \Leftrightarrow \sqrt{97}+2\pi > 16 \Leftrightarrow \sqrt{97}+2\pi > 9{,}8+6{,}2 = 16$.

Ответ: а) $32+4\pi$ см или $22+2\sqrt{97}+4\pi$ см; б) не всегда.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** в основном верное решение и верный ответ, но имеются дефекты (например: не проведено или некорректно проведено сравнение чисел в последнем пункте решения; не доказано, что сумма длин дуг равна длине окружности); **10 баллов –** решение в основном верное, но содержит вычислительные ошибки; **5 баллов –** рассмотрен только один из двух случаев, при этом решение и ответ (для данного случая) полностью верные.

5. Сосуд заполнен холодной водой. С этим сосудом проделывают следующую процедуру: отливают три четверти холодной воды и доливают до первоначального объема горячей водой. При этом температура воды в сосуде увеличивается на $16°$ С. После этого процедуру повторяют несколько раз: отливают три четверти объема воды и доливают до первоначального объема горячей водой (той же температуры).

А) За какое количество процедур температура воды в сосуде будет отличаться от температуры горячей воды на $0,5°$ С?

Б) Возможно ли добиться того, чтобы температура воды в сосуде отличалась от температуры горячей воды ровно на $3°$ С?

Решение. Обозначим через α – отношение объема доливаемой воды к объему сосуда $\left(\alpha=\frac{3}{4}\right)$. Тогда из уравнения баланса тепла:

$$t_1=(1-\alpha)t_c+\alpha t_h \qquad (1)$$

$$t_2=(1-\alpha)t_1+\alpha t_h \quad \Rightarrow \quad t_2=t_h-(1-\alpha)^2(t_h-t_c) \qquad (2)$$

Аналогично $t_3=t_h-(1-\alpha)^3(t_h-t_c)$ (3)

…

$$t_n=t_h-(1-\alpha)^n(t_h-t_c) \qquad (4)$$

Из условия задачи и из (1) следует, что $t_h-t_c=\frac{64}{3}$. Из (4) получим, что: А) невозможно; Б) невозможно.

Ответ: А) невозможно; Б) невозможно.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** в основном верное решение и верный ответ, но имеются дефекты его обоснования; **10 баллов –** решение в основном верное, но содержит вычислительные ошибки.

ЛОМОНОСОВ – 2013. МЕХАНИКА. 7 – 8 классы

Ответы; краткие решения и критерии оценки задач

Заключительный этап

1. Автомобиль новой модели на одном литре бензина проходит на $4\frac{1}{6}$ километра больше, чем автомобиль старой модели. При этом расход бензина на 100 км у него на 2 литра меньше. Сколько литров бензина на 100 км расходует новый автомобиль?

Ответ: 6 литров.

Указания. Расход нового автомобиля равен x литров, расход старого равен $x+2$ литра. Уравнение: $\frac{100}{x}-\frac{100}{x+2}=\frac{25}{6} \Leftrightarrow \frac{4(x+2-x)}{x(x+2)}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow x^2+2x-48=0 \Leftrightarrow x=-8; x=6$. Поэтому $x=6$ литров.

2. Гаврила с Глафирой взяли стакан, заполненный до краев водой, и немного воды вылили в три формочки для льда, положив их потом в морозильник. Когда лед замерз, получившиеся три кубика положили обратно в стакан. Гаврила предсказал, что часть воды из стакана выльется, так как при замерзании лед расширился в объеме. Глафира же утверждала, что уровень воды будет ниже края стакана, так как часть плавающего льда будет выступать над поверхностью воды. Кто же прав и почему?

Ответ: Не прав никто. Вода будет заполнять стакан ровно до его краев.

Указания. Пусть V – объем воды в формочках. Тогда объем W льда в формочках можно определить из закона сохранения массы $V\cdot\rho_{\text{воды}}=W\cdot\rho_{\text{льда}}$. При плавании льда объемом W, погруженную в воду часть этого объема U, можно определить из условия плавания тел $U\cdot\rho_{\text{воды}}=W\cdot\rho_{\text{льда}}$. Очевидно поэтому, что $V = U$.

3. Школьники Чуков и Геков катаются на коньках с постоянными скоростями по замкнутому кругу беговой дорожки ледового стадиона. Если Чуков бежит по часовой стрелке, а Геков – против, то их встречи происходят в четыре раза чаще, чем происходят обгоны в случае, когда они бегут в одном направлении. Скорость одного из школьников равна 6 м/сек. Какова скорость другого?

Ответ: Либо 10 м/сек, либо 3,6 м/сек.

Указания. При движении навстречу время между встречами равно $t_1=\frac{L}{V_1+V_2}$, при попутном движении время между обгонами: $t_2=\frac{L}{V_1-V_2}$ (здесь L – длина одного круга, V_1, V_2 – скорости). По условию $\frac{t_2}{t_1}=4$, поэтому $\frac{V_1+V_2}{V_1-V_2}=4$, откуда $\frac{V_2}{V_1}=\frac{3}{5}$.

В условии не сказано, скорость кого дана. Поэтому или $\frac{6}{V}=\frac{3}{5}$ (тогда $V=10$ м/сек), или $\frac{V}{6}=\frac{3}{5}$ (тогда $V=3{,}6$ м/сек).

4. В большой ящик Гаврила вложил 7 ящиков поменьше. После этого Глафира в какие-то из этих семи ящиков вложила ещё по 7 маленьких ящиков, а в какие-то не вложила ничего. Потом Гаврила в какие-то из пустых ящиков вложил по 7 ящиков, а в какие-то нет. Глафира снова повторила эту операцию и так далее. В какой-то момент непустых ящиков оказалось 34. Сколько при этом было пустых?

Ответ: 205.

Указания. Операция заполнения одного ящика увеличивает количество пустых ящиков на $7-1=6$ штук, а количество непустых – на 1. Значит, после заполнения n ящиков (неважно, на каком этапе) их количество будет: пустых – $1+6n$ штук; непустых – n штук. Поэтому $n=34$, и непустых ящиков будет $1+6\cdot 34=205$.

5. Сосуд заполнен холодной водой. С этим сосудом проделывают следующую процедуру: отливают три четверти холодной воды и доливают до первоначального объема горячей водой. При этом температура воды в сосуде увеличивается на 24° C. После этого процедуру повторяют несколько раз: отливают три четверти объема воды и доливают до первоначального объема горячей водой (той же температуры).

А) За какое количество процедур температура воды в сосуде будет отличаться от температуры горячей воды на 3° C?

Б) Возможно ли добиться того, чтобы температура воды в сосуде отличалась от температуры горячей воды ровно на 1° C?

Ответ: А) $n=4$; Б) невозможно.

Указания. Из уравнения баланса тепла:

$$t_1-t_c=t_h-t_1 \quad\Rightarrow\quad 2t_1=t_c+t_h \qquad (1)$$

$$t_2-t_1=t_h-t_2 \quad\Rightarrow\quad 2t_2=t_h+t_1 \quad\Rightarrow\quad t_2=t_h+\frac{t_h+t_c}{2} \quad\Rightarrow\quad t_2=\frac{t_c+3t_h}{4} \qquad (2)$$

Аналогично $t_3=\dfrac{t_c+7t_h}{8}$ (3)

…

$$t_n=\frac{t_c+\left(2^n-1\right)t_h}{2^n} \quad\Rightarrow\quad 2^n=\frac{t_h-t_c}{t_h-t_n} \qquad (4)$$

Из условия задачи и из (1) следует, что $t_h-t_c=48$. Из (4) получим, что: А) $n=4$; Б) невозможно.

Все задачи оценивались по следующим критериям:

20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ;

15 баллов – в основном верное решение и верный ответ, но имеются дефекты в обосновании;

10 баллов – решение в основном верное, но содержит вычислительные ошибки.

2012/2013 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[1]

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ»

по МЕХАНИКЕ

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **95** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **65** баллов до **94** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **85** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **65** баллов до **84** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **60** баллов включительно.*

---

[1] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по механике.*