МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ» по геологии

2014/2015 учебный год

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2014-2015 учебный год

ЗАДАНИЯ ПЕРВОГО ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задание 1

Вариант 1.1. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.2 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 10 куб. м, в каждый последующий день на 0.5 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце шестого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано $a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) куб. м. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [11.5;11.8].

Ответ: 12.

Вариант 1.2. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.1 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 10 куб. м, в каждый последующий день на 0.3 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце седьмого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано

$a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) куб. м. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [11.2;11.4].

Ответ: 11.

Вариант 1.3. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.3 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 12 куб. м, в каждый последующий день на 0.6 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце восьмого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано

$a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) л. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [14.1;14.4].

Ответ: 14.

Вариант 1.4. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.2 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 8 куб. м, в каждый последующий день на 0.4 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце девятого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано

a_1+d_1(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано a_2+d_2(n-1) куб. м. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a=a_2-a_1<0$, $d=d_2-d_1>0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min}-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})\le n_{\min}+\frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1\in[(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [9.6;9.8].

Ответ: 10.

Вариант 1.5. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.4 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 11 куб. м, в каждый последующий день на 0.6 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце десятого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано

$a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) л. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [12.8;13].

Ответ: 13.

Вариант 1.6. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.1 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 5 куб. м, в каждый последующий день на 0.5 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце одиннадцатого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано $a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) куб. м. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [9;9.4].

Ответ: 9.

Вариант 1.7. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.1 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 10 куб. м, в каждый последующий день на 0.6 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце двенадцатого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано

$a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) куб. м. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим [15.5;16.0].

Ответ: 16.

Вариант 1.8. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.2 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 14 куб. м, в каждый последующий день на 0.3 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце тринадцатого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

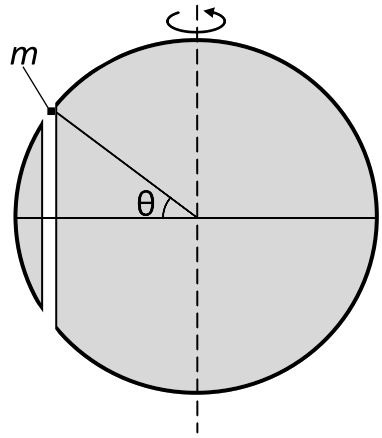
Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано

$a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) куб. м. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [15.2;15.3].

Ответ: 15.

Задание 2

Вариант 2.1. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ.

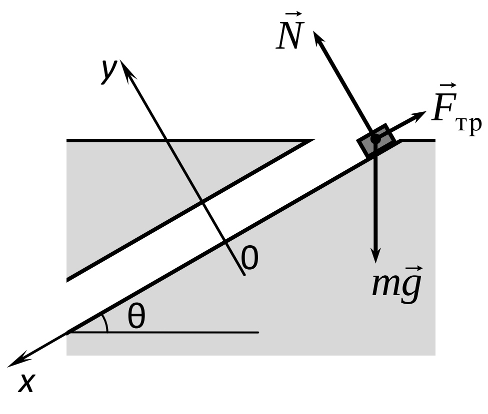


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. Коэффициент трения бруска по дну тоннеля $\mu = 0{,}15$. При каком минимальном значении широты θ брусок соскальзывает в тоннель, если его не удерживать? Ответ в градусах округлить до десятых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\sin\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\cos\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta).$$

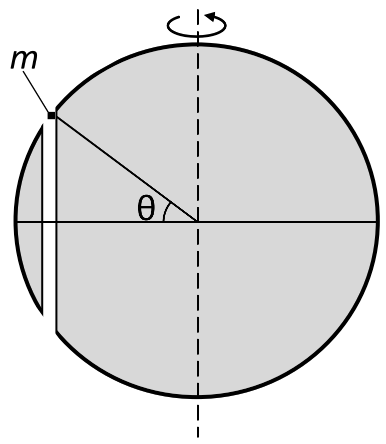
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$sin\theta - \mu cos\theta > 0 \;\;\Rightarrow\;\; sin\theta > \mu cos\theta.$$

Учитывая, что $0 \le \theta < 90°$, получим отсюда: $tg\theta > \mu,\; \theta > \theta_0 = arctg\,\mu \approx 8{,}5°$.

Ответ: 8,5.

Вариант 2.2. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ.

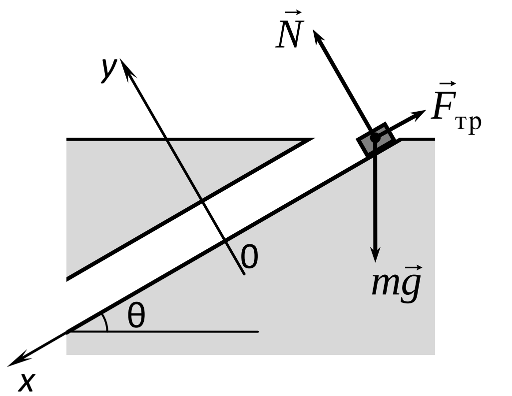


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. Коэффициент трения бруска по дну тоннеля $\mu = 0{,}2$. При каком минимальном значении широты θ брусок соскальзывает в тоннель, если его не удерживать? Ответ в градусах округлить до десятых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\sin\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\cos\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta).$$

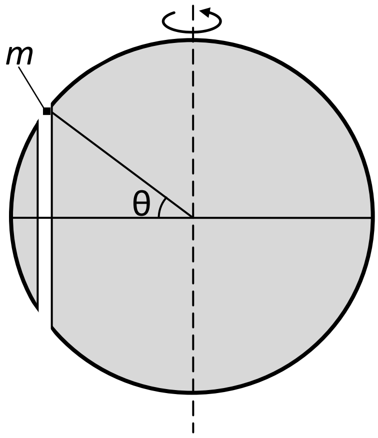
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$\sin\theta - \mu\cos\theta > 0 \;\;\Rightarrow\;\; \sin\theta > \mu\cos\theta.$$

Учитывая, что $0 \le \theta < 90°$, получим отсюда: $tg\theta > \mu$, $\theta > \theta_0 = arctg\,\mu \approx 11{,}3°$.

Ответ: 11,3.

Вариант 2.3. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ.

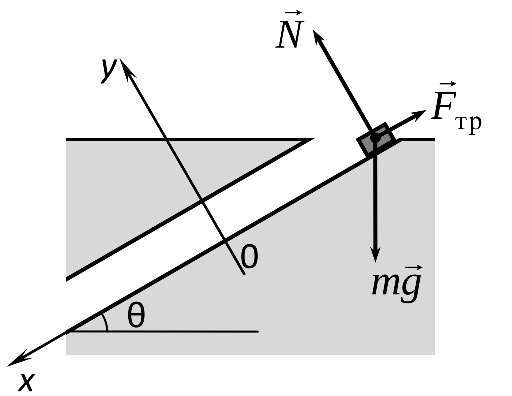


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. Коэффициент трения бруска по дну тоннеля $\mu = 0{,}25$. При каком минимальном значении широты θ брусок соскальзывает в тоннель, если его не удерживать? Ответ в градусах округлить до десятых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\,sin\,\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\,cos\,\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(sin\,\theta - \mu\,cos\,\theta).$$

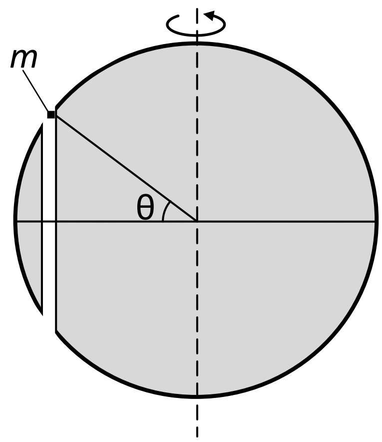
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$\sin\theta - \mu\cos\theta > 0 \quad\Rightarrow\quad \sin\theta > \mu\cos\theta.$$

Учитывая, что $0 \le \theta < 90°$, получим отсюда: $tg\theta > \mu$, $\theta > \theta_0 = arctg\,\mu \approx 14{,}0°$.

Ответ: 14,0.

Вариант 2.4. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ.

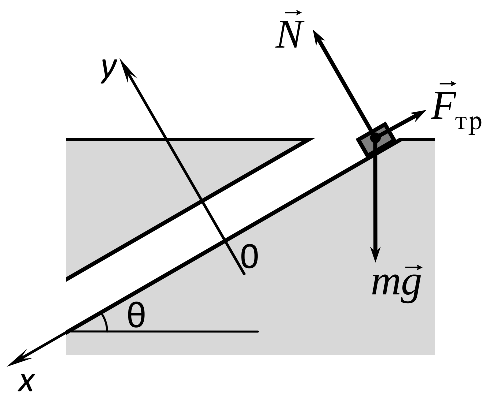


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. Коэффициент трения бруска по дну тоннеля $\mu = 0{,}3$. При каком минимальном значении широты θ брусок соскальзывает в тоннель, если его не удерживать? Ответ в градусах округлить до десятых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\,sin\,\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\,cos\,\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g\left(sin\,\theta - \mu\,cos\,\theta\right).$$

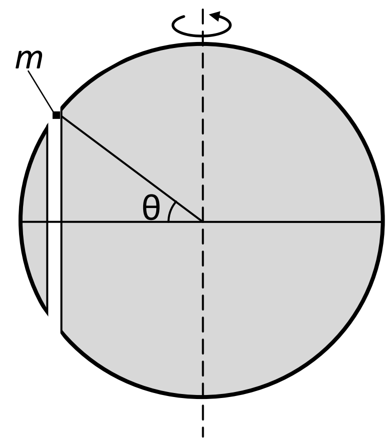
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$\sin\theta - \mu\cos\theta > 0 \;\Rightarrow\; \sin\theta > \mu\cos\theta.$$

Учитывая, что $0 \le \theta < 90°$, получим отсюда: $tg\theta > \mu$, $\theta > \theta_0 = arctg\,\mu \approx 16{,}7°$.

Ответ: 16,7.

Вариант 2.5. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ = 5° с.ш.

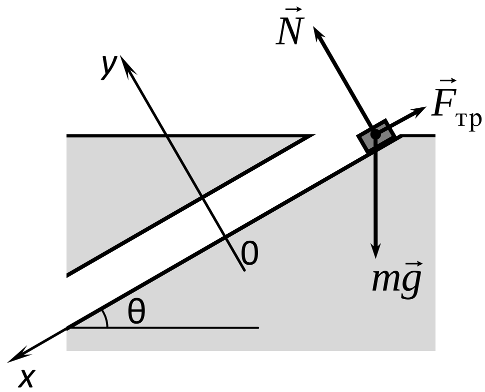


На дно тоннеля у его входа кладут брусок m. При каком значении коэффициента трения μ бруска по дну тоннеля брусок перестанет соскальзывать в тоннель, если его не удерживать? Ответ округлить до сотых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось x направим вниз по дну тоннеля, а ось y – перпендикулярно оси x. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\,sin\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\,cos\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(sin\theta - \mu cos\theta).$$

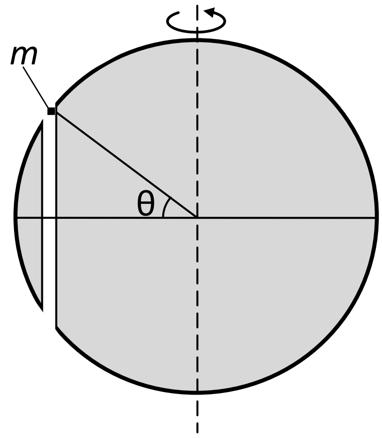
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$sin\theta - \mu cos\theta > 0 \;\Rightarrow\; sin\theta > \mu cos\theta.$$

Учитывая, что $0 < \theta < 90°$, получим отсюда: $\mu < tg\theta \approx 0{,}09$.

Ответ: 0,09.

Вариант 2.6. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ = 10° с.ш.

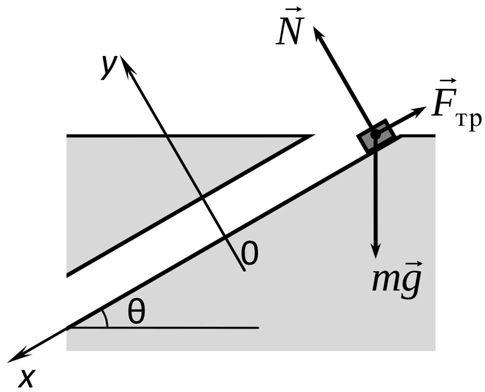


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. При каком значении коэффициента трения μ бруска по дну тоннеля брусок перестанет соскальзывать в тоннель, если его не удерживать? Ответ округлить до сотых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\,sin\,\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\,cos\,\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g\left(sin\,\theta - \mu\,cos\,\theta\right).$$

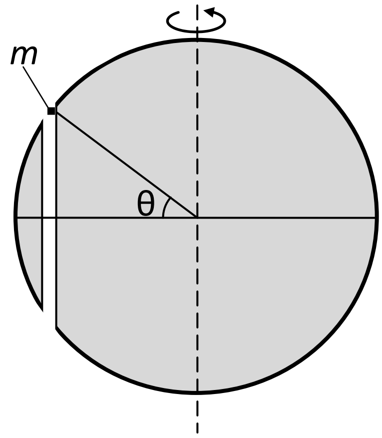
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$sin\,\theta - \mu\,cos\,\theta > 0 \;\Rightarrow\; sin\,\theta > \mu\,cos\,\theta.$$

Учитывая, что $0 < \theta < 90°$, получим отсюда: $\mu < tg\theta \approx 0{,}18$.

Ответ: 0,18.

Вариант 2.7. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ = 15° с.ш.

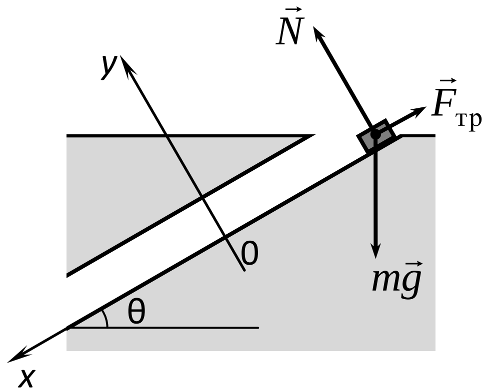


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. При каком значении коэффициента трения μ бруска по дну тоннеля брусок перестанет соскальзывать в тоннель, если его не удерживать? Ответ округлить до сотых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\,sin\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\,cos\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(sin\theta - \mu cos\theta).$$

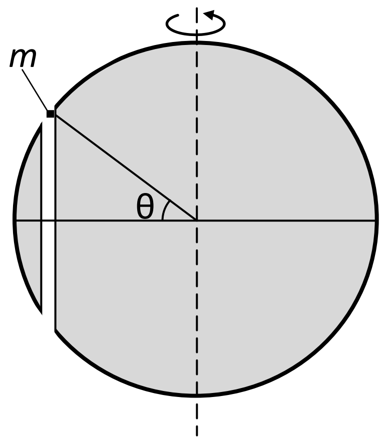
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$sin\theta - \mu cos\theta > 0 \;\Rightarrow\; sin\theta > \mu cos\theta.$$

Учитывая, что $0 < \theta < 90°$, получим отсюда: $\mu < tg\theta \approx 0{,}27$.

Ответ: 0,27.

Вариант 2.8. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ = 20° с.ш.

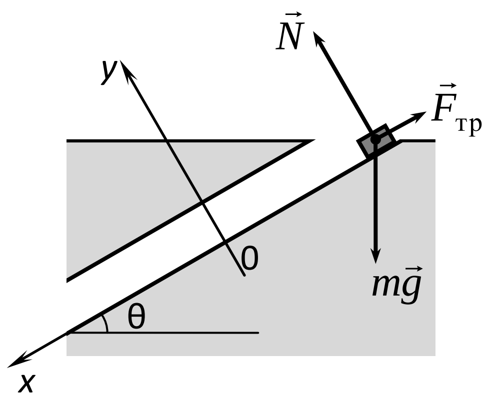


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. При каком значении коэффициента трения μ бруска по дну тоннеля брусок перестанет соскальзывать в тоннель, если его не удерживать? Ответ округлить до сотых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\,sin\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\,cos\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g\left(sin\theta - \mu cos\theta\right).$$

Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$sin\theta - \mu cos\theta > 0 \;\Rightarrow\; sin\theta > \mu cos\theta.$$

Учитывая, что $0 < \theta < 90°$, получим отсюда: $\mu < tg\theta \approx 0{,}36$.

Ответ: 0,36.

Задание 3

Вариант 3.1. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.

Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 3:5. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 30^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:

$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)} h = \frac{1}{2} a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2} tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин *BM:CM*=k:(1-k). Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.91.

Вариант 3.2. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.
Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 4:5. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 30^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.
Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,
$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:
$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)}h = \frac{1}{2}a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2}tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин *BM:CM*=k:(1-k). Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.85.

Вариант 3.3. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.
Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 3:4. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 30^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.
Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,
$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:
$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)}h = \frac{1}{2}a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2}tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин *BM:CM*=k:(1-k). Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.87.

Вариант 3.4. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.
Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 7:10. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 30^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.
Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2} a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,
$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:
$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)} h = \frac{1}{2} a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2} tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин *BM:CM*=k:(1-k). Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.88.

Вариант 3.5. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.
Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 3:5. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 45^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.
Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,
$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:
$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)}h = \frac{1}{2}a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2}tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}}$. Отсюда $CM=(1-k)a$ и искомое отношение объемов равно отношению длин $CM:BM$=(1-k):k. Подставляя данные задачи, получим
Ответ: 0.44.

Вариант 3.6. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.

Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 4:5. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 45^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:

$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)} h = \frac{1}{2} a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2} tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}}$. Отсюда $CM=(1-k)a$ и искомое отношение объемов равно отношению длин $CM:BM$=(1-k):k. Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.51.

Вариант 3.7. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.
Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 3:4. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 45^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.
Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h=\frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t=\frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,

$\cos y=\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y=\frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:

$BM=\frac{\sin x}{\sin(x+y)}h=\frac{1}{2}a\cdot tgx\cdot\frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}}=k\cdot a, k=\frac{1}{2}tgx\cdot\frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин С*M:BM*=(1-k):k. Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.49.

Вариант 3.8. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.
Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 7:10. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 45^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.
Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,
$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:
$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)}h = \frac{1}{2}a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2}tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин C*M:BM*=(1-k):k. Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.47.

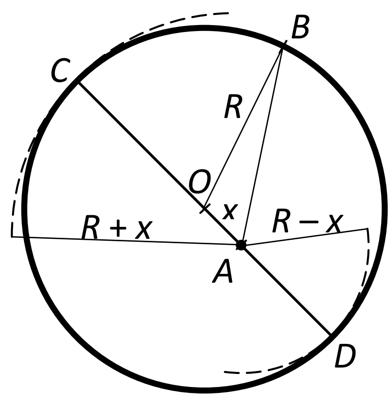
Задание 4

Вариант 4.1. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 30$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 6$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

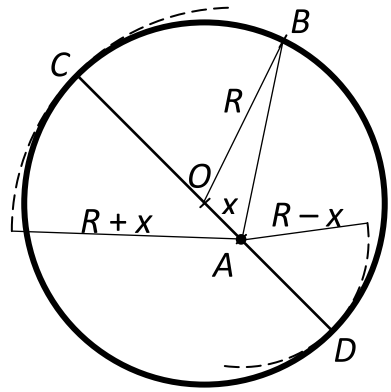
$R + x = (R - x)\sqrt{n}$ с решением $x = R\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 30 \cdot \dfrac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}+1} \approx 12{,}6$ см. **Ответ:** $x \approx 12{,}6$ см.

Вариант 4.2. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 20$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 6$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 20 \cdot \dfrac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}+1} \approx 8{,}4$ см.

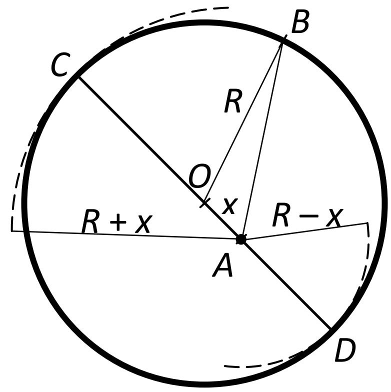
Ответ: $x \approx 8{,}4$ см.

Вариант 4.3. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 30$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 5$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \frac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 30 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \approx 11{,}5$ см.

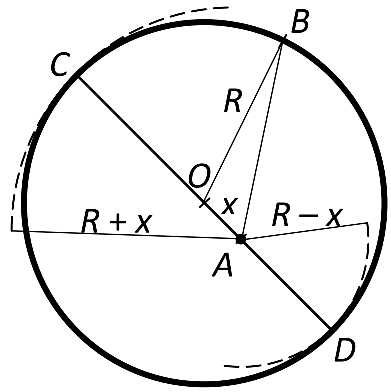
Ответ: $x \approx 11{,}5$ см.

Вариант 4.4. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 20$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 5$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \frac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 20 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \approx 7{,}6$ см.

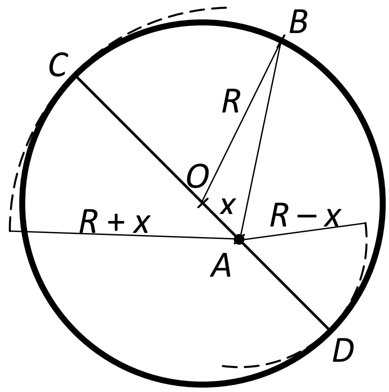
Ответ: $x \approx 7{,}6$ см.

Вариант 4.5. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 30$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 3$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 30 \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \approx 8{,}0$ см.

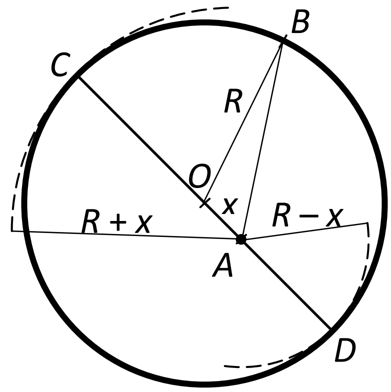
Ответ: $x \approx 8{,}0$ см.

Вариант 4.6. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 20$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 3$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \frac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \approx 5{,}4$ см.

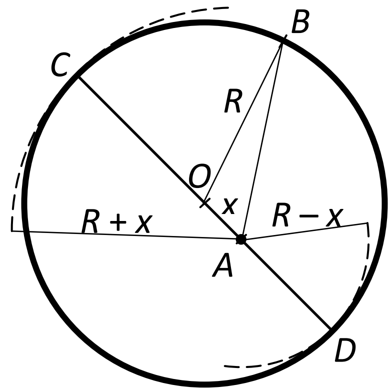
Ответ: $x \approx 5{,}4$ см.

Вариант 4.7. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 30$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 2$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \frac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \approx 5{,}1$ см.

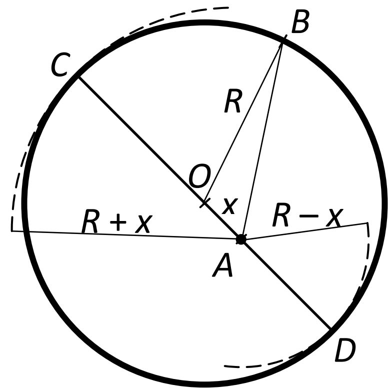
Ответ: $x \approx 5{,}1$ см.

Вариант 4.8. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 20$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 2$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \frac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \approx 3{,}4$ см.

Ответ: $x \approx 3{,}4$ см.

Тестовые задания для разминки 1-го тура:

1. Какая горная порода относится к классу магматических горных пород?
гранит
песчаник
известняк
мрамор

2. Какая горная порода относится к классу осадочных горных пород?
гранит
базальт
известняк
мрамор

3. Какая горная порода относится к классу метаморфических горных пород?
гранит
песчаник
известняк
мрамор

4. Из какой горной породы образуется мрамор?
глина
известняк
песчаник
гранит

5. Из какой горной породы образуется кварцит?
глина
известняк
песчаник
гранит

6. Из какой горной породы образуется аргиллит?
глина
известняк
песчаник
гранит

7. Из какой горной породы образуется гнейс?
глина
известняк
песчаник
гранит

8. Какая горная порода относится к хемогенным осадочным горным породам?
гранит

известняк
песчаник
<u>каменная соль</u>

9. Какая горная порода относится к органогенным осадочным горным породам?
гранит
<u>известняк</u>
песчаник
каменная соль

10. Какая горная порода относится к терригенным осадочным горным породам?
гранит
известняк
<u>песчаник</u>
каменная соль

11. Какая горная порода образовалась при застывании магмы в недрах Земной коры?
базальт
<u>гранит</u>
известняк
песчаник

12. Какая горная порода образовалась при застывании лавы на поверхности Земли?
<u>базальт</u>
гранит
известняк
песчаник

13. Какой минерал входит в состав гранита?
<u>кварц</u>
пирит
малахит
галит

14. Какого цвета базальт?
желтый
<u>темно-серый</u>
белый
красно-коричневый

15. Что является горной породой?
пирит
кварц
<u>гранит</u>
полевой шпат

16. Что является минералом?
гранит
базальт
известняк
<u>пирит</u>

17. Какой минерал наши предки вставляли в окна вместо стекла?
<u>мусковит</u>
каолинит
чароит
серпентинит

18. Какой минерал можно употреблять в пищу?
мусковит
каолинит
<u>галит</u>
серпентинит

19. Из какого минерала древние люди делали наконечники для копий и стрел?
галит
пирит
мусковит
<u>обсидиан</u>

20. Как называется процесс разрушения горной породы на поверхности Земли?
<u>выветривание</u>
магматизм
метаморфизм
вулканизм

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
2013-2014 учебный год

ЗАДАНИЯ 2-го ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ «ГЕОЛОГИЯ»
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задание 1

Вариант 1.1. Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 6000 ккал/т, второй марки – 5100 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1640 руб., а второй марки - 1500 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 6 млн ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1740 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

Решение. Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px + qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx + sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x = \dfrac{A - \frac{q}{s}B}{p - \frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px + qy = A, \\ rx + sy = B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=6000, q=5100, A=6000000, r=1640, s=1500, B=1740000, получим x=198.113, y=943.396226. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x=919.81, y=94.34. Это означает увеличение x на 721.7 т.

Ответ: 722

Вариант 1.2. Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 6100 ккал/т, второй марки – 5200 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1650 руб., а второй марки - 1490 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 5900 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1680 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 80 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

Решение. Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px+qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx+sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x=\dfrac{A-\frac{q}{s}B}{p-\frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px+qy=A, \\ rx+sy=B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=6100, q=5200, A=5900000, r=1650, s=1490, B=1680000, получим x=108.55, y=1007.86. Если значение B уменьшить на 80000, то координаты решения примут значения x=925.34, y=49.12. Это означает увеличение x на 817.3 т.

Ответ: 817

Вариант 1.3. Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 6200 ккал/т, второй марки – 5250 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1630 руб., а второй марки - 1500 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 6200 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1750 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

Решение. Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px + qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx + sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x = \dfrac{A - \frac{q}{s}B}{p - \frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px + qy = A, \\ rx + sy = B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=6200, q=5250, A=6200000, r=1630, s=1500, B=1750000, получим x= 151,515, y= 1002,. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x= 787,88, y= 250,5. Это означает увеличение x на 636.4 т.

Ответ: 636

Вариант 1.4. Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 5900 ккал/т, второй марки – 5000 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1500 руб., а второй марки - 1460 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 6200 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1700 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

Решение. Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px+qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx+sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x=\dfrac{A-\frac{q}{s}B}{p-\frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px+qy=A, \\ rx+sy=B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=5900, q=5000, A=6200000, r=1500, s=1460, B=1700000, получим x=495,5, y=655,3,. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x=899,46, y=178,64. Это означает увеличение x на 403,9 т.

Ответ: 404

Вариант 1.5. Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 5950 ккал/т, второй марки – 5100 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1550 руб., а второй марки - 1460 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 6100 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1700 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

Решение. Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px+qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx+sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x=\dfrac{A-\frac{q}{s}B}{p-\frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px+qy=A, \\ rx+sy=B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=5950, q=5100, A=6100000, r=1550, s=1460, B=1700000, получим x= 301,8, y= 844,. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x= 888,75, y= 159,2. Это означает увеличение x на 587 т.

Ответ: 587

Вариант 1.6. Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 5890 ккал/т, второй марки – 4900 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1600 руб., а второй марки - 1550 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 5700 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1650 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

Решение. Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px+qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx+sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x=\dfrac{A-\frac{q}{s}B}{p-\frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px+qy=A, \\ rx+sy=B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=5890, q=4900, A=5700000, r=1600, s=1550, B=1700000, получим x= 581,6, y= 464,. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x= 923,6, y= 53. Это означает увеличение x на 342 т.

Ответ: 342

Вариант 1.7. Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 6100 ккал/т, второй марки – 4900 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1620 руб., а второй марки - 1450 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 6000 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1700 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

Решение. Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px + qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx + sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x = \dfrac{A - \frac{q}{s}B}{p - \frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px + qy = A, \\ rx + sy = B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=6100, q=4900, A=6000000, r=1620, s=1450, B=1700000, получим x= 408, y= 716,6,. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x=894, y= 111. Это означает увеличение x на 486 т.

Ответ: 486

Вариант 1.8. Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 6200 ккал/т, второй марки – 5200 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1610 руб., а второй марки - 1460 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 6100 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1700 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

Решение. Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px+qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx+sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x=\dfrac{A-\frac{q}{s}B}{p-\frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px+qy=A, \\ rx+sy=B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=6200, q=5200, A=6100000, r=1610, s=1460, B=1700000, получим x= 97, y= 1057.. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x= 785, y=.237. Это означает увеличение x на 688 т.

Ответ: 688

Задание 2

Вариант 2.1. Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1 = 15\cdot 10^6$ Па и температуре $t_1 = 20\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2 = 5{,}5\cdot 10^6$ Па и температуре $t_2 = 10\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$. Найти относительную влажность φ_2 газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность $\varphi_1 = 100$ % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения $t_3 = -30\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2 = 10\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$ составляет $p_{\text{н}2} = 1227$ Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре $t_3 = -30\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$ составляет $p_{\text{н}3} = 38$ Па.

Решение

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении p_1 и температуре t_1) N_1 молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \dfrac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между N_1 и N_2 можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре t_1 значительно ниже 10^5 Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении p_2 и температуре t_2) тоже находится N_1 молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \dfrac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1}\cdot\dfrac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре t_3 значения $p_{\text{н}3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой t_3 в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,\text{пара}}$ определяется из равенства $\dfrac{p_{2\,\text{пара}}V_2}{T_2} = \dfrac{p_{\text{н}3}V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,\text{пара}} = p_{\text{н}3}\dfrac{T_2}{T_3}\cdot\dfrac{V_1}{V_2} = p_{\text{н}3}\dfrac{T_1}{T_3}\cdot\dfrac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \frac{p_{2\,\text{пара}}}{p_{\text{н}2}} = \frac{p_{\text{н}3}}{p_{\text{н}2}} \cdot \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \frac{38}{1227} \cdot \frac{293}{243} \cdot \frac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 1{,}4\,\%$.

Ответ: 1,4

Вариант 2.2. Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1 = 15\cdot10^6$ Па и температуре $t_1 = 20\ ^oC$, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2 = 5{,}5\cdot10^6$ Па и температуре $t_2 = 15\ ^oC$. Найти относительную влажность φ_2 газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность $\varphi_1 = 100$ % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения $t_3 = -30\ ^oC$. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2 = 15\ ^oC$ составляет $p_{н2} = 1705$ Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре $t_3 = -30\ ^oC$ составляет $p_{н3} = 38$ Па.

Решение

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении p_1 и температуре t_1) N_1 молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \dfrac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между N_1 и N_2 можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре t_1 значительно ниже 10^5 Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении p_2 и температуре t_2) тоже находится N_1 молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \dfrac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1} \cdot \dfrac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре t_3 значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой t_3 в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\dfrac{p_{2\,пара} V_2}{T_2} = \dfrac{p_{н3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3} \dfrac{T_2}{T_3} \cdot \dfrac{V_1}{V_2} = p_{н3} \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \dfrac{p_{2\,\text{пара}}}{p_{\text{н}2}} = \dfrac{p_{\text{н}3}}{p_{\text{н}2}} \cdot \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \dfrac{38}{1705} \cdot \dfrac{293}{243} \cdot \dfrac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 1{,}0\%$.

Ответ: 1,0

Вариант 2.3. Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1 = 15\cdot10^6$ Па и температуре $t_1 = 20\ ^\circ\text{C}$, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2 = 5{,}5\cdot10^6$ Па и температуре $t_2 = 10\ ^\circ\text{C}$. Найти относительную влажность φ_2 газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность $\varphi_1 = 100$ % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения $t_3 = -35\ ^\circ\text{C}$. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2 = 10\ ^\circ\text{C}$ составляет $p_{\text{н}2} = 1227$ Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре $t_3 = -35\ ^\circ\text{C}$ составляет $p_{\text{н}3} = 22{,}3$ Па.

Решение

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении p_1 и температуре t_1) N_1 молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \dfrac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между N_1 и N_2 можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре t_1 значительно ниже 10^5 Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении p_2 и температуре t_2) тоже находится N_1 молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \dfrac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1} \cdot \dfrac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре t_3 значения $p_{\text{н}3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой t_3 в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,\text{пара}}$ определяется из равенства $\dfrac{p_{2\,\text{пара}} V_2}{T_2} = \dfrac{p_{\text{н}3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,\text{пара}} = p_{\text{н}3} \dfrac{T_2}{T_3} \cdot \dfrac{V_1}{V_2} = p_{\text{н}3} \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \dfrac{p_{2\,\text{пара}}}{p_{\text{н}2}} = \dfrac{p_{\text{н}3}}{p_{\text{н}2}} \cdot \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \dfrac{22{,}3}{1227} \cdot \dfrac{293}{238} \cdot \dfrac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 0{,}8\,\%$.

Ответ: 0,8

Вариант 2.4. Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1 = 15 \cdot 10^6$ Па и температуре $t_1 = 20$ °C, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2 = 5{,}5 \cdot 10^6$ Па и температуре $t_2 = 15$ °C. Найти относительную влажность φ_2 газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность $\varphi_1 = 100$ % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения $t_3 = -35$ °C. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2 = 15$ °C составляет $p_{\text{н}2} = 1705$ Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре $t_3 = -35$ °C составляет $p_{\text{н}3} = 22{,}3$ Па.

Решение

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении p_1 и температуре t_1) N_1 молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \dfrac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между N_1 и N_2 можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре t_1 значительно ниже 10^5 Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении p_2 и температуре t_2) тоже находится N_1 молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \dfrac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы

пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1} \cdot \dfrac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре t_3 значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой t_3 в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\dfrac{p_{2\,пара} V_2}{T_2} = \dfrac{p_{н3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3} \dfrac{T_2}{T_3} \cdot \dfrac{V_1}{V_2} = p_{н3} \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \dfrac{p_{2\,пара}}{p_{н2}} = \dfrac{p_{н3}}{p_{н2}} \cdot \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \dfrac{22{,}3}{1705} \cdot \dfrac{293}{238} \cdot \dfrac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 0{,}6\,\%$.

Ответ: 0,6

Вариант 2.5. Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении p_1 = 15⋅10^6 Па и температуре t_1 = 50 °C, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении p_2 = 5,5⋅10^6 Па и температуре t_2 = 10 °C. Найти относительную влажность φ_2 газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность φ_1 = 100 % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения t_3 = –30 °C. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре t_2 = 10 °C составляет $p_{н2}$ = 1227 Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре t_3 = –30 °C составляет $p_{н3}$ = 38 Па.

Решение

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении p_1 и температуре t_1) N_1 молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \dfrac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между N_1 и N_2 можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре t_1 значительно ниже 10^5 Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно

меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении p_2 и температуре t_2) тоже находится N_1 молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \frac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре t_3 значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой t_3 в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\frac{p_{2\,пара} V_2}{T_2} = \frac{p_{н3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3} \frac{T_2}{T_3} \cdot \frac{V_1}{V_2} = p_{н3} \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \frac{p_{2\,пара}}{p_{н2}} = \frac{p_{н3}}{p_{н2}} \cdot \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \frac{38}{1227} \cdot \frac{323}{243} \cdot \frac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 1{,}5\%$.

Ответ: 1,5

Вариант 2.6. Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении p_1 = 15$\cdot$10^6 Па и температуре t_1 = 50 ^{o}C, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении p_2 = 5,5$\cdot$10^6 Па и температуре t_2 = 15 ^{o}C. Найти относительную влажность φ_2 газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность φ_1 = 100 % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения t_3 = –30 ^{o}C. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре t_2 = 15 ^{o}C составляет $p_{н2}$ = 1705 Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре t_3 = –30 ^{o}C составляет $p_{н3}$ = 38 Па.

Решение

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении p_1 и температуре t_1) N_1 молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем

$V_1 = \dfrac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между N_1 и N_2 можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре t_1 значительно ниже 10^5 Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении p_2 и температуре t_2) тоже находится N_1 молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \dfrac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1} \cdot \dfrac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре t_3 значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой t_3 в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\dfrac{p_{2\,пара} V_2}{T_2} = \dfrac{p_{н3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3} \dfrac{T_2}{T_3} \cdot \dfrac{V_1}{V_2} = p_{н3} \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \dfrac{p_{2\,пара}}{p_{н2}} = \dfrac{p_{н3}}{p_{н2}} \cdot \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \dfrac{38}{1705} \cdot \dfrac{323}{243} \cdot \dfrac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 1{,}1\%$.

Ответ: 1,1

Вариант 2.7. Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении p_1 = 15$\cdot$10^6 Па и температуре t_1 = 50 $^\circ$C, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении p_2 = 5,5$\cdot$10^6 Па и температуре t_2 = 10 $^\circ$C. Найти относительную влажность φ_2 газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность φ_1 = 100 % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения t_3 = –35 $^\circ$C. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре t_2 = 10 $^\circ$C составляет $p_{н2}$ = 1227 Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре t_3 = –35 $^\circ$C составляет $p_{н3}$ = 22,3 Па.

Решение

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении p_1 и температуре t_1) N_1 молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \frac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между N_1 и N_2 можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре t_1 значительно ниже 10^5 Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении p_2 и температуре t_2) тоже находится N_1 молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \frac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре t_3 значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой t_3 в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\frac{p_{2\,пара} V_2}{T_2} = \frac{p_{н3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3} \frac{T_2}{T_3} \cdot \frac{V_1}{V_2} = p_{н3} \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \frac{p_{2\,пара}}{p_{н2}} = \frac{p_{н3}}{p_{н2}} \cdot \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \frac{22{,}3}{1227} \cdot \frac{323}{238} \cdot \frac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 0{,}9\%$.

Ответ: 0,9

Вариант 2.8. Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1 = 15\square10^6$ Па и температуре $t_1 = 60\ ^oC$, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2 = 5{,}5\square10^6$ Па и температуре $t_2 = 15\ ^oC$. Найти относительную влажность φ_2 газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность φ_1 = 100 % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения t_3 = –35 °С. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре t_2 = 15 °С составляет $p_{н2}$ = 1705 Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре t_3 = –35 °С составляет $p_{н3}$ = 22,3 Па.

Решение

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении p_1 и температуре t_1) N_1 молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \dfrac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между N_1 и N_2 можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре t_1 значительно ниже 10^5 Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении p_2 и температуре t_2) тоже находится N_1 молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \dfrac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1} \cdot \dfrac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре t_3 значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой t_3 в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\dfrac{p_{2\,пара} V_2}{T_2} = \dfrac{p_{н3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3} \dfrac{T_2}{T_3} \cdot \dfrac{V_1}{V_2} = p_{н3} \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \dfrac{p_{2\,пара}}{p_{н2}} = \dfrac{p_{н3}}{p_{н2}} \cdot \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \dfrac{22{,}3}{1705} \cdot \dfrac{333}{238} \cdot \dfrac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 0{,}7\,\%$.

Ответ: 0,7

Задание 3

Вариант 3.1. Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 450 м, четыре стены которого наклонены под углом 61 градус к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 6 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 16 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 10 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение. Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка A_1B_1 находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, A_1B_1, A_2B_2 соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, C_1D_1, C_2D_2. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, SA_1B_1 и A_2B_2 подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1-k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V-k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR} = (1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b} ctg\beta - 2\frac{a}{b} \cdot \frac{co\,s\,\beta}{\sin(\beta - \alpha)})^3 \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}) \cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b} ctg\beta, q = 2\frac{a}{b} \frac{\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}, k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}) \Rightarrow$$

$$k_1 = k \cdot (1 - p)^3, k_2 = k \cdot (1 - p - q)^3$$

Теперь x= $\frac{1 - k_2}{1 - k_1} - 1 = \frac{1 - k(1 - p - q)^3}{1 - k(1 - p)^3} - 1$

Подставляя значения b=450 м, β=61 градусов, α= 10 градусов, h=16м, a= 6 м, получим

p=0.039, q=0.0166, k=0.7487, откуда следует x=0.10.

Ответ: 0.10.

Вариант 3.2. Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 800 м, четыре стены которого наклонены под углом 58 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 7 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 17 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 8 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение. Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка A_1B_1 находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, A_1B_1, A_2B_2 соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, C_1D_1, C_2D_2. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, SA_1B_1 и A_2B_2 подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1-k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V - k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN} \cdot \frac{SP}{SR} = (1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta) \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta)^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b} ctg\beta - 2\frac{a}{b} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)})^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b} ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \Rightarrow$$

$$k_1 = k \cdot (1-p)^3, k_2 = k \cdot (1-p-q)^3$$

Теперь x= $\frac{1-k_2}{1-k_1} - 1 = \frac{1-k(1-p-q)^3}{1-k(1-p)^3} - 1$

Подставляя значения b=800 м, β=58 градусов, α= 8 градусов, h=17 м, a= 7 м, получим

p=0.0266, q=0.0121, k=0.771, откуда следует x=0.09

Ответ: 0.09

Вариант 3.3. Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 700 м, четыре стены которого наклонены под углом 56 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 6 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 24 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 9 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение. Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка A_1B_1 находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, A_1B_1, A_2B_2 соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, C_1D_1, C_2D_2. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, SA_1B_1 и A_2B_2 подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1-k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V - k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR} = (1-2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta - 2\frac{a}{b}\cdot\frac{cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)})^3\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})\cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b}ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, k = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \Rightarrow$$

$$k_1 = k\cdot(1-p)^3, k_2 = k\cdot(1-p-q)^3$$

Теперь x= $\frac{1-k_2}{1-k_1}-1 = \frac{1-k(1-p-q)^3}{1-k(1-p)^3}-1$

Подставляя значения b=800 м, β=58 градусов, α= 9 градусов, h=24 м, a= 6 м, получим

p=0.04625, q=0.0131, k=0.729, откуда следует x=0.07

Ответ: 0.07

Вариант 3.4. Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 450 м, четыре стены которого наклонены под углом 50 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 6 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 22 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 4 градуса к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение. Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка A_1B_1 находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, A_1B_1, A_2B_2 соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, C_1D_1, C_2D_2. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, SA_1B_1 и A_2B_2 подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1 - k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V - k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR} = (1-2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta - 2\frac{a}{b}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)})^3\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})\cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b}ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, k = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \Rightarrow$$

$$k_1 = k\cdot(1-p)^3, k_2 = k\cdot(1-p-q)^3$$

Теперь x= $\frac{1-k_2}{1-k_1} - 1 = \frac{1-k(1-p-q)^3}{1-k(1-p)^3} - 1$

Подставляя значения b=450 м, β=50 градусов, α= 4 градуса, h=22 м, a= 6 м, получим

p=0.082, q=0.0238, k=0.84, откуда следует x=0.14

Ответ: 0.14

Вариант 3.5. Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 800 м, четыре стены которого наклонены под углом 50 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 8 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 20 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 6 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение. Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка A_1B_1 находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, A_1B_1, A_2B_2 соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, C_1D_1, C_2D_2. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, SA_1B_1 и A_2B_2 подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1-k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V - k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR} = (1-2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)^3\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b} ctg\beta - 2\frac{a}{b} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)})^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b} ctg\beta, q = 2\frac{a}{b} \frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \Rightarrow$$
$$k_1 = k \cdot (1-p)^3, k_2 = k \cdot (1-p-q)^3$$

Теперь x= $\frac{1-k_2}{1-k_1} - 1 = \frac{1-k(1-p-q)^3}{1-k(1-p)^3} - 1$

Подставляя значения b=800 м, β=50 градусов, α= 6 градусов, h=20 м, a= 8 м, получим

p=0.042, q=0.0185, k=0.77, откуда следует x=0.12

Ответ: 0.12

Вариант 3.6. Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 700 м, четыре стены которого наклонены под углом 48 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 11 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 21 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 5 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение. Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка A_1B_1 находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, A_1B_1, A_2B_2 соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, C_1D_1, C_2D_2. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, SA_1B_1 и A_2B_2 подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1-k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V - k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR} = (1-2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)^3\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b} ctg\beta - 2\frac{a}{b} \cdot \frac{co\,s\beta}{\sin(\beta-\alpha)})^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b} ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \Rightarrow$$
$$k_1 = k \cdot (1-p)^3, k_2 = k \cdot (1-p-q)^3$$

Теперь x= $\frac{1-k_2}{1-k_1} - 1 = \frac{1-k(1-p-q)^3}{1-k(1-p)^3} - 1$

Подставляя значения b=700 м, β=48 градусов, α= 5 градусов, h=21 м, a= 11 м, получим

p=0.054, q=0.0308, k=0.79, откуда следует x=0.19

Ответ: 0.19

Вариант 3.7. Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 800 м, четыре стены которого наклонены под углом 52 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 9 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 19 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 8 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение. Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка A_1B_1 находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, A_1B_1, A_2B_2 соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, C_1D_1, C_2D_2. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, SA_1B_1 и A_2B_2 подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1-k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V - k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR} = (1-2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)^3\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b} ctg\beta - 2\frac{a}{b} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)})^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b} ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \Rightarrow$$

$$k_1 = k \cdot (1-p)^3, k_2 = k \cdot (1-p-q)^3$$

Теперь x= $\frac{1-k_2}{1-k_1} - 1 = \frac{1-k(1-p-q)^3}{1-k(1-p)^3} - 1$

Подставляя значения b=800 м, β=52 градусов, α= 8 градусов, h=19 м, a= 9 м, получим

p=0.037, q=0.0199, k=0.72, откуда следует x=0.11

Ответ: 0.11

Вариант 3.8. Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 700 м, четыре стены которого наклонены под углом 55 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 6 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 20 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 8 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение. Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка A_1B_1 находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, A_1B_1, A_2B_2 соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, C_1D_1, C_2D_2. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, SA_1B_1 и A_2B_2 подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1 - k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V - k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR} = (1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}\cdot(1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta)^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b} ctg\beta - 2\frac{a}{b} \cdot \frac{cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)})^3 \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}) \cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b} ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}, k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}) \Rightarrow$$

$$k_1 = k \cdot (1 - p)^3, k_2 = k \cdot (1 - p - q)^3$$

Теперь x= $\frac{1 - k_2}{1 - k_1} - 1 = \frac{1 - k(1 - p - q)^3}{1 - k(1 - p)^3} - 1$

Подставляя значения b=700 м, β=55 градусов, α= 8 градуов, h=20 м, a= 6 м, получим

p=0.04, q=0.0134, k=0.747, откуда следует x=0.08

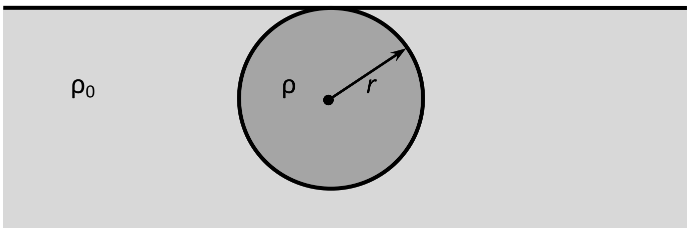
Ответ: 0.08

Задание 4

Вариант 4.1. Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.

Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на $\alpha = 0{,}01$ % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с^2. Оценить радиус r месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.

Средняя плотность рудного тела $\rho = 4800$ кг/м^3, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2300$ кг/м^3, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

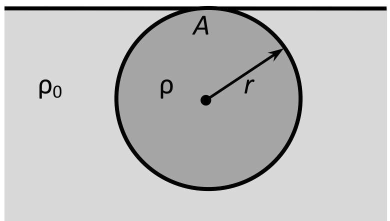


Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

Решение.

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1-\alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения g максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка A).



3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой m, помещенное в точку A, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного

притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой m действуют сила гравитационного притяжения со стороны шара плотностью $(\rho - \rho_0)$ и радиусом r и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для g/g_0 из пункта 1, получаем для r уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

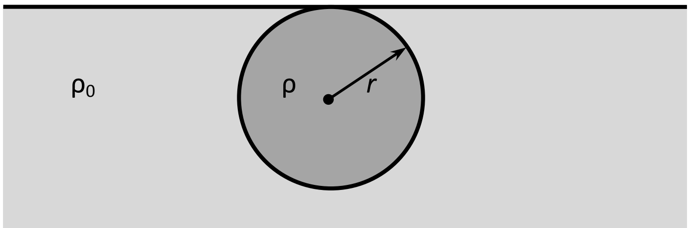
Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (4800 - 2300)} \approx 2800$ м.

Ответ: 2,8

Вариант 4.2. Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.

Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на $\alpha = 0{,}01$ % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с^2. Оценить радиус r месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.

Средняя плотность рудного тела $\rho = 3700$ кг/м^3, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2300$ кг/м^3, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

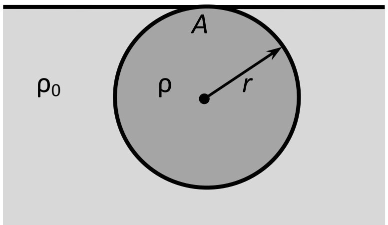


Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

Решение.

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1 - \alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения g максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка A).



3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой m, помещенное в точку A, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой m действуют сила

гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ($\rho - \rho_0$) и радиусом r и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для g/g_0 из пункта 1, получаем для r уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

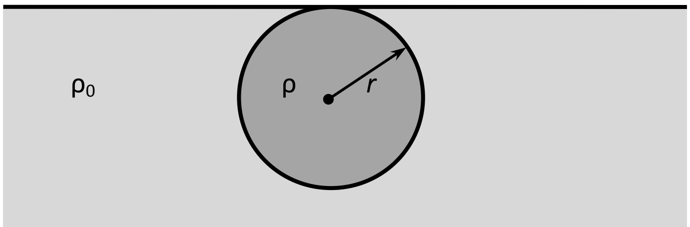
Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (3700 - 2300)} \approx 5000$ м.

Ответ: 5,0

Вариант 4.3. Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.

Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на α = 0,01 % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с^2. Оценить радиус r месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.

Средняя плотность рудного тела $\rho = 4800$ кг/м^3, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2700$ кг/м^3, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.



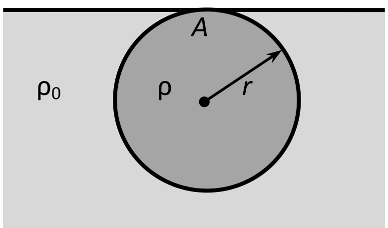
Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

Решение.

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1-\alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения g максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка A).

3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой m, помещенное в точку A, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой m действуют сила



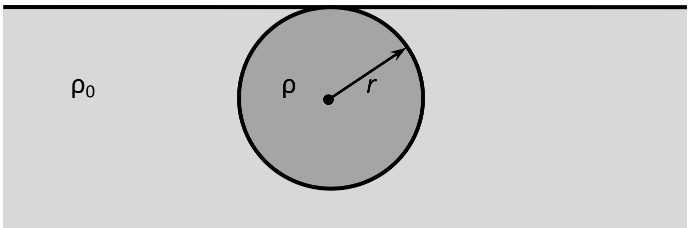
гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ($\rho - \rho_0$) и радиусом r и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для g/g_0 из пункта 1, получаем для r уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (4800 - 2700)} \approx 3300$ м.

Ответ: 3,3

Вариант 4.4. Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.
Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на α = 0,01 % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с^2. Оценить радиус r месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.

Средняя плотность рудного тела $\rho = 3700$ кг/м^3, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2500$ кг/м^3, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

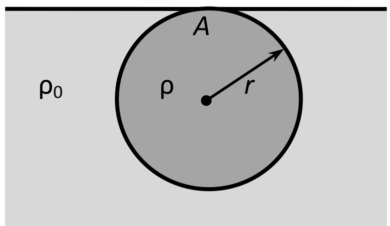


Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

Решение.

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1 - \alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения g максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка A).



3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой m, помещенное в точку A, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой m действуют сила

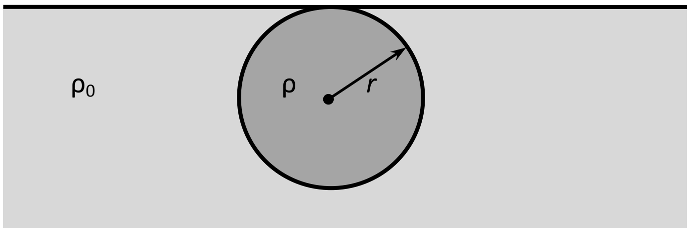
гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ($\rho - \rho_0$) и радиусом r и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для g/g_0 из пункта 1, получаем для r уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (3700 - 2500)} \approx 5800$ м.

Ответ: 5,8

Вариант 4.5. Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.

Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на α = 0,005 % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с^2. Оценить радиус r месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.



Средняя плотность рудного тела $\rho = 4800$ кг/м^3, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2300$ кг/м^3, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

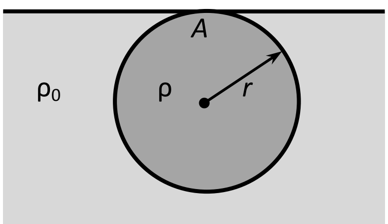
Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

Решение.

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1-\alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения g максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка A).

3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой m, помещенное в точку A, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой m действуют сила



гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ($\rho - \rho_0$) и радиусом r и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для g/g_0 из пункта 1, получаем для r уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

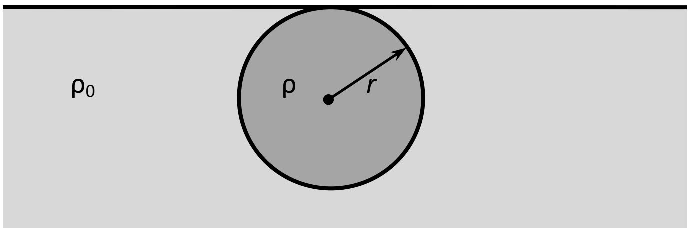
Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (4800 - 2300)} \approx 1400$ м.

Ответ: 1,4

Вариант 4.6. Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.

Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на $\alpha = 0{,}005$ % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с^2. Оценить радиус r месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.

Средняя плотность рудного тела $\rho = 3700$ кг/м^3, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2300$ кг/м^3, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.



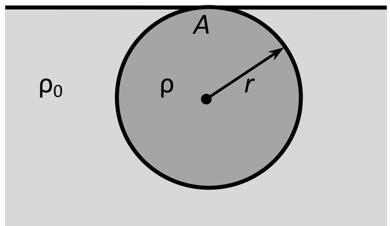
Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

Решение.

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1-\alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения g максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка A).

3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой m, помещенное в точку A, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой m действуют сила



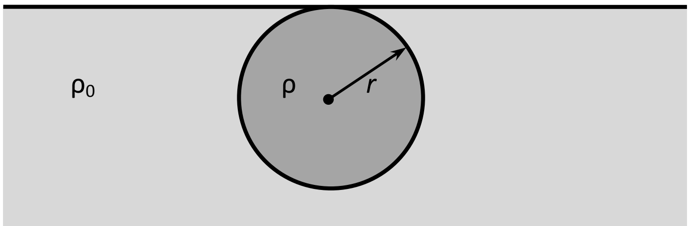
гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ($\rho - \rho_0$) и радиусом r и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для g/g_0 из пункта 1, получаем для r уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (3700 - 2300)} \approx 2500$ м.

Ответ: 2,5

Вариант 4.7. Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.

Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на $\alpha = 0{,}005$ % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с^2. Оценить радиус r месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.



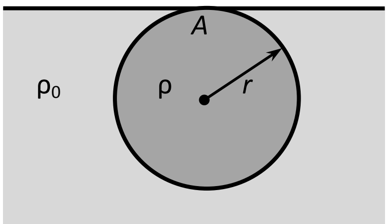
Средняя плотность рудного тела $\rho = 4800$ кг/м^3, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2700$ кг/м^3, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

Решение.

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1-\alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения g максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка A).



3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой m, помещенное в точку A, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой m действуют сила гравитационного притяжения со стороны

шара плотностью (ρ – ρ_0) и радиусом *r* и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho-\rho_0)}{3g_0}r$. Подставляя в последнее равенство выражение для g/g_0 из пункта 1, получаем для *r* уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho-\rho_0)}{3g_0}r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho-\rho_0)}\cdot\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

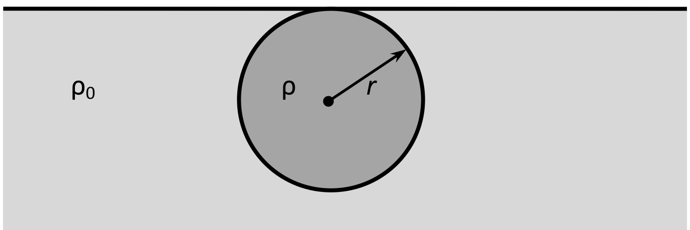
Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho-\rho_0)} = \frac{3\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5\cdot 10^{-4}}{2\cdot 3{,}14\cdot 6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot(4800-2700)} \approx 1700$ м.

Ответ: 1,7

Вариант 4.8. Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.

Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на $\alpha = 0{,}005$ % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с^2. Оценить радиус r месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.

Средняя плотность рудного тела $\rho = 3700$ кг/м^3, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2500$ кг/м^3, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

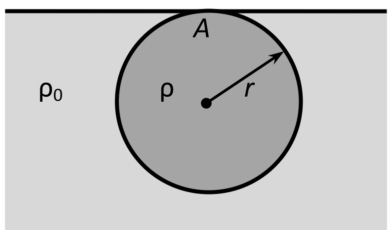


Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

Решение.

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1 - \alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения g максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка A).



3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой m, помещенное в точку A, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой m действуют сила

гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ($\rho - \rho_0$) и радиусом r и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для g/g_0 из пункта 1, получаем для r уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (3700 - 2500)} \approx 2900$ м.

Ответ: 2,9

Тестовые задания для разминки 2-го тура:

1. На какую максимальную глубину удалось исследовать Землю с помощью бурения?
15 км
100 км
2 км

2. Из каких трех основных частей состоит Земной шар?
земная кора, литосфера, астеносфера
ядро, мантия, земная кора
ядро, литосфера, земная кора

3. Какую часть объема Земного шара занимает мантия?
1/10
1/2
5/6

4. Какие температуры характерны для ядра Земли?
2000^0C - 5000^0C
500^0C - 700^0C
-70^0C

5. Что такое литосфера?
верхняя часть земной коры
верхняя твердая оболочка Земли
нижняя часть земной коры

6. Как различаются по толщине континентальная и океаническая кора?
континентальная кора толще
океаническая кора толще
оба типа коры имеют одинаковую мощность

7. Сколько основных слоев имеет континентальная кора?
два: осадочный и базальтовый
один: гранитный
три: осадочный, гранитный и базальтовый

8. Сколько основных слоев имеет океаническая кора?
два: осадочный и базальтовый
один: гранитный
три: осадочный, гранитный и базальтовый

9. В каком районе на поверхности Земли пробурена самая глубокая скважина?
Кольский полуостров
полуостров Камчатка
Аппенинский полуостров

10. У какого европейского государства 1/3 территории находится ниже уровня моря?
Польша
<u>Нидерланды</u>
Финляндия

11. Чем отличается щебень от гравия?
<u>степенью окатанности обломочного материала</u>
размерами частиц
минеральным составом

12. Где расположен вулкан Котопахи?
Гавайские острова
Мексика
<u>Эквадор</u>

13. Где расположен вулкан Орисаба?
Гавайские острова
<u>Мексика</u>
Япония

14. Где расположен вулкан Кракатау?
<u>Индонезия</u>
Мексика
Гавайские острова

15. Где расположен вулкан Гекла?
<u>Исландия</u>
Италия
Мексика

16. Где расположен вулкан Этна?
остров Огненная Земля
остров Мадагаскар
<u>остров Сицилия</u>

17. Назовите самую протяженную горную систему на Земле
<u>Анды</u>
Уральские горы
Памир

18. Назовите самую протяженную горную систему в России
<u>Уральские горы</u>
Кавказ
Алтай

19. К какому типу осадочных горных пород относится яшма?
хемогенные осадочные горные породы
обломочные осадочные горные породы
<u>кремнистые осадочные горные породы</u>

20. В каких горных породах под действием подземных вод часто образуются пещеры?
<u>известняки</u>
песчаники
базальты

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2014-2015 учебный год

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5-9 КЛАССОВ

Задание 1.
На угольном месторождении содержание метана *y* (в кубических метрах на тонну угля) в угольном пласте увеличивается при возрастании глубины залегания *h*, измеряемой в метрах, $150 \le h \le 2000$, по закону $y(h) = \frac{1}{2}\sqrt{3h}$, а содержание азота z (также в кубических метрах на тонну угля) уменьшается по закону $z(h) = \frac{4500}{h}$. На какой глубине (в метрах) уровень содержания метана равен уровню содержания азота?

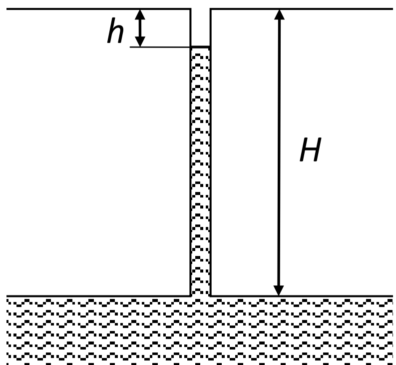
Решение.

По условию задачи следует решить уравнение *y(h)=z(h)* отнсительно *h*, т.е. $\frac{1}{2}\sqrt{3h} = \frac{4500}{h}$. Поскольку правая часть данного уравнения убывает с ростом глубины *h*, а левая часть наоборот возрастает, то данное уравнение имеет единственный корень, который легко подобрать, именно, подстановка *h*=300 дает совпадение правой и левой частей уравнения.

Ответ: 300 м.

Задание 2.

Нефтяной пласт залегает на глубине $H = 1000$ м от поверхности Земли. Уровень нефти в скважине, пробуренной к пласту, находится на $h = 100$ м ниже поверхности Земли (см. рис.). Какое давление (в паскалях) покажет манометр, находящийся в нефти у основания скважины? Плотность нефти $\rho = 850$ кг/м^3, атмосферное давление p_0 = 0,1 МПа. Считать g = 10 м/с^2.



Решение. Давление в покоящейся жидкости

$$p = p_0 + \rho g(H - h) = 10^5 + 850 \cdot 10 \cdot 900 = 77{,}5 \cdot 10^5 \text{Па}.$$

Ответ: $p = 77{,}5 \cdot 10^5$ Па.

Задание 3.
Геотермический градиент - величина, на которую повышается температура горных пород с увеличением глубины залегания на каждые 100 метров. Известно, что на поверхности

величина геотермического градиента равна 3.5, а температура породы 5 градусов по Цельсию, при увеличении глубины на каждые 100 метров геотермический градиент возрастает на 0.5 градусов. Чему равна температура породы на глубине 1500 м (в градусах по Цельсию)?

Решение.

По условию задачи на глубине 100 м температура породы равна 5+3.5=8.5 (градусов по Цельсию), на глубине 200 м 8.5+4=12.5(градусов по Цельсию),…, на глубине 1500 м температура равна 5+3.5+4+…+10.5=110 (градусов по Цельсию).

Ответ:110.

Задание 4.

Образец горной породы в виде сплошного цилиндра массой M = 15 кг и объемом V = 5 л состоит из железной руды плотностью ρ_1 = 4000 кг/м^3 и пустой породы плотностью ρ_2 = 1500 кг/м^3. Какую долю k объема этого образца занимает железная руда? Ответ в виде десятичной дроби округлить до десятых.

Решение. Пусть объем руды равен V_1, а объем пустой породы равен V_2. Тогда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} M = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2, \\ V = V_1 + V_2. \end{cases}$$

Представив $V_2 = V - V_1$, сведем эту систему к одному уравнению

$$M = \rho_1 V_1 + \rho_2 (V - V_1)$$

с решением

$$V_1 = \frac{M - \rho_2 V}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Тогда $k = \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\frac{M}{V} - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \dfrac{\frac{15}{5 \cdot 10^{-3}} - 1500}{4000 - 1500} = \dfrac{1500}{2500} = 0{,}6.$

Ответ: $k = 0{,}6$.

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2014-2015 учебный год

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

2015 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (10-11 классы)

Вариант 1

Задание 1.

Вязкость добываемой нефти является одной из основных характеристик добываемой в России тяжелой нефти. Изучение свойств образцов тяжелой нефти позволяет сделать вывод, что вязкость такой нефти, $\rho=\rho(h)$ является функцией глубины залегания h. При этом структура зависимости вязкости от глубины залегания различна в разных месторождениях. Часто эту зависимость принимают как полиномиальную в определенных пределах глубин. В предлагаемой ниже задаче указанная зависимость имеет несколько иной характер.

Вязкость ρ тяжелой нефти (в мм^3/с) на глубине h в пределах интервала от 2500 до 4000 м выражается через глубину залегания h как $\rho(h) = 12.25 + \dfrac{18750}{h-1500}$, при этом функция $f(h) = \rho(h+2500) - 31$ нечетна при изменении h на промежутке [-1000,1000]. В каких пределах изменяется вязкость тяжелой нефти при изменении глубины залегания от 1500 до 2250 м?

Решение.

Значение вязкости на глубине 2500 м равно $\rho(2500)$=12.25+18750/1500=31. Следовательно, для функции $f(h)$ справедливо равенство $f(0)$=0. График функции $f(h)$ получается из графика $\rho(h)$ параллельным сдвигом на вектор (2500,31). Следовательно, значение $\rho(1500) - \rho(2500) = \rho(2500) - \rho(3500) \Rightarrow \rho(1500)$=62-21.625=40.375, аналогично $\rho(2250) - \rho(2500) = \rho(2500) - \rho(2750) \Rightarrow \rho(2250)$=62-27.25=34.75

Ответ: От 34.75 до 40.375 (мм^3/с)

Задание 2.

Под пористостью породы понимается отношение объема пор (или объема воздушных зазоров между частицами вещества породы) ко всему объему образца.
Пористость сухого кварцевого песка, полностью заполняющего тонкостенный стакан, равна α = 15%. Взвешивание стакана с песком в воздухе дает значение веса P_1 = 3,6 Н, а взвешивание того же стакана в воде дает значение веса P_2 = 1,9 Н. При взвешивании в воде стакан полностью погружен в воду и намокает весь песок в стакане. Какова емкость стакана V (в литрах)? Объемом стекла, из которого сделан стакан, пренебречь по сравнению с его емкостью. Плотность воды ρ_0 = 1000 кг/м^3.

Решение

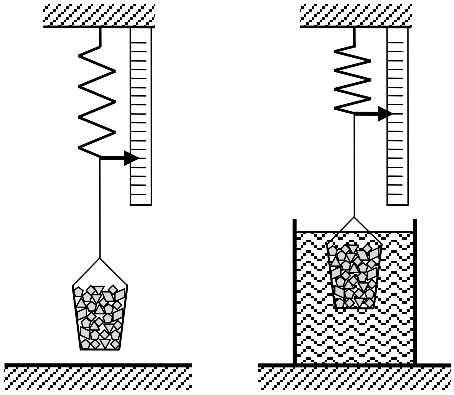
Введем обозначения:

m – масса сухого песка, полностью заполняющего стакан;

m_0 – масса пустого стакана;

V_0 – объем стекла, из которого сделан стакан;

V_1 – объем песка, когда он находится в воде и весь намок (то есть суммарный объем песчинок, а объем зазоров между песчинками сюда уже не входит).

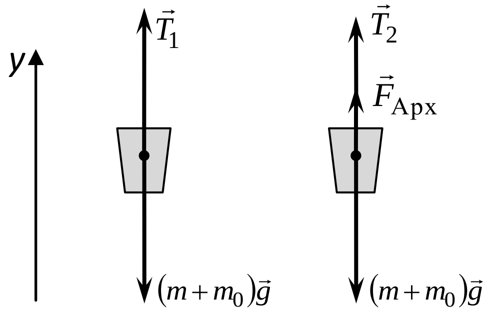


Взвешивание стакана с песком в данном случае означает, что мы измеряем силу $\vec{P}$, с которой стакан с песком растягивает пружину динамометра (см. рисунок). Величина этой силы и есть значение веса, упоминаемое в условии. (Замечание: но не сам вес тела – при взвешивании в воде вес тела распределяется между двумя опорами – динамометром и водой – и в сумме остается прежним.)

При первом взвешивании сила $\vec{T}_1$ со стороны динамометра уравновешивает силу тяжести, действующую на стакан с песком. В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, запишем второй закон Ньютона для этого тела в проекциях на вертикальную ось y:

$$T_1 - (m + m_0)g = 0.$$

По третьему закону Ньютона $\vec{T}_1 = -\vec{P}_1$, поэтому $T_1 = P_1$.



При втором взвешивании в баланс сил, действующих на стакан с песком, входит сила Архимеда со стороны воды, и поэтому сила со стороны динамометра равна теперь $\vec{T}_2$. Вновь запишем второй закон Ньютона для стакана с песком в проекциях на вертикальную ось y:

$$T_2 + F_{\text{Арх}} - (m + m_0)g = 0.$$

Здесь $F_{\text{Арх}} = \rho_0 g (V_1 + V_0)$ – величина силы Архимеда, действующей на стакан с песком. По третьему закону Ньютона $\vec{T}_2 = -\vec{P}_2$, поэтому $T_2 = P_2$.

В результате получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} P_1 - (m + m_0)g = 0, \\ P_2 + \rho_0 g (V_1 + V_0) - (m + m_0)g = 0. \end{cases}$$

Вычтем почленно второе уравнение из первого и получим:

$$P_1 - P_2 = \rho_0 g (V_1 + V_0).$$

Отсюда

$$V_1 = \frac{P_1 - P_2}{\rho_0 g} - V_0.$$

Тогда из определения пористости α, данного в условии задачи, получаем в нашем случае для песка

$$\alpha = \frac{V - V_1}{V} = 1 - \frac{V_1}{V} = 1 - \frac{P_1 - P_2}{\rho_0 g V} + \frac{V_0}{V}.$$

По условию, отношением $\dfrac{V_0}{V}$ надо пренебречь. Поэтому окончательно

$$\alpha = 1 - \frac{P_1 - P_2}{\rho_0 g V}.$$

Отсюда $V = \frac{P_1 - P_2}{(1-\alpha)\rho_0 g}$. Подставляя числовые данные, получим

$$V = \frac{3{,}6 - 1{,}9}{(1-0{,}15)\cdot 10^3 \cdot 10} = 2\cdot 10^{-4}\ \text{м}^3 = 0{,}2\ \text{л}.$$

Ответ: $V = \frac{P_1 - P_2}{(1-\alpha)\rho_0 g} = 0{,}2$ л.

Задание 3.

При изучении оптических свойств кристалла рассматривают различные сечения. Кристалл представляет собой правильную треугольную пирамиду, в которой длина стороны основания равна $\sqrt{3}$, длина бокового ребра равна $\sqrt{22}$. Плоскость сечения кристалла проходит через боковое ребро, пересекает противоположную к этому ребру сторону основания в отношении 2:1. Чему равен тангенс угла наклона этой плоскости к плоскости основания?

Решение.

Пусть в правильной треугольной пирамиде SABC с вершиной S длина стороны основания равна a, длина бокового ребра равна b. Плоскость сечения по условию проходит через боковое ребро SA и пересекает сторону основания BC в точке M, при этом если D – середина BC, то $BM = k\cdot a, k \in (\frac{1}{2}, 1)$ и $DM = (k-0.5)a, S_{\Delta ADM} = (k-0.5)S,$ где S – площадь треугольника ABC, $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Отсюда

$S_{\Delta ADM} = (k-0.5)S = \frac{\sqrt{3}}{4}(k-0.5)\cdot a^2 = \frac{1}{2}\cdot AM \cdot DK$, где K – основание перпендикуляра, опущенного из D на AM. При этом $AM = a\cdot\sqrt{\frac{3}{4} + (k-0.5)^2}$. Отсюда

$DK = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}(k-0.5)}{\sqrt{\frac{3}{4} + (k-05)^2}}$. Далее, пусть O – центр правильного треугольника ABC, H – основание перпендикуляра, опущенного из O на AM, тогда $OH = \frac{2}{3}DK$ =

$\frac{a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}(k-0.5)}{\sqrt{\frac{3}{4} + (k-05)^2}}$. Высота SO равна $\sqrt{b^2 - a^2/3}$. Искомый тангенс угла SHO равен отношению $\frac{OS}{OH}=\sqrt{3}\frac{\sqrt{b^2-a^2/3}}{a}\cdot\frac{\sqrt{\frac{3}{4}+(k-0.5)^2}}{(k-0.5)}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(\frac{b}{a})^2-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(k-0.5)^2}+1}$.

Подставляя значения a,b, получим $tg\angle SHO = 14\sqrt{3}$.

Ответ: $14\sqrt{3}$

Задание 4.

В каменноугольной шахте произошел выброс метана. Масса метана, попавшего в шахту, m = 60 кг. Каково процентное содержание α метана в воздухе шахты в результате выброса, если температура воздуха в шахте t = 32 °C, объем шахты V = 3000 м^3, а атмосферное давление в шахте остается неизменным и равно $p_0 = 10^5$ Па? Концентрацию метана в шахте до выброса считать пренебрежимо малой. Молярная масса метана равна μ = 16 г/моль, значение универсальной газовой постоянной R = 8,31 Дж/(моль·К).

Решение

Обозначим количество вещества воздуха в шахте после выброса через ν. Воздух в шахте описываем уравнением Клапейрона – Менделеева: $p_0V=\nu RT$. Отсюда

$$\nu=\frac{p_0V}{RT}.$$

До выброса, по условию задачи, концентрация метана в шахте пренебрежимо мала, поэтому количество вещества метана в шахте после выброса определяется только массой метана в выбросе: $\nu_{\text{м}}=\frac{m}{\mu}$. Процентное содержание α метана в воздухе шахты в результате выброса

$$\alpha=\frac{\nu_{\text{м}}}{\nu}=\frac{m}{\mu}\cdot\frac{RT}{p_0V}.$$

Подставляя числовые данные, получим

$$\alpha=\frac{m}{\mu}\cdot\frac{RT}{p_0V}=\frac{60\cdot 8{,}31\cdot 305}{16\cdot 10^{-3}\cdot 10^5\cdot 3000}\approx 0{,}03.$$

Ответ: $\alpha=\frac{m}{\mu}\cdot\frac{RT}{p_0V}\approx 3\%$.

Задание 5.

При геологоразведочных работах на месторождении бурят несколько видов скважин. В процессе бурения часть интервалов бурения проходится с отбором керна (полной или частичной). Бурение с отбором керна требует больше времени.

Скважины на участке бурения имеют одинаковую глубину и разбиты на две категории: к первой отнесены 15 скважин, ко второй 25. Категории скважин различаются процентом отбора керна от глубины, для скважин первого типа он составляет 95%. Если две скважины из первой категории перевести во вторую, то в целом по участку отбор керна уменьшится на 4%. Чему равен процент отбора керна во второй категории скважин?

Решение.

Обозначим через x_i число скважин типа i через p_i долю керна, приходящуюся на единицу глубины в скважине типа i, i=1,2; через а долю керна по участку в целом. Тогда эта доля составляет $\frac{p_1x_1 + p_2x_2}{x_1 + x_2} = a$. По условию задачи имеем равенство $\frac{p_1x_1 + p_2x_2}{x_1 + x_2} - \frac{p_1(x_1 - 2) + p_2(x_2 + 2)}{x_1 + x_2} = 0.04$, из которого $p_1 - p_2$ = $p_1 - p_2 = 0.04(x_1 + x_2)/2 = 0.8$, откуда следует $p_2 = 0.15$.

Ответ: 15%.

Задание 6.

Исследование магнитного поля Земли является одним из важнейших методов геологоразведки.

Для измерения величины $B_{гор}$ горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли имеется переносное устройство в виде горизонтальной дощечки, закрепленной на оси кольцевого проводника из меди (см. рисунок 1). На дощечке в плоскости проводника смонтирован маленький магнитный компас. Пока цепь проводника разомкнута, дощечку с проводником и компасом поворачивают в горизонтальной плоскости так, чтобы стрелка компаса указывала на проводник (см. рисунок 2, вид сверху). Найдя это положение, по проводнику пропускают постоянный ток I и измеряют угол φ отклонения стрелки компаса от первоначального положения (см. рисунок 3, вид сверху).

Величина индукции B_0 магнитного поля, создаваемого в центре данного кольцевого проводника с током, прямо пропорциональна силе тока I в проводнике: $B_0 = kI$, где k – некоторая постоянная.

Найдите $B_{гор}$, если $k = 1{,}25\cdot10^{-5}$ Тл/А, $I = 4$ А, φ = 30°.

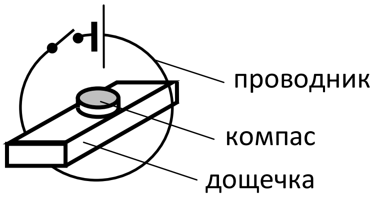


Рис. 1

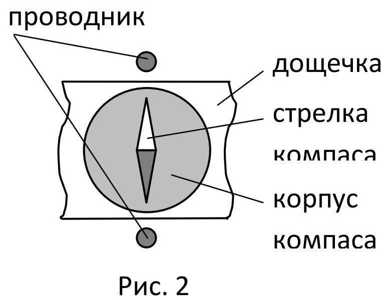


Рис. 2

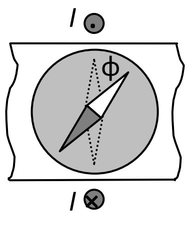


Рис. 3

Решение

1. Как известно, стрелка компаса, расположенного горизонтально, устанавливается по направлению горизонтальной составляющей вектора индукции магнитного поля, действующего на компас. (Иными словами, магнитное поле оказывает на стрелку компаса ориентирующее воздействие.)

2. Пока цепь проводника разомкнута и тока в ней нет, магнитное поле проводника практически отсутствует. Поэтому на стрелку действует только магнитное поле Земли.

(Важно, что проводник изготовлен из меди, к которой, в отличие от железа, стрелка компаса не притягивается.) В результате стрелка устанавливается по направлению вектора $\vec{B}_{\text{гор}}$ – горизонтальной составляющей вектора индукции магнитного поля Земли, а исследователь поворачивает дощечку так, чтобы стрелка при этом указывала на проводник (см. рисунок 2 в условии).

3. Сохраняя устройство в этом положении, замыкают электрическую цепь проводника. Магнитное поле проводника с током напоминает магнитное поле короткого полосового магнита. Для нас важно то, что в плоскости проводника внутри кольца в любой точке, в том числе и в центре кольца, вектор $\vec{B}$ этого поля перпендикулярен плоскости кольца (см. рисунок 1).

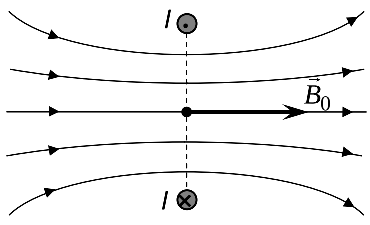


Рис. 1

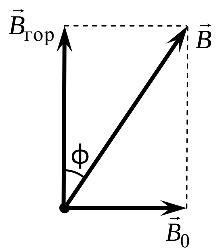


Рис. 2

4. Таким образом, в центре кольца в горизонтальной плоскости лежит вектор $\vec{B} = \vec{B}_{\text{гор}} + \vec{B}_0$ (см. рисунок 2). По этому вектору устанавливается стрелка компаса при наличии тока в проводнике. Из рисунка 2 видно, что угол φ между новым и первоначальным направлениями стрелки есть угол между векторами $\vec{B}_{\text{гор}}$ и $\vec{B}$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{B_0}{B_{\text{гор}}} = \dfrac{kI}{B_{\text{гор}}}$, откуда $B_{\text{гор}} = kI \cdot \operatorname{ctg}\varphi$.

Подставляя числовые данные, получим

$$B_{\text{гор}} = kI \cdot \operatorname{ctg}\varphi = 1{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-5}\,\text{Тл}.$$

Ответ: $B_{\text{гор}} = kI \cdot \operatorname{ctg}\varphi \approx 8{,}7 \cdot 10^{-5}\,\text{Тл}$.

2015 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Ответы на задания заключительного этапа (10-11 классы)

Номер задания	**Ответ**	
	Вариант 1.	**Вариант 2.**
Задание 1.	от 34.75 до 40.375 ($мм^3/с$)	от 32.25 до 35.25 ($мм^3/с$)
Задание 2.	0,2 л	0,25 л
Задание 3.	$14\sqrt{3}$	$13\sqrt{3}$
Задание 4.	3%	5%
Задание 5.	15%	50%
Задание 6.	$8.7 \cdot 10^{-5}$ Тл	$6.5 \cdot 10^{-5}$ Тл

Критерии оценки решений

Критерии оценки	**Баллы**					
	Задание 1	**Задание 2**	**Задание 3**	**Задание 4**	**Задание 5**	**Задание 6**
Задание выполнено правильно: ответ верен, в работе есть полное обоснование полученного ответа	15	15	25	15	15	15
Задание выполнено с небольшими недочетами: - арифметическая ошибка на завершающем этапе при полностью правильном алгоритме решения, что повлекло за собой неверный ответ; - правильный ответ при недостаточно полном обосновании, как он получен.	10	10	15	10	10	10

Задание выполнено с существенными недочетами: решение было начато правильно, но не доведено до ответа из-за принципиальной ошибки в рассуждениях.	5	5	5	5	5	5
Задание не выполнено: - решение с самого начала велось неверным путем; - отсутствие решения в работе.	0	0	0	0	0	0

2015 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (5-9 классы)

Задание 1.

Некоторые химические элементы находятся в земной коре в рассеянном виде. При этом выявлена закономерность их повышенных концентраций в угле. Некоторые элементы накапливаются непосредственно органическим веществом угольных пластов, а другие концентрируются на границе угольного пласта и вмещающих горных пород.

В угольном пласте, толщиной 2 м в зависимости от расстояния h до середины пласта, скандий имеет концентрацию, равную $20(h-1)^2$, а концентрация германия выражается через h как $400h(2-h)$. В пределах каких значений h концентрация скандия не меньше 5 (г/т), и в то же время концентрация германия не меньше 300 (г/т)?

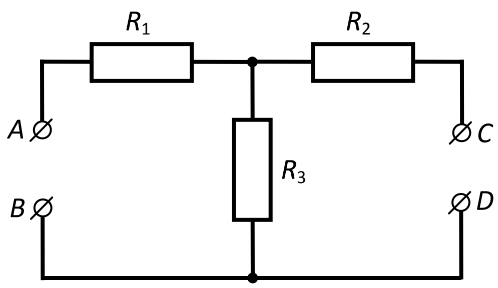
Решение.

Для скандия задача сводится к решению неравенства $20(h-1)^2 \geq 5$. Это неравенство перепишем в виде $(h-1)^2 \geq \frac{1}{4}$, что эквивалентно $|h-1| \geq \frac{1}{2}$. Это означает, что необходимая в условии задачи доля скандия находится на расстоянии, не меньшем $\frac{1}{2}$ м от середины пласта. Для германия необходимое расстояние h соответствует неравенству $400h(2-h) \geq 300$, из которого $h^2 - 2h + \frac{3}{4} \leq 0 \Leftrightarrow |h-1| \leq \frac{1}{2}$. Это означает, что необходимая в условии задачи доля скандия находится на расстоянии, не большем $\frac{1}{2}$ м от середины пласта.

Ответ: на расстоянии $\frac{1}{2}$ м от середины пласта

Задание 2.

1. В геологических исследованиях применяются разнообразные электронные приборы.
На рисунке показана схема участка электрической цепи такого прибора. Если между точками A и B приложено напряжение U, то напряжение между точками C и D равно $U_1 = 0,5U$. Если то же самое напряжение U приложено между точками C и D, то напряжение между точками A и B равно $U_2 = 0,2U$.
Найдите отношение сопротивлений резисторов R_2/R_1.



Решение.

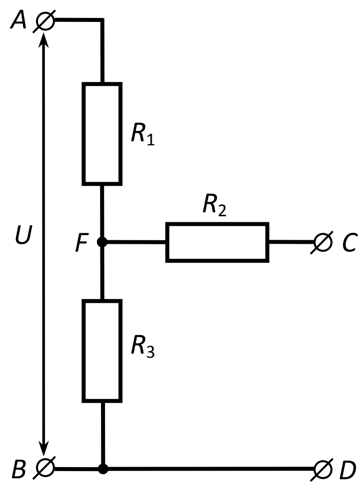


Рис. 1

Когда между точками A и B приложено напряжение U (см. рисунок 1), через резисторы R_1 и R_3 течет постоянный ток. Цепь резистора R_2 при этом незамкнута, поэтому ток I через резистор R_2 равен нулю. Тогда по закону Ома для участка цепи напряжение между точками C и F $U_{CF} = IR_2 = 0$.

Поскольку ток через резистор R_2 равен нулю, через резисторы R_1 и R_3 течет один и тот же ток $I_1 = \dfrac{U}{R_1 + R_3}$.

Благодаря этому напряжение на резисторе R_3 равно $U_{FD} = I_1 R_3 = U\dfrac{R_3}{R_1 + R_3}$.

Напряжение между точками C и D $U_{CD} = U_{CF} + U_{FD} = U\dfrac{R_3}{R_1 + R_3}$. С другой стороны, по условию задачи $U_{CD} = U_1 = 0{,}5U$. Отсюда следует уравнение $\dfrac{R_3}{R_1 + R_3} = 0{,}5$ с решением $R_1 = R_3$.

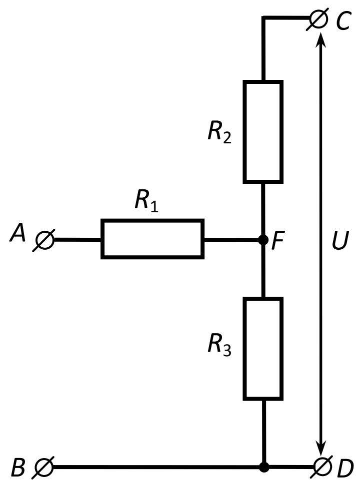


Рис. 2

Пусть теперь напряжение U приложено между точками C и D (см. рисунок 2). Через резисторы R_2 и R_3 течет постоянный ток. Цепь резистора R_1 при этом незамкнута, поэтому ток I через резистор R_1 равен нулю. Тогда по закону Ома для участка цепи напряжение между точками A и F $U_{AF} = IR_1 = 0$.

Поскольку ток через резистор R_1 равен нулю, через резисторы R_2 и R_3 течет один и тот же ток $I_2 = \dfrac{U}{R_2 + R_3}$.

Благодаря этому напряжение на резисторе R_3 равно $U_{FB} = I_2 R_3 = U\dfrac{R_3}{R_2 + R_3}$.

Напряжение между точками A и B $U_{AB} = U_{AF} + U_{FB} = U\dfrac{R_3}{R_2 + R_3}$. С другой стороны, по условию задачи $U_{AB} = U_2 = 0{,}2U$. Отсюда следует уравнение $\dfrac{R_3}{R_2 + R_3} = 0{,}2$ с решением $R_2 = 4R_3$.

В результате имеем: $\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{4R_3}{R_3} = 4$.

Ответ: $\dfrac{R_2}{R_1} = 4$.

Задание 3.

При проектировании инженерно-геологических сооружений необходимо учитывать возможные сдвиги грунтов. С этой проблемой связана следующая задача.

Опора подземного сооружения представляет собой прямоугольный треугольник с вертикальным катетом CA и горизонтальным CB, точка B справа от C, длины CA и CB равны соответственно 4 и 3 м. В результате сдвига грунта точка A осталась на месте, точки C и B сместились вдоль прямой CB вправо на $\frac{1}{2}$ м. Таким образом треугольник ABC превратился в треугольник AB_1C_1: $CC_1 = BB_1 = \frac{1}{2}$. Чему равна длина отрезка C_1D, где D – середина B_1A?

Решение.

По теореме Пифагора: $C_1A^2 = 16 + \frac{1}{4} = \frac{65}{4}; B_1A^2 = 16 + \frac{7}{4} = \frac{71}{4}$. Теперь медиану C_1D в треугольнике AB_1C_1 найдем из равенства $C_1D^2 = \frac{1}{2}(C_1A^2 + C_1B_1{}^2) - \frac{1}{4}B_1A_1^2 =$ $\frac{1}{2}\cdot(\frac{65}{4}+9) - \frac{1}{4}\cdot\frac{71}{4} = \frac{131}{16}$.

Отсюда следует, что $C_1D = \frac{\sqrt{131}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{131}}{4}$

Задание 4.

Блеск и «игра» драгоценных камней вызваны многократным преломлением и отражением света.
Два одинаковых прямоугольных зеркала соприкасаются длинными сторонами (см. рисунок 3). Проведем плоскость перпендикулярно общей стороне зеркал. В этой плоскости пустим узкий луч света *AB* на правое зеркало так, чтобы он прошел над самым краем левого зеркала (см. рисунок 4). Сколько раз луч отразится от зеркал, прежде чем выйдет наружу, если угол между зеркалами α = 10°, а угол падения луча на правое зеркало β = 68°?

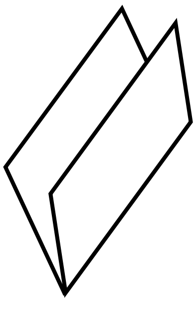


Рис. 3

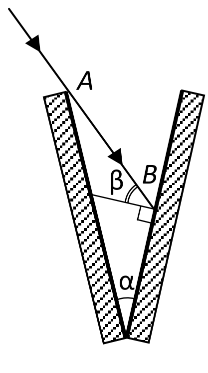


Рис. 4

Решение.
Распространение луча между зеркалами после его первого отражения от правого зеркала равносильно распространению продолжения этого луча по первоначальной прямой за правым зеркалом (см. рисунок 5).

Поэтому возможное решение задачи сводится к геометрическому построению: из общей точки O строим отрезки равной длины так, чтобы соседние отрезки образовали при вершине O угол α (см. рисунок 6). Длина отрезков равна длине короткой стороны зеркала. Проводим через точку A прямую, которая падает на отрезок OA_1 в точке B под углом β, и считаем, сколько построенных нами отрезков пересекла эта прямая. Это ответ.

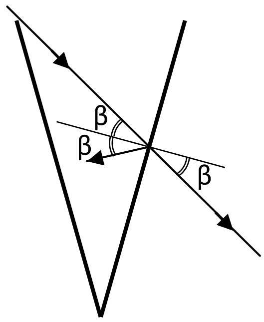


Рис. 5

Число отражений можно получить в общем виде с помощью формулы, вытекающей из сделанных построений. Поскольку $\angle ABO = \beta + 90°$, а $\angle AOB = \alpha$, то

$\angle OAB = \gamma = 90° - \alpha - \beta$.

Концы отрезков, проведенных из точки O, лежат на окружности, которую прямая AB пересекает в точке C. Треугольник AOC – равнобедренный. Поэтому $\angle ACO = \gamma$, $\angle AOC = 180° - 2\gamma = 2(\alpha + \beta)$.

Число отражений n подчинено системе неравенств:

$n\alpha \le 2(\alpha + \beta) < (n+1)\alpha$.

Учитывая, что n – целое число, получаем: $n = [2(1 + \beta/\alpha)]$, где $[x]$ – целая часть x. Подставляя сюда числовые значения α и β, получаем n = 15.

Ответ: $n = [2(1 + \beta/\alpha)] = 15$ раз, где $[x]$ – целая часть x.

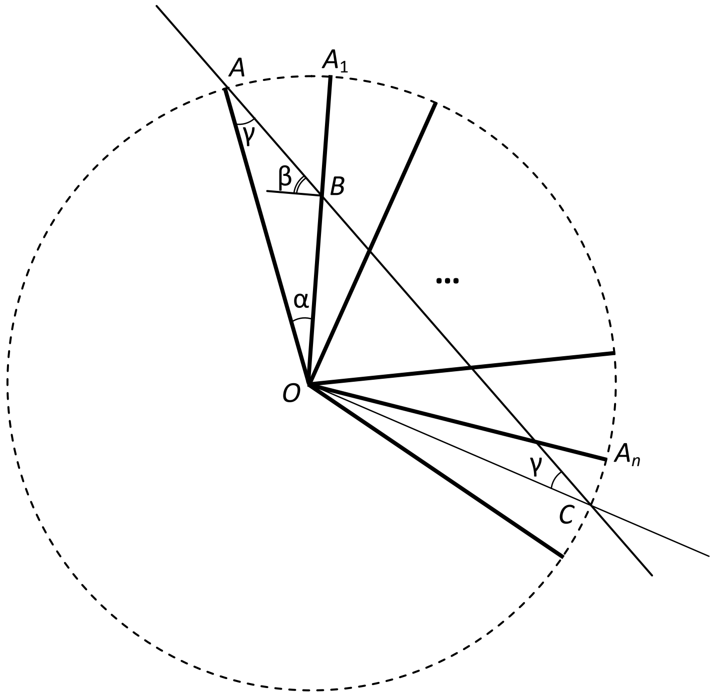


Рис. 6

2015 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Ответы на задания заключительного этапа (5-9 классы)

Номер задания	**Ответ**
Задание 1.	на расстоянии 0.5 м от середины пласта
Задание 2.	$R_2/R_1 = 4$
Задание 3.	$\frac{\sqrt{131}}{4}$
Задание 4.	15 раз

<u>Критерии оценки решений</u>

Критерии оценки	Баллы			
	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4
Задание выполнено правильно: ответ верен, в работе есть полное обоснование полученного ответа	25	25	25	25
Задание выполнено с небольшими недочетами: - арифметическая ошибка на завершающем этапе при полностью правильном алгоритме решения, что повлекло за собой неверный ответ; - правильный ответ при недостаточно полном обосновании, как он получен.	15	15	15	15
Задание выполнено с существенными недочетами: решение было начато правильно, но не доведено до ответа из-за принципиальной ошибки в рассуждениях.	5	5	5	5
Задание не выполнено: - решение с самого начала велось неверным путем; - отсутствие решения в работе.	0	0	0	0