



МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

***олимпиады школьников
«ЛОМОНОСОВ»
по математике***

2014/2015 учебный год

Олимпиада «ЛОМОНОСОВ – 2014-2015»

МАТЕМАТИКА

Отборочный этап. 10 – 11 класс. Тур 1.

Задание для разминки

1. Второй член геометрической прогрессии равен 5, а третий член равен 1. Найдите первый член этой прогрессии.

Ответ: 25. Решение. Так как $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = q$, то $a_1 = \frac{a_2^2}{a_3} = 25$.

2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, катет которого равен 6, а гипотенуза равна 10.

Ответ: 24. Решение. По теореме Пифагора второй катет равен $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Значит, площадь треугольника равна $\frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

Основное задание

1.1. Бизнесмены Иванов, Петров и Сидоров решили создать автопредприятие. Иванов купил для предприятия 70 одинаковых автомобилей, Петров – 40 таких же автомобилей, а Сидоров внес в предприятие 44 миллиона рублей. Известно, что Иванов и Петров могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех бизнесменов будет одинаковым. Сколько денег полагается Иванову? Ответ дать в миллионах рублей.

Ответ: 40. Решение. 1 способ. Каждый из бизнесменов должен внести столько же, сколько Сидоров, то есть 44 млн. руб. Если автомобиль стоит x , то $\frac{70x + 40x}{3} = 44$, $x = 1,2$. Получается, что Иванов внес $70 \cdot 1,2 = 84$ млн. руб., поэтому он должен получить обратно $84 - 44 = 40$ млн. руб. Петров внес $40 \cdot 1,2 = 48$ млн. руб., поэтому он должен получить обратно $48 - 44 = 4$ млн. руб.

2 способ. Каждый из бизнесменов должен внести столько же, сколько Сидоров, то есть 44 млн. руб. Если Иванов заберет t млн. руб., то Петрову останется $(44 - t)$ млн. руб. Поэтому $70x - t = 44$ и $40x - (44 - t) = 44$ (здесь x – цена автомобиля). Решая эту систему, получим $x = 1,2$ и $t = 40$.

1.2. Бизнесмены Иванов, Петров и Сидоров решили создать автопредприятие. Иванов купил для предприятия 70 одинаковых автомобилей, Петров – 40 таких же автомобилей, а Сидоров внес в предприятие 33 миллиона рублей. Известно, что Иванов и Петров могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех бизнесменов будет одинаковым. Сколько денег полагается Иванову? Ответ дать в миллионах рублей.

Ответ: 30.

1.3. Выпускники престижного колледжа Александр, Борис и Валерий решили создать компьютерную фирму. Александр купил для фирмы 30 одинаковых компьютеров, Борис – 50 таких же компьютеров, а Валерий внес в предприятие 24 тысячи долларов. Известно, что Александр и Борис могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех молодых людей будет одинаковым. Сколько денег полагается Борису? Ответ дать в тысячах долларов.

Ответ: 21.

1.4. Выпускники престижного колледжа Александр, Борис и Валерий решили создать компьютерную фирму. Александр купил для фирмы 30 одинаковых компьютеров, Борис – 50 таких же компьютеров, а Валерий внес в предприятие 32 тысячи долларов. Известно, что Александр и Борис могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех молодых людей будет одинаковым. Сколько денег полагается Борису? Ответ дать в тысячах долларов.

Ответ: 28.

1.5. Фермеры Иван, Петр и Федор решили создать молочную ферму. Иван купил для фермы 90 коров (все по одной цене), Петр – 80 таких же коров, а Федор внес в предприятие 34 тысячи долларов. Известно, что Иван и Петр могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех фермеров будет одинаковым. Сколько денег полагается Ивану? Ответ дать в тысячах долларов.

Ответ: 20.

1.6. Фермеры Иван, Петр и Федор решили создать молочную ферму. Иван купил для фермы 90 коров (все по одной цене), Петр – 80 таких же коров, а Федор внес в предприятие 51 тысячу долларов. Известно, что Иван и Петр могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех фермеров будет одинаковым. Сколько денег полагается Ивану? Ответ дать в тысячах долларов.

Ответ: 30.

1.7. Три подруги Елена, Ольга и Татьяна решили открыть маленький бутик готового платья. Елена купила для магазина 80 платьев (все по одной цене), Ольга – 50 таких же платьев, а Татьяна внесла в предприятие 156 тысяч рублей. Известно, что Елена и Ольга могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждой из трех девушек будет одинаковым. Сколько денег полагается Елене? Ответ дать в тысячах рублей.

Ответ: 132.

1.8. Три подруги Елена, Ольга и Татьяна решили открыть маленький бутик готового платья. Елена купила для магазина 80 платьев (все по одной цене), Ольга – 50 таких же платьев, а Татьяна внесла в предприятие 234 тысячи рублей. Известно, что Елена и Ольга могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждой из трех девушек будет одинаковым. Сколько денег полагается Елене? Ответ дать в тысячах рублей.

Ответ: 198.

2.1. Сколько 9-значных чисел, делящихся на 5, можно составить путём перестановки цифр числа 377 353 752?

Ответ: 1120. Решение. Так как число делится на 5, то на 9-м месте может стоять только пятёрка. После этого нужно на оставшиеся 8 мест распределить 8 цифр: 3 семёрки, 3 тройки, пятерку и двойку. Всего перестановок будет 8!, но так как есть повторяющиеся цифры, то ответ будет:

$$\frac{8!}{3!3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 1120.$$

2.2. Сколько 9-значных чисел, делящихся на 2, можно составить путём перестановки цифр числа 131 152 152?

Ответ: 840. *Указания.* Чисел будет $\frac{8!}{4!2!} = 840$.

2.3. Сколько 9-значных чисел, делящихся на 5, можно составить путём перестановки цифр числа 137 153 751?

Ответ: 1680. *Указания.* Чисел будет $\frac{8!}{3!2!2!} = 1680$.

2.4. Сколько 9-значных чисел, делящихся на 2, можно составить путём перестановки цифр числа 231 157 152?

Ответ: 3360. *Указания.* Чисел будет $\frac{8!}{3!2!} = 3360$.

3.1. Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 8. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 1152. **Решение.** Возьмём в качестве указанных в условии диагоналей для определённости диагонали A_1C_1 и AD_1 куба $AB_1C_1D_1$. Построим две параллельные плоскости A_1C_1B и AD_1C , в каждой из которых лежит по одной из этих диагоналей. Расстояние между этими плоскостями равно данному в условии расстоянию между диагоналями d . Его можно выразить через длину ребра куба a , например, рассмотрев перпендикулярное этим двум плоскостям сечение B_1D_1DB . Диагональ куба B_1D перпендикулярна обеим плоскостям и делится ими на три равные части. Получаем: $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, то есть $a = d\sqrt{3}$. Тогда $S = 6a^2 = 6 \cdot 3d^2 = 18d^2$.

3.2. Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 3. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 162.

3.3. Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 4. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 288.

3.4. Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 5. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 450.

3.5. Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 6. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 648.

3.6. Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 7. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 882.

3.7. Определите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 162. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 3.

3.8. Определите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 288. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 4.

3.9. Определите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 450. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 5.

3.10. Определите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 648. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 6.

3.11. Определите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 882. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 7.

3.12. Определите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 1152. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 8.

4.1. Найдите сумму всех корней уравнения $x^2 - 31x + 220 = 2^x(31 - 2x - 2^x)$.

Ответ: 7. **Решение.** Исходное уравнение равносильно уравнению $(x + 2^x)^2 - 31(x + 2^x) + 220 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2^x = 11, \\ x + 2^x = 20. \end{cases}$

Каждое из уравнений этой совокупности имеет не более одного корня, так функция $f(x) = x + 2^x$ — монотонно возрастающая. Первое уравнение имеет корень $x = 3$, а второе — корень $x = 4$. Сумма корней равна 7.

4.2. Найдите сумму всех корней уравнения $x^2 - 41x + 330 = 3^x(41 - 2x - 3^x)$.

Ответ: 5. *Указания.* Корни уравнения: 2 и 3.

4.3. Найдите сумму всех корней уравнения $4x^2 - 58x + 190 = (29 - 4x - \log_2 x) \cdot \log_2 x$.

Ответ: 12. *Указания.* Корни уравнения: 4 и 8.

4.4. Найдите сумму всех корней уравнения $4x^2 - 44x + 40 = (22 - 4x - \log_3 x) \cdot \log_3 x$.

Ответ: 10. *Указания.* Корни уравнения: 1 и 9.

5.1. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найдите наименьшую дробь, большую чем $\frac{3}{4}$. В ответе укажите её числитель.

Ответ: 73. **Решение.** Требуется найти такую дробь $\frac{a}{b}$, при которой $\frac{a}{b} - \frac{3}{4} = \frac{4a - 3b}{4b}$ достигает минимума. Поэтому ищется максимальное двузначное b , при котором $4a - 3b = 1$. Если при этом получается $b \geq 50$, то дробь $\frac{a}{b} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4b}$ будет всегда меньше, чем любая другая дробь с большим целым числителем и другим двузначным b .

Решаем уравнение $4a - 3b = 1$. Так как $b = \frac{4a-1}{3} = a + \frac{a-1}{3}$ – целое, то $a = 1 + 3k$, где k – произвольное целое число. Поэтому $b = 1 + 4k$. Максимальным k , при котором a и b двузначные, будет $k = 24$. Поэтому $b = 97$ и $a = 73$, то есть искомая дробь: $\frac{a}{b} = \frac{73}{97}$.

5.2. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найдите наименьшую дробь, большую чем $\frac{5}{6}$. В ответе укажите её числитель.

Ответ: 81. *Указания.* Искомая дробь: $\frac{81}{97}$.

5.3. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найдите наименьшую дробь, большую чем $\frac{4}{5}$. В ответе укажите её числитель.

Ответ: 77. *Указания.* Искомая дробь: $\frac{77}{96}$.

5.4. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найдите наименьшую дробь, большую чем $\frac{5}{7}$. В ответе укажите её числитель.

Ответ: 68. *Указания.* Искомая дробь: $\frac{68}{95}$.

5.5. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найдите наименьшую дробь, большую чем $\frac{3}{5}$. В ответе укажите её числитель.

Ответ: 59. *Указания.* Искомая дробь: $\frac{59}{98}$.

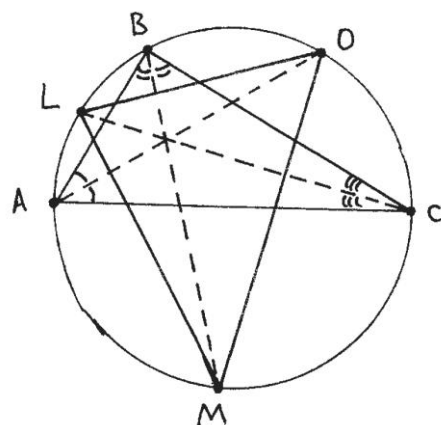
5.6. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найдите наименьшую дробь, большую чем $\frac{4}{9}$. В ответе укажите её числитель.

Ответ: 41. *Указания.* Искомая дробь: $\frac{41}{92}$.

6.1. В неравностороннем треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках L , O и M соответственно. Найдите площадь треугольника LOM , если площадь треугольника ABC равна 8. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 11. Решение. Пусть в треугольнике ABC угол α равен разности углов $\beta - \gamma$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то $\beta - \gamma + \beta + \gamma = 180^\circ$ и поэтому $\beta = 90^\circ$. Если $\beta = 90^\circ$ в два раза больше одного из углов α или γ , то треугольник будет равнобедренным, что противоречит условию. Пусть для определённости $\alpha > \gamma$. Тогда $\beta = 90^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$.

По теореме о вписанных углах:
 $\angle MLC = \angle MBC = 45^\circ$, $\angle CLO = \angle CAO = 30^\circ$. Поэтому $\angle MLO = 75^\circ$. Аналогично
 $\angle LOM = \angle LOA + \angle AOM = \angle LCA + \angle ABM = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$,



$$\angle OML = \angle OMB + \angle BML = \angle OAB + \angle BCL = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ.$$

Таким образом, углы треугольника LOM равны $\alpha_1 = 75^\circ$, $\beta_1 = 60^\circ$, $\gamma_1 = 45^\circ$.

С помощью теоремы синусов получим формулу для площади треугольника, вписанного в окружность радиуса R : $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot \sin \gamma = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

$$\text{Поэтому } \frac{S_{LOM}}{S_{ABC}} = \frac{2R \cdot \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1}{2R \cdot \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \frac{\sin 75^\circ \sin 60^\circ \sin 45^\circ}{\sin 90^\circ \sin 60^\circ \sin 30^\circ} = \sqrt{2} \cdot \sin 75^\circ. \text{ Так как}$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \text{ то получаем: } \frac{S_{LOM}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

$$\text{Поэтому } S_{LOM} = 4\sqrt{3} + 4 \approx 11.$$

6.2. В неравностороннем треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках L , O и M соответственно. Найдите площадь треугольника LOM , если площадь треугольника ABC равна 2. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 3. Указания. Точный ответ: $\sqrt{3} + 1$.

6.3. В неравностороннем треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках L , O и M соответственно. Найдите площадь треугольника LOM , если площадь треугольника ABC равна 32. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 44. Указания. Точный ответ: $16\sqrt{3} + 16$.

6.4. В неравностороннем треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках L , O и M соответственно. Найдите площадь треугольника LOM , если площадь треугольника ABC равна 20. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 27. Указания. Точный ответ: $10\sqrt{3} + 10$.

$$\text{7.1. Вычислить: } 4 \left(\sin^3 \frac{49\pi}{48} \cos \frac{49\pi}{16} + \cos^3 \frac{49\pi}{48} \sin \frac{49\pi}{16} \right) \cos \frac{49\pi}{12}.$$

Ответ: 0,75. Решение: Обозначим $\alpha = \frac{49\pi}{48} = \pi + \frac{\pi}{48}$. Тогда:

$$\begin{aligned} (\sin^3 \alpha \cos 3\alpha + \cos^3 \alpha \sin 3\alpha) \cos 4\alpha &= [\sin^3 \alpha (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) + \cos^3 \alpha (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha)] \cos 4\alpha \\ &= (-3 \sin^3 \alpha \cos \alpha + 3 \cos^3 \alpha \sin \alpha) \cos 4\alpha = 3 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos 4\alpha = \frac{3}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \\ &= \frac{3}{4} \sin 4\alpha \cos 4\alpha = \frac{3}{8} \sin 8\alpha. \text{ Поэтому искомое число равно: } 4 \cdot \frac{3}{8} \sin \left(8\pi + \frac{8\pi}{48} \right) = \frac{3}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} = 0,75. \end{aligned}$$

$$\text{7.2. Вычислить: } 4 \left(\sin^3 \frac{47\pi}{48} \cos \frac{47\pi}{16} + \cos^3 \frac{47\pi}{48} \sin \frac{47\pi}{16} \right) \cos \frac{47\pi}{12}.$$

Ответ: -0,75.

7.3. Вычислить: $4\sqrt{3}\left(\sin^3\frac{11\pi}{24}\cos\frac{11\pi}{8}+\cos^3\frac{11\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{8}\right)\cos\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: $-2,25$.

7.4. Вычислить: $4\sqrt{3}\left(\sin^3\frac{13\pi}{24}\cos\frac{13\pi}{8}+\cos^3\frac{13\pi}{24}\sin\frac{13\pi}{8}\right)\cos\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: $2,25$.

7.5. Вычислить: $10\sqrt{2}\left(\sin^3\frac{7\pi}{32}\cos\frac{21\pi}{32}+\cos^3\frac{7\pi}{32}\sin\frac{21\pi}{32}\right)\cos\frac{7\pi}{8}$.

Ответ: $-3,75$.

7.6. Вычислить: $10\sqrt{2}\left(\sin^3\frac{3\pi}{32}\cos\frac{9\pi}{32}+\cos^3\frac{3\pi}{32}\sin\frac{9\pi}{32}\right)\cos\frac{3\pi}{8}$.

Ответ: $3,75$.

8.1. Решив неравенство $\sqrt{x^2-3x-54}-\sqrt{x^2-27x+162}<8\sqrt{\frac{x+6}{x-9}}$, найдите сумму его целых решений, принадлежащих отрезку $[-25; 25]$.

Ответ: -290 . **Решение.** Перепишав неравенство в виде:

$$\sqrt{(x+6)(x-9)}-\sqrt{(x-9)(x-18)}<8\sqrt{\frac{x+6}{x-9}}, \text{ находим его область допустимых значений: } x\leq -6, \\ x\geq 18.$$

Домножив обе части неравенства на положительную на ОДЗ величину $\sqrt{(x+6)(x-9)}+\sqrt{(x-9)(x-18)}$, получим

$$(x+6)(x-9)-(x-9)(x-18)<8\sqrt{\frac{x+6}{x-9}}\left(\sqrt{(x+6)(x-9)}+\sqrt{(x-9)(x-18)}\right)\Leftrightarrow \\ 3(x-9)<\sqrt{\frac{x+6}{x-9}}\left(\sqrt{(x+6)(x-9)}+\sqrt{(x-9)(x-18)}\right).$$

После этого рассматриваем два случая:

а) $x\leq -6$. В этом случае левая часть неравенства отрицательна, а правая часть неотрицательна. Неравенство выполняется.

$$\text{б) } x\geq 18. \text{ В этом случае получим: } 3(x-9)<\sqrt{\frac{x+6}{x-9}}\left(\sqrt{(x+6)(x-9)}+\sqrt{(x-9)(x-18)}\right)\Leftrightarrow \\ 3(x-9)<\sqrt{x+6}\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-18}\right)\Leftrightarrow 3(x-9)<x+6+\sqrt{(x+6)(x-18)}\Leftrightarrow \\ \sqrt{(x+6)(x-18)}>2x-33\Leftrightarrow x^2-12x-108>4x^2-132x+1089\Leftrightarrow x^2-40x+399<0\Leftrightarrow \\ 19<x<21.$$

Таким образом, решение неравенства: $x\in(-\infty; -6]\cup(19; 21)$. Искомая сумма: $-25-24-23-\dots-6+20=-290$.

8.2. Решив неравенство $\sqrt{x^2 - x - 56} - \sqrt{x^2 - 25x + 136} < 8\sqrt{\frac{x+7}{x-8}}$, найдите сумму его целых решений, принадлежащих отрезку $[-25; 25]$.

Ответ: -285 . *Указания.* Решение неравенства: $x \in (-\infty; -7] \cup (18; 20)$.

8.3. Решив неравенство $\sqrt{x^2 + 3x - 54} - \sqrt{x^2 + 27x + 162} < 8\sqrt{\frac{x-6}{x+9}}$, найдите сумму его целых решений, принадлежащих отрезку $[-25; 25]$.

Ответ: 290 . *Указания.* Решение неравенства: $x \in (-21; -19) \cup [6; +\infty)$.

8.4. Решив неравенство $\sqrt{x^2 + x - 56} - \sqrt{x^2 + 25x + 136} < 8\sqrt{\frac{x-7}{x+8}}$, найдите сумму его целых решений, принадлежащих отрезку $[-25; 25]$.

Ответ: 285 . *Указания.* Решение неравенства: $x \in (-20; -18) \cup [7; +\infty)$.

9.1. Найдите наибольшее значение выражения $(\sqrt{8-4\sqrt{3}} \sin x - 3\sqrt{2(1+\cos 2x)} - 2) \cdot (3 + 2\sqrt{11-\sqrt{3}} \cos y - \cos 2y)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 33. Решение. Положим $f(x) = \sqrt{8-4\sqrt{3}} \sin x - 3\sqrt{2(1+\cos 2x)} - 2$,
 $g(y) = 3 + 2\sqrt{11-\sqrt{3}} \cos y - \cos 2y$ и оценим эти две функции.

1) $f(x) = \sqrt{8-4\sqrt{3}} \sin x - 6|\cos x| - 2 \leq \sqrt{8-4\sqrt{3}} \cdot 1 - 6 \cdot 0 - 2 = \sqrt{8-4\sqrt{3}} - 2 = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2} - 2 = \sqrt{6} - \sqrt{2} - 2$. Указанное значение достигается, например, при $x = \frac{\pi}{2}$.

$f(x) = \sqrt{8-4\sqrt{3}} \sin x - 6|\cos x| - 2 = 2(\sqrt{2-\sqrt{3}} \sin x - 3|\cos x| - 1) \geq 2\left(-\sqrt{(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 + 3^2} - 1\right) = -2(\sqrt{11-\sqrt{3}} + 1)$. Указанное значение достигается, например, при $x = \arcsin \frac{3}{\sqrt{11-\sqrt{3}}} - \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $-2(\sqrt{11-\sqrt{3}} + 1) \leq f(x) \leq \sqrt{6} - \sqrt{2} - 2$. Отметим также, что $-2(\sqrt{11-\sqrt{3}} + 1) < -2 < \sqrt{6} - \sqrt{2} - 2 < 0$.

2) $g(y) = 3 + 2\sqrt{11-\sqrt{3}} \cos y - \cos 2y = -2\cos^2 y + 2\sqrt{11-\sqrt{3}} \cos y + 4$. Положим $t = \cos y$, $t \in [-1; 1]$. Тогда $g(y) = h(t) = -2t^2 + 2\sqrt{11-\sqrt{3}} \cdot t + 4$. Максимум этой квадратичной функции достигается при $t = \frac{\sqrt{11-\sqrt{3}}}{2} > 1$, поэтому на отрезке $t \in [-1; 1]$ функция $h(t)$ возрастает и

$h(-1) \leq h(t) \leq h(1)$. Далее: $h(-1) = -2 - 2\sqrt{11 - \sqrt{3}} + 4 = -2(\sqrt{11 - \sqrt{3}} - 1)$,
 $h(1) = -2 + 2\sqrt{11 - \sqrt{3}} + 4 = 2(\sqrt{11 - \sqrt{3}} + 1)$. При этом $h(-1) < 0 < h(1)$.

Таким образом, $-2(\sqrt{11 - \sqrt{3}} - 1) \leq g(y) \leq 2(\sqrt{11 - \sqrt{3}} + 1)$.

3) Значит, максимум произведения равен $\left(-2(\sqrt{11 - \sqrt{3}} + 1)\right) \cdot \left(-2(\sqrt{11 - \sqrt{3}} - 1)\right)$
 $= 4(11 - \sqrt{3} - 1) = 40 - 4\sqrt{3} \approx 33$.

9.2. Найдите наименьшее значение выражения

$\left(3\sqrt{2(1 + \cos 2x)} - \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} \sin x + 2\right) \cdot \left(3 + 2\sqrt{11 - \sqrt{3}} \cos y - \cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: -33. Указания. Точный ответ: $4\sqrt{3} - 40$.

9.3. Найдите наибольшее значение выражения

$\left(\sqrt{3 - \sqrt{2}} \sin x - \sqrt{2(1 + \cos 2x)} - 1\right) \cdot \left(3 + 2\sqrt{7 - \sqrt{2}} \cos y - \cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 9. Указания. Точный ответ: $12 - 2\sqrt{2}$.

9.4. Найдите наименьшее значение выражения

$\left(\sqrt{2(1 + \cos 2x)} - \sqrt{3 - \sqrt{2}} \sin x + 1\right) \cdot \left(3 + 2\sqrt{7 - \sqrt{2}} \cos y - \cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: -9. Указания. Точный ответ: $2\sqrt{2} - 12$.

9.5. Найдите наибольшее значение выражения

$\left(\sqrt{36 - 4\sqrt{5}} \sin x - \sqrt{2(1 + \cos 2x)} - 2\right) \cdot \left(3 + 2\sqrt{10 - \sqrt{5}} \cos y - \cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 27. Указания. Точный ответ: $36 - 4\sqrt{5}$.

9.6. Найдите наименьшее значение выражения

$\left(\sqrt{2(1 + \cos 2x)} - \sqrt{36 - 4\sqrt{5}} \sin x + 2\right) \cdot \left(3 + 2\sqrt{10 - \sqrt{5}} \cos y - \cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: -27. Указания. Точный ответ: $4\sqrt{5} - 36$.

9.7. Найдите наибольшее значение выражения

$\left(\sqrt{9 - \sqrt{7}} \sin x - \sqrt{2(1 + \cos 2x)} - 1\right) \cdot \left(3 + 2\sqrt{13 - \sqrt{7}} \cos y - \cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 19. Указания. Точный ответ: $24 - 2\sqrt{7}$.

9.8. Найдите наименьшее значение выражения

$\left(\sqrt{2(1+\cos 2x)} - \sqrt{9-\sqrt{7}} \sin x + 1\right) \cdot \left(3 + 2\sqrt{13-\sqrt{7}} \cos y - \cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: -19 . Указания. Точный ответ: $2\sqrt{7} - 24$.

10.1. Найдите такое наибольшее целое k , что хотя бы для одного натурального $n > 1000$ число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ делится на 2^{n+k+2} .

Ответ: -3 . **Решение.** Наибольшая степень двойки, входящая в $n!$, равна конечной сумме $\left[\frac{n}{2^1}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \dots \leq \frac{n}{2^1} + \frac{n}{2^2} + \dots < n$, поэтому она не превосходит $n-1$. При этом равенство этой степени значению $n-1$ достигается на степенях двойки (например, при $n = 2^{10} = 1024$). Поэтому $(k+2)_{\max} = -1$, $k_{\max} = -3$.

10.2. Найдите такое наибольшее целое n , что хотя бы для одного натурального $m > 500$ число $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$ делится на 2^{m+n+3} .

Ответ: -4 .

10.3. Найдите такое наибольшее целое k , что хотя бы для одного натурального $n > 2000$ число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ делится на 2^{n+k+4} .

Ответ: -5 .

10.4. Найдите такое наибольшее целое n , что хотя бы для одного натурального $m > 10000$ число $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$ делится на 2^{m+n+5} .

Ответ: -6 .

Отборочный этап. 10 – 11 классы. Тур 2.

Задания для разминки

::1:: Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 15 км, вышел пешеход. Одновременно навстречу ему из B выехал велосипедист, скорость которого в два раза больше скорости пешехода. Через час они встретились. Найдите скорость велосипедиста (в километрах в час).

{=10}

::2:: Найдите площадь треугольника, ограниченного прямой $y = 4 - 2x$ и координатными осями.

{=4}

Основное задание

::1.1:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 58 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 54,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 62 балла. Сколько учеников в 11 «Б» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 22 и не больше 39 учеников?

Ответ: 28. **Решение.** Пусть в 11 «А» классе x учеников, а в 11 «Б» классе – y учеников. Тогда $\frac{54,5 \cdot x + 62 \cdot y}{x + y} = 58$, откуда получается $7x = 8y$. Значит, $x = 8n$, $y = 7n$, где $n \in \mathbb{N}$. По условию $22 \leq 8n \leq 39$ (отсюда $n = 3$ или 4), $22 \leq 7n \leq 39$ (отсюда $n = 4$ или 5), поэтому $n = 4$. Значит, в классах соответственно 32 и 28 учеников.

составляет 60,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 66 баллов. Сколько учеников в 11 «Б» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 16 и не больше 29 учеников?

{=20}

::1.12:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 64 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 62,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 66,5 балла. Сколько учеников в 11 «А» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 16 и не больше 34 учеников?

{=30}

::2.1:: Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\frac{(a-4)x^2 + 6x - 2}{x-2} = 0$ имеет ровно один корень. В ответе укажите сумму всех таких значений a .

Ответ: 5. Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} (a-4)x^2 + 6x - 2 = 0, \\ x - 2 \neq 0. \end{cases}$ При

$a = 4$ первое уравнение системы будет линейным, и система имеет один корень $x = 3$. При остальных a первое уравнение квадратное, его дискриминант $\frac{D}{4} = 9 + 2(a-4) = 2a + 1$. Поэтому при

$a = -\frac{1}{2}$ система имеет один корень $x = \frac{2}{3}$. Кроме того, один корень система имеет тогда, когда первое уравнение имеет два корня, один из которых равен 2. Это будет при $(a-4) \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 2 = 0$, то есть при $a = \frac{3}{2}$. Таким образом, сумма всех значений a равна: $4 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 5$.

::2.2:: Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\frac{(a-1)x^2 - 4x + 1}{x-1} = 0$ имеет ровно один корень. В ответе укажите сумму всех таких значений a .

{=10}

::2.3:: Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\frac{(a-6)x^2 + 8x - 4}{x-2} = 0$ имеет ровно один корень. В ответе укажите сумму всех таких значений a .

{=11}

::2.4:: Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\frac{(a+1)x^2 - 6x + 2}{x-2} = 0$ имеет ровно один корень. В ответе укажите сумму всех таких значений a .

{=4}

::3.1:: Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 50 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зеленые, фиолетовые и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? Саквояжи одного цвета считаются идентичными.

Ответ: 23426. Решение. Докажем, что число различных наборов из n саквояжей k цветов (в данной задаче $n = 50$, $k = 4$) равно $C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}$.

Старуха Шапокляк может взять школьную тетрадку в клетку и отметить там ряд из $n+k-1$ клеток. Затем в произвольных $k-1$ разных клетках этого ряда она ставит крестики. Передав этот листок продавцу, она ставит условие: число клеток, лежащее слева от первого крестика, равно

числу саквояжей первого цвета; число клеток, лежащих между первым и вторым крестиком, равно числу саквояжей второго цвета, и т. д.; число клеток, лежащее правее последнего крестика, равно числу саквояжей последнего (k -ого) цвета. При этом, если левее первого крестика, между какими-либо двумя крестиками, или правее k -го крестика нет клеток, значит, в покупке не будет саквояжей соответствующего цвета.

Тем самым число вариантов покупки равно числу способов расстановки $k-1$ крестика на $n+k-1$ различных позициях, то есть равно C_{n+k-1}^{k-1} , откуда и получаем ответ при $n=50$, $k=4$:

$$C_{53}^3 = \frac{53!}{50! \cdot 3!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot 51}{2 \cdot 3} = 23426.$$

::3.2:: Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 48 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зелёные и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? (Саквояжи одного цвета считаются идентичными).

{=1225}

::3.3:: Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 50 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зелёные и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? (Саквояжи одного цвета считаются идентичными).

{=1326}

::3.4:: Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 49 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зеленые, фиолетовые и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? Саквояжи одного цвета считаются идентичными.

{=22100}

::3.5:: Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 48 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зеленые, фиолетовые и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? (Саквояжи одного цвета считаются идентичными).

{=20825}

::3.6:: Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 52 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зелёные и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? (Саквояжи одного цвета считаются идентичными).

{=1431}

::4.1:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 71 дают в остатке 27, а при делении на 79 дают в остатке 40. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

Ответ: 9639. Решение. Из условия задачи следует, что искомое число равно $x = 71m + 27$ или $x = 79n + 40$. Отсюда получается уравнение в целых числах $71m + 27 = 79n + 40$, или $71m - 79n = 13$. Решение последнего уравнения (его можно найти разными путями): $m = 28 + 79k$, $n = 25 + 71k$, где k – произвольное целое число. Поэтому искомые числа: $x = 2015 + 5609k$. Из них четырёхзначными являются: 2015 и 7624. Их сумма: 9639.

::4.2:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 79 дают в остатке 39, а при делении на 83 дают в остатке 22. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=10585}

::4.3:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 61 дают в остатке 53, а при делении на 71 дают в остатке 17. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=8341}

::4.4:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 67 дают в остатке 27, а при делении на 73 дают в остатке 72. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=8831}

::4.5:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 59 дают в остатке 45, а при делении на 71 дают в остатке 16. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=8055}

::4.6:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 61 дают в остатке 20, а при делении на 67 дают в остатке 41. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=7787}

::4.7:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 79 дают в остатке 17, а при делении на 89 дают в остатке 64. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=10541}

::4.8:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 73 дают в остатке 32, а при делении на 79 дают в остатке 52. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=9189}

::5.1:: Найдите все значения $y \in [2014; 2015]$, при каждом из которых уравнение

$$\left(\sin x \cos x + \sin^3 x \cos x + \frac{\sin^5 x}{\cos x} \right)^2 + \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} + \cos(8\pi y) = 0$$

имеет решение. В ответ внесите сумму всех таких y , при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

Ответ: 8058. **Решение.** Выражение в первой скобке уравнения равно

$$\sin x \cos x + \sin^3 x \cos x + \frac{\sin^5 x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} (\cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x)$$

$$= \operatorname{tg} x (\cos^2 x + \sin^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x)) = \operatorname{tg} x, \text{ второе слагаемое уравнения равно}$$

$$\frac{\cos 2x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x - 1. \text{ Поэтому исходное уравнение можно записать в виде}$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 1 - \cos(8\pi y). \text{ Так как левая часть этого уравнения не меньше 2, а правая не больше 2,}$$

$$\text{то } \operatorname{tg}^2 x = 1, \cos(8\pi y) = -1. \text{ Значит, } 8\pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Поэтому } y = \frac{1+2k}{8}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Условию}$$

$$y \in [2014; 2015] \text{ удовлетворяют } y = 2014 + \frac{1}{8}, y = 2014 + \frac{3}{8}, y = 2014 + \frac{5}{8}, y = 2014 + \frac{7}{8}. \text{ Сумма этих}$$

$$\text{значений равна } 2014 \cdot 4 + \frac{1+3+5+7}{8} = 8058.$$

::5.2:: Найдите все значения $y \in [2014; 2015]$, при каждом из которых уравнение

$$\left(\cos x \sin x + \cos^3 x \sin x + \frac{\cos^5 x}{\sin x} \right)^2 - \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \sin(9\pi y) = 0$$

имеет решение. В ответ внесите сумму всех таких y , при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

{=8058}

::5.3:: Найдите все значения $y \in [2014; 2015]$, при каждом из которых уравнение

$$\left(\sin x \cos^3 x + \sin^3 x \cos x + \frac{\sin^3 x}{\cos x} \right)^2 + \frac{2 \cos 2x + 2}{\sin^2 2x} - 3 \sin(8\pi y) = 0$$

имеет решение. В ответ внесите сумму всех таких y , при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

{=8057,75}

::5.4.: Найдите все значения $y \in [2014; 2015]$, при каждом из которых уравнение

$$\left(\cos x \sin^3 x + \cos^3 x \sin x + \frac{\cos^3 x}{\sin x} \right)^2 - \frac{2 \cos 2x - 2}{\sin^2 2x} + 3 \cos(10\pi y) = 0$$

имеет решение. В ответ внесите сумму всех таких y , при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

{=10072,5}

::6.1.: В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN , при этом $BC = 36$, $MN = 12$. В треугольник вписана окружность с центром O . Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника BOC окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=31,18}

Решение. В общем виде (для всех вариантов) задача записывается так:

В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN , при этом $BC = ka$, $MN = a$ ($k > 1$). В треугольник вписана окружность с центром O . Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника BOC окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

Так как центр вписанной окружности O – точка пересечения биссектрис, то $\angle BOC = 180^\circ - \frac{\angle C + \angle B}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, где $\alpha = \angle BAC$. Поэтому радиус окружности, описанной около треугольника BOC , равен $R = \frac{BC}{2 \sin \angle BOC} = \frac{ka}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$. Значит, радиус

тем больше, чем меньше знаменатель, то есть чем больше угол α .

При этом треугольник AMN подобен треугольнику ABC ($\angle BAC$ – общий и $\frac{AM}{AB} = |\cos \alpha| = \frac{AN}{AC}$) с коэффициентом подобия $|\cos \alpha| = \frac{NM}{BC} = \frac{1}{k}$ (отметим, что знак модуля у косинуса здесь связан с тем, что угол α может быть, как острым, так и тупым).

Поэтому радиус описанной окружности максимален, если угол α тупой, то есть $\cos \alpha = -\frac{1}{k}$. Значит, $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{k-1}{2k}}$, а радиус равен $R = \frac{ka\sqrt{2k}}{2\sqrt{k-1}}$.

::6.2.: В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN , при этом $BC = 12$, $MN = 8$. В треугольник вписана окружность с центром O . Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника BOC окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=14,70}

::6.3.: В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN , при этом $BC = 20$, $MN = 4$. В треугольник вписана окружность с центром O . Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника BOC окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=15,81}

::6.4:: В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN , при этом $BC = 24$, $MN = 6$. В треугольник вписана окружность с центром O . Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника BOC окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

$$\{=19,60\}$$

::6.5:: В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN , при этом $BC = 18$, $MN = 12$. В треугольник вписана окружность с центром O . Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника BOC окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

$$\{=22,05\}$$

::6.6:: В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN , при этом $BC = 20$, $MN = 8$. В треугольник вписана окружность с центром O . Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника BOC окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

$$\{=18,26\}$$

::7.1:: Найдите сумму корней уравнения $\frac{\log_2^2 3}{(x+10)^2} - 2 \frac{\log_3^2 16}{(x-10)^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 100}} \right)^2$ и укажите в ответе ближайшее к ней целое число. Для округления можно принять $\log_2 3 = 1,585$.

Ответ: -19 . **Решение.** После замены переменных $a = \frac{\log_2 3}{x+10}$, $b = \frac{\log_3 16}{x-10}$ получается однородное уравнение $a^2 - 2b^2 = ab$, сводящееся к квадратному: $\left(\frac{a}{b} \right)^2 - \frac{a}{b} - 2 = 0$. Это уравнение имеет корни 2 и -1 . Поэтому либо $\frac{x-10}{x+10} = 8 \cdot \log_3^2 2$, либо $\frac{x-10}{x+10} = -4 \cdot \log_3^2 2$. Второе уравнение не имеет решений в силу ОДЗ. А из первого получаем решение $x = \frac{10(1 + 8 \cdot \log_3^2 2)}{1 - 8 \cdot \log_3^2 2} \approx -19,15508$. Ближайшее целое: -19 .

::7.2:: Найдите сумму корней уравнения $\frac{\log_3^2 5}{(x+10)^2} - 2 \frac{\log_5^2 81}{(x-10)^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 100}} \right)^2$ и укажите в ответе ближайшее к ней целое число. Для округления можно принять $\log_3 5 = 1,465$.

$$\{=-17\}$$

::7.3:: Найдите сумму корней уравнения $\frac{\log_3^2 5}{(x+11)^2} - 2 \frac{\log_5^2 81}{(x-11)^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 121}} \right)^2$ и укажите в ответе ближайшее к ней целое число. Для округления можно принять $\log_3 5 = 1,465$.

$$\{=-19\}$$

::7.4:: Найдите сумму корней уравнения $\frac{\log_2^2 3}{(x+10)^2} - 2 \frac{\log_3^2 16}{(x-10)^2} + \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 100}} \right)^2 = 0$ и укажите в ответе ближайшее к ней целое число. Для округления можно принять $\log_2 3 = 1,585$.

$$\{=-44\}$$

::7.5:: Найдите сумму корней уравнения $\frac{\log_3^2 5}{(x+11)^2} - 2 \frac{\log_5^2 81}{(x-11)^2} + \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-121}} \right)^2 = 0$ и укажите в ответе ближайшее к ней целое число. Для округления можно принять $\log_3 5 = 1,465$.

$$\{-36\}$$

::8.1:: Найдите все значения x , при которых числа $6\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ и $4\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Из этих значений x выберите принадлежащие отрезку $\left[\frac{3}{2}; 12\right]$ и запишите в ответ их сумму.

Ответ: 47. Решение. Характеристическое свойство арифметической прогрессии приводит к уравнению $6\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 4\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, которое после замены $\alpha = \frac{\pi x}{6}$ сводится к уравнению $3\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{ctg}3\alpha = \operatorname{tg}2\alpha$. Оно переписывается в виде $2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}3\alpha) = \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow$

$$\frac{2\cos 2\alpha}{\cos \alpha \sin 3\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 2\alpha = \sin \alpha \cdot \sin 3\alpha, \\ \cos 2\alpha \neq 0, \\ \cos \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Уравнение системы равносильно уравнению $4\cos^2 2\alpha = \cos 2\alpha - \cos 4\alpha \Leftrightarrow 6\cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha - 1 = 0$, имеющему решения $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ и $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$. Отсюда $2\alpha = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $2\alpha = \pi \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$, что приводит к решениям: $x = \pm 1 + 6k$. $x = 3 \pm \frac{1}{\pi} \cdot \arccos \frac{1}{3} + 6n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Так как $\frac{1}{\pi} \cdot \arccos \frac{1}{3} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, то на указанный в условии промежуток попадают корни: 7; 5; 11; $3 + \frac{1}{\pi} \cdot \arccos \frac{1}{3}$; $9 + \frac{1}{\pi} \cdot \arccos \frac{1}{3}$; $3 - \frac{1}{\pi} \cdot \arccos \frac{1}{3}$; $9 - \frac{1}{\pi} \cdot \arccos \frac{1}{3}$. Их сумма равна 47.

::8.2:: Найдите все значения x , при которых числа $4\operatorname{ctg}(\pi x)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$ и $6\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Из этих значений x выберите принадлежащие отрезку $[3; 9]$ и запишите в ответ их сумму.

$$\{=48\}$$

::8.3:: Найдите все значения x , при которых числа $6\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $\operatorname{tg}(\pi x)$ и $4\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Из этих значений x выберите принадлежащие отрезку $\left[\frac{9}{2}; 36\right]$ и запишите в ответ их сумму.

$$\{=1275,67\}$$

::8.4:: Найдите все значения x , при которых числа $4\operatorname{ctg}(2\pi x)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi x}{3}\right)$ и $6\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Из этих значений x выберите принадлежащие отрезку $[6; 18]$ и запишите в ответ их сумму.

$$\{=384\}$$

::9.1:: Каждая из сторон неравностороннего треугольника может принимать одно из 16-ти различных фиксированных значений, наибольшее из которых не превосходит удвоенного наименьшего. Каково максимальное количество различных тупоугольных треугольников среди указанных?

Ответ: 360. Решение. Для определенности считаем, что длина меньшего отрезка равна 1. Разделим отрезки на три группы:

А: состоит из m отрезков с длинами из полуинтервала $[1; \sqrt{2})$;

В: состоит из n отрезков с длинами из полуинтервала $[\sqrt{2}; \sqrt{3})$;

С: состоит из k отрезков с длинами из отрезка $[\sqrt{3}; 2]$.

По условию $m + n + k = 16$. Далее рассмотрим десять «случаев» выбора трёх отрезков из этих групп А, В, С.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3
В	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
С	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0

Если a, b, c – длины трёх отрезков из случаев «1», «2», «3», «4», «5», «7» или «10», то выполнены все три неравенства (проверка делается перебором): $a^2 + b^2 \geq c^2$, $b^2 + c^2 > a^2$, $c^2 + a^2 > b^2$. Поэтому треугольник со сторонами a, b, c – не будет тупоугольным.

Значит, осталось рассмотреть только случаи: «6», «8», «9».

В случае «6» из 16 данных отрезков можно всего составить $m n k = m n (16 - m - n)$ треугольников.

В случае «8» треугольников будет: $\frac{m(m-1)}{2}(16 - m - n)$.

В случае «9» треугольников будет: $\frac{m(m-1)}{2}n$.

Итого во всех трёх случаях «6», «8», «9» число треугольников равно:

$$N(m, n) = m n (16 - m - n) + \frac{m(m-1)}{2}(16 - m).$$

Так как $n(16 - m - n) \leq \left(\frac{n + 16 - m - n}{2}\right)^2 = \frac{(16 - m)^2}{4}$, то

$$N(m, n) \leq \frac{m(16 - m)^2}{4} + \frac{m(m-1)}{2}(16 - m) = \frac{m(16 - m)(16 - m + 2m - 2)}{4} = \frac{m(16 - m)(m + 14)}{4}.$$

Далее ищем максимум функции $f(m) = m(16 - m)(m + 14)$ для натуральных m . Локальный максимум этой функции: $m = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$. Поэтому максимум достигается либо при $m = 9$, либо при $m = 10$.

Так как $N(9, n) = 9n(7-n) + 9 \cdot 4 \cdot 7 = 9(7n - n^2 + 28)$, то максимум здесь достигается при $n = 3$ и при $n = 4$ и равен 360.

Так как $f(10) = \frac{10 \cdot 6 \cdot 24}{4} = 360$, то $N(10, n) \leq 360$.

Значит, из 16 отрезков можно составить не более 360 треугольников.

Осталось показать, что существует ситуация, когда все эти треугольники тупоугольные.

Пример: группа А состоит из $m = 9$ отрезков с длинами от 1 до 1,05; группа В состоит из $n = 4$ отрезков с длинами от 1,5 до 1,6; группа С состоит из $k = 3$ отрезков с длинами от 1,95 до 2.

В случае «6» для трёх отрезков a, b, c получаем: $a^2 + b^2 \leq 1,05^2 + 1,6^2 < 1,95^2 \leq c^2$.

В случае «8» для трёх отрезков a, b, c : $a^2 + b^2 \leq 1,05^2 + 1,05^2 < 1,5^2 < c^2$; в случае 9: $a^2 + b^2 \leq 1,05^2 + 1,05^2 < 1,5^2 \leq b^2$.

Значит, все 360 треугольников тупоугольные.

∴10.1.: Вокруг плоского четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 10$, $BC = 12$, $CD = 16$ и $AD = 10\sqrt{3}$ можно описать окружность. Дана такая точка S , что $SA = 12$, $SB = 14$, $SC = 13$. Найдите косинус угла между прямыми SA и BC . При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,92. **Решение.** Обозначим $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = AD$, $x = AC$, $a' = SA$, $b' = SB$, $c' = SC$.

Тогда по теореме косинусов находим $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\pi - \varphi)$. Откуда $\cos \varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$. Следовательно, $x^2 = \frac{cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)}{ab + cd}$.

Для нашего случая $x^2 = \frac{4(417 + 244\sqrt{3})}{3 + 4\sqrt{3}} = 96\sqrt{3} + 172$ (можно найти и $x = 8 + 6\sqrt{3}$, хотя для решения задачи это и не нужно).

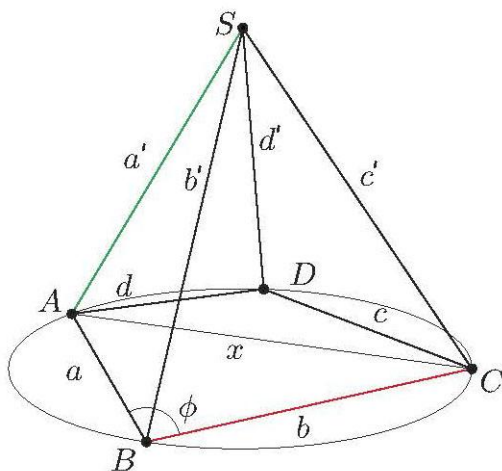


Рис. 1:

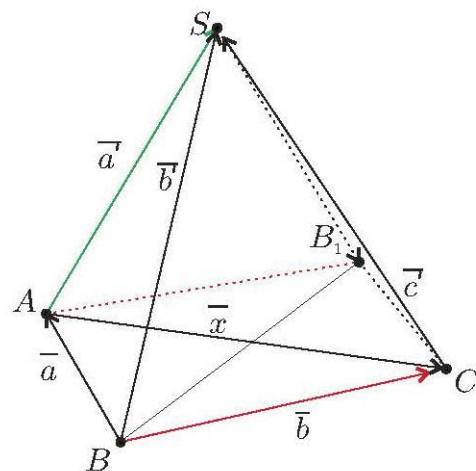


Рис. 2:

Получается, что $\angle ABC = \arccos \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$, $\angle SBA = \arccos \frac{19}{35}$, $\angle SBC = \arccos \frac{57}{112}$. Так как $\angle ABC$ не равен сумме углов $\angle SBA + \angle SBC$, то S не принадлежит плоскости $ABCD$.

Поэтому $SABC$ – пирамида, в которой известны все ребра, и искомым углом между скрещивающимися ребрами тетраэдра находится по известной формуле $\cos \delta = \frac{(b')^2 + x^2 - a^2 - (c')^2}{2a'b}$. Получается $\cos \delta = \frac{161 + 76\sqrt{3}}{32(3 + 4\sqrt{3})} = \frac{33 + 32\sqrt{3}}{96} = \frac{11}{32} + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.921...$

Различные доказательства приведенной выше формулы для косинуса угла между скрещивающимися рёбрами можно найти в литературе. Например, её можно доказать так. Положим $\vec{a} = \vec{BA}$, $\vec{b} = \vec{BC}$, $\vec{x} = \vec{AC}$, $\vec{a}' = \vec{AS}$, $\vec{c}' = \vec{CS}$. Построим треугольник ABC до параллелограмма $ABCB_1$. Тогда $\vec{SB}' = \vec{b}' - \vec{c} - \vec{a}$.

Из треугольника AB_1S получаем $(\vec{b}' - \vec{b} - \vec{a}, \vec{b}' - \vec{b} - \vec{a}) = (a')^2 + b^2 - 2a'b \cos \delta$.

Поскольку $2\vec{b}' \cdot \vec{b} = (b')^2 + b^2 - (c')^2$, $2\vec{b}' \cdot \vec{a} = (b')^2 + a^2 - (a')^2$, $2\vec{b} \cdot \vec{a} = b^2 + a^2 - x^2$, то подставив эти равенства в уравнение $(b')^2 + b^2 + a^2 - 2\vec{b}' \cdot \vec{b} - 2\vec{b}' \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} = (a')^2 + b^2 - 2a'b \cos \delta$, получаем выражение для $\cos \delta$: $\cos \delta = \frac{(b')^2 + x^2 - a^2 - (c')^2}{2a'b}$.

::10.2:: Вокруг плоского четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 30$, $BC = 17\sqrt{3}$, $CD = 17$ и $AD = 16$ можно описать окружность. Дана такая точка S , что $SA = 34$, $SB = 35$, $SC = 36$. Найдите косинус угла между прямыми SA и BC . При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=0,07}

::10.3:: Вокруг плоского четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 14$, $BC = 25\sqrt{3}$, $CD = 25$ и $AD = 48$ можно описать окружность. Дана такая точка S , что $SA = 43$, $SB = 42$, $SC = 41$. Найдите косинус угла между прямыми SA и BC . При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=0,60}

::10.4:: Вокруг плоского четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 24$, $BC = 13\sqrt{3}$, $CD = 13$ и $AD = 10$ можно описать окружность. Дана такая точка S , что $SA = 17$, $SB = 18$, $SC = 16$. Найдите косинус угла между прямыми SA и BC . При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=0,11}

::10.5:: Вокруг плоского четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 70$, $BC = 37\sqrt{3}$, $CD = 37$ и $AD = 24$ можно описать окружность. Дана такая точка S , что $SA = 52$, $SB = 50$, $SC = 51$. Найдите косинус угла между прямыми SA и BC . При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=0,28}

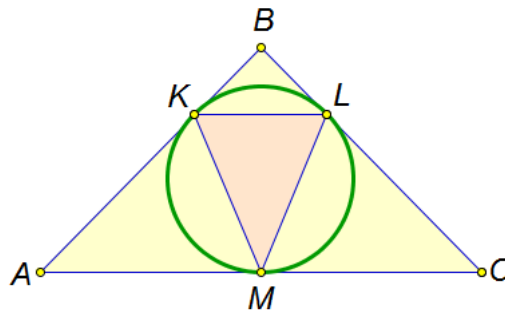
Отборочный этап. 9 класс.

1. В 12:00 плот отправился из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки. В 12:45 моторная лодка отправилась из А вслед за плотом, догнала плот в 13:00 и продолжила движение. Прибыв в пункт В, лодка развернулась и поплыла обратно, встретив по пути плот в 14:00. Определите время прибытия плота в пункт В.

Ответ: 15:00. **Решение.** Лодка догнала плот за 15 минут, следовательно, ее скорость по течению в 4 раза больше скорости течения реки. Если рассмотреть систему координат, связанную с плотом, то несложно понять, что лодка прибыла в пункт В в 13:30, т.е. потратила 45 минут на путь из А в В. Соответственно плот потратит в 4 раза больше времени и прибудет в 15-00.

2. В равнобедренный треугольник со сторонами $AB = BC = 3$, $AC = 4$ вписана окружность, касающаяся сторон треугольника в точках K , L и M . Найдите отношение площадей $S(\triangle ABC) : S(\triangle KLM)$.

Ответ: $\frac{9}{2}$. **Решение.** Поскольку треугольник равнобедренный, то вписанная окружность касается основания в середине, поэтому $AM = MC = AK = CL = 2$, $BK = BL = 1$. Найдём площади треугольников (по отношению к площади $\triangle ABC$): $S(\triangle AKM) = S(\triangle CLM) = \frac{1}{3}S(\triangle ABC)$, $S(\triangle BKL) = \frac{1}{9}S(\triangle ABC)$. Таким образом, площадь оставшейся части



$$S(\triangle KLM) = \frac{2}{9}S(\triangle ABC).$$

3. Найдите сумму

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{1} + \sqrt{2})} + \frac{1}{(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \\ & + \dots + \frac{1}{(\sqrt[4]{9999} + \sqrt[4]{10000})(\sqrt{9999} + \sqrt{10000})}. \end{aligned}$$

Ответ: 9. Решение. Если домножить числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$ на $\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{n+1}$, получим $\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}$. Указанная сумма преобразуется к $(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{1}) + (\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}) + \dots + (\sqrt[4]{10000} - \sqrt[4]{9999}) = \sqrt[4]{10000} - \sqrt[4]{1} = 9$.

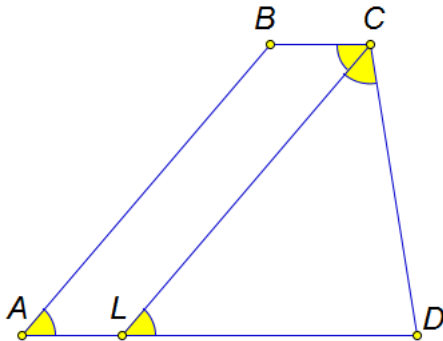
4. В таблице 5x5 расставлены числа (не обязательно целые), причем каждое число в три раза меньше числа, стоящего в соседней клетке справа, и в два раза больше числа, стоящего в соседней клетке снизу. Найдите число, стоящее в центральной клетке, если известно, что сумма всех чисел в таблице равна 11.

		?		

Ответ: $\frac{36}{341}$. Решение. Обозначим число, стоящее в левом нижнем углу за x . Получим уравнение $x(1 + 2 + 4 + 8 + 16)(1 + 3 + 9 + 27 + 81) = 11$, откуда $x = \frac{1}{341}$. Число, стоящее в центре, равно $36x = \frac{36}{341}$.

5. В трапеции $ABCD$ основание AD в четыре раза больше основания BC , а угол $\angle BCD$ в два раза больше угла $\angle BAD$. Найдите отношение $CD : PQ$, где PQ — средняя линия трапеции.

Ответ: 6:5. Решение. Пусть $BC = a$, $AD = 4a$, тогда $PQ = (a+4a)/2 = 2,5a$. Проведем биссектрису CL угла $\angle BCD$ (см. рис.). Она разобьет трапецию на параллелограмм и равнобедренный треугольник $\triangle CLD$ со сторонами $CD = LD = 3a$. Следовательно, $CD : PQ = 3a : 2,5a = 6 : 5$.



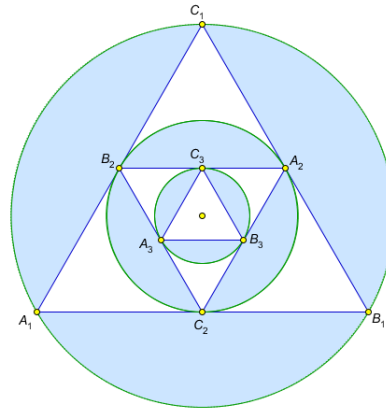
6. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy$ при условии, что $xy + z = 1$ и $x, y, z > 0$.

Ответ: $\frac{8}{3}$. **Решение.** Зафиксируем z и найдем минимум $|x + y|$ при $xy = 1 - z$. Он достигается при $x = y = \sqrt{1 - z}$. Подставляя эти значения в выражение $(x + y)^2 + 3z^2$, получим $4 - 4z + 3z^2$. Это квадратичная функция, которая достигает минимума, равного $\frac{8}{3}$ при $z = \frac{2}{3}$.

7. Дан многочлен $P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, про который известно, что $P(2014) = 1$, $P(2015) = 2$, $P(2016) = 3$, $P(2017) = 4$, $P(2018) = 5$. Найдите $P(2013)$.

Ответ: $-5! = -120$. **Решение.** Рассмотрим многочлен $P(x) - x + 2013$, числа 2014, ... 2018 являются его корнями. Следовательно (т.к. старший коэффициент равен 1) его можно представить как $P(x) - x + 2013 = (x - 2014)(x - 2015) \cdot \dots \cdot (x - 2018)$. Подставляя $x = 2013$, получим $P(2013) - 2013 + 2013 = -120$.

8. Правильный треугольник $\triangle A_1B_1C_1$ вписали в окружность единичного радиуса. В треугольник $\triangle A_1B_1C_1$ вписали окружность и точки касания обозначили A_2, B_2 и C_2 . В треугольник $\triangle A_2B_2C_2$ снова вписали окружность и точки касания обозначили A_3, B_3 и C_3 ... Так сделали 100 раз, в результате образовалось 100 треугольников и 100 окружностей (на рисунке показаны первые 3 шага этого процесса). Найдите общую площадь



всех 300 закрашенных частей.

Ответ: $(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}) \cdot (1 - 4^{-100})$. **Решение.** Заметим, что на каждом шаге размер окружности и треугольника уменьшается в два раза. Поэтому площади указанных частей образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$. Площадь первой из них можно получить отняв от площади окружности $S_{\text{окр.}} = \pi$ площадь правильного треугольника $A_1B_1C_1$, равную $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Сумма геометрической прогрессии равна

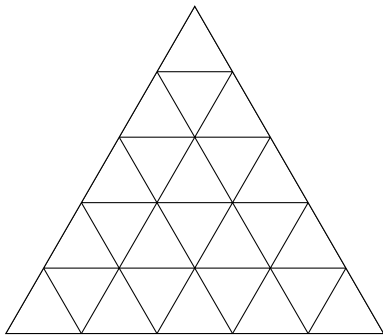
$$b_1 \cdot \frac{q^N - 1}{q - 1} = (\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}) \frac{(1/4)^{100} - 1}{-3/4} = (\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}) \cdot (1 - 4^{-100}).$$

9. Решите уравнение $f(x) = 0$, если известно, что функция $f(x)$ является четной и при любых x, y выполнено равенство $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy + 2014$.

Ответ: $\pm 2\sqrt{1007}$. **Решение.** Подставив $x = y = 0$, получим, что $f(0) = -2014$. Подставим $y = -x$ и воспользуемся четностью $f(x)$, тогда $-2014 = f(0) = 2f(x) - x^2 + 2014$, откуда $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2014$. Приравняв к нулю и решив полученное уравнение, найдем $x = \pm 2\sqrt{1007}$.

Отборочный этап. 8 класс.

1. На рисунке изображена сетка, состоящая из 25 маленьких правильных треугольников.



Сколько ромбов, можно составить из двух соседних маленьких треугольников?

Ответ: 30. **Решение.** Заметим, что каждому ромбу соответствует одно внутреннее ребро. Подсчитав внутренние ребра получаем ответ — 30 ромбов.

2. *Сказка про жадных медвежат.*

Два медвежонка нашли большую круглую головку сыра. Хотели поделить её поровну, но не сумели — каждый боялся, что другому достанется больше. Вдруг откуда ни возьмись подошла к ним лиса.

— Давайте я вам поделю сыр поровну.

— Вот хорошо-то! — обрадовались медвежата. — Дели! Лиса взяла сыр и разломил его на две части, но так, что один кусок был больше другого. Медвежата закричали:

— Этот больше! Лиса успокоила их:

— Сейчас я всё улажу. Она откусила от большей части кусок, равный меньшей части. Теперь большим стал другой кусок.

— И так неровно! — забеспокоились медвежата.

— Ну, полно, — сказала лиса. — Я сама знаю своё дело! И она снова откусила от большей кусок, равный меньшей части.

Лиса продолжала так делить сыр, пока не наелась. Всего она откусила по 3 раза от каждой части таким же образом — откусывая от одной части кусок, равный другой части. А медвежата только чёрными носами водили туда-сюда, туда-сюда: от большего куска — к меньшему, от меньшего — к большему.

Но вот куски сравнялись, а медвежатам почти и сыра не осталось: два маленьких кусочка по 25 граммов каждый.

— Ну что ж, — сказала лиса, — хоть и помалу, да зато поровну! Приятного вам аппетита, медвежата! — И, помахав хвостом, плутовка убежала.

Определите вес головки сыра, найденной медвежатами.

Ответ: 850г. **Решение.** Произведем разбор с конца. В последний момент у медвежат были кусочки по 25г. каждый, значит перед этим были кусочки 50 и 25 грамм. Будем обозначать это $(25, 25) \leftarrow (50, 25)$. Тогда полная последовательность действий будет выглядеть так:

$(25, 25) \leftarrow (50, 25) \leftarrow (50, 75) \leftarrow (125, 75) \leftarrow (125, 200) \leftarrow (325, 200) \leftarrow (325, 525)$. Следовательно, вес головки, которую нашли медвежата, был равен $325 + 525 = 850$.

3. Найдите количество чисел от 1 до 3400, кратных 34 и имеющих ровно 2 нечетных натуральных делителя. Например, само число 34 имеет делители 1, 2, 17 и 34, ровно два из которых нечетные.

Ответ: 7. **Решение.** Очевидно, что если число делится на 34, то его делителями всегда будут 1 и 17. По условию других нечетных делителей быть не должно, следовательно, это должны быть числа вида $17 \cdot 2^k$, $k \geq 1$ (и только они). Эти числа попадают в указанный диапазон при $k = 1, 2, \dots, 7$.

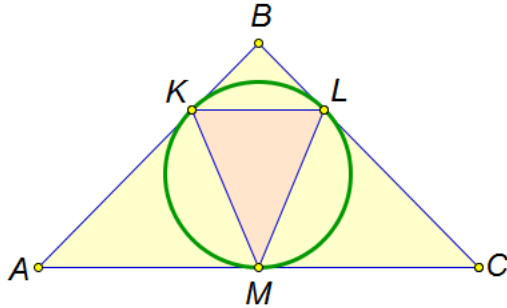
4. Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ меньше дроби $\frac{c}{d}$ и $b > d > 0$. Определите, что меньше: среднее арифметическое этих двух дробей или дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

Ответ: Дробь $\frac{a+c}{b+d}$ меньше. **Решение.** $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow ad(b-d) < bc(b-d) \Leftrightarrow abd + bcd < b^2c + ad^2 \Leftrightarrow 2abd + 2bcd < abd + bcd + b^2c + ad^2 \Leftrightarrow 2(a+c)bd < (ad+bc)(b+d) \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{ad+bc}{2bd} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right)$.

5. В равнобедренный треугольник со сторонами $AB = BC = 3$, $AC = 4$ вписана окружность, касающаяся сторон треугольника в точках K , L и M . Найдите отношение площадей $S(\triangle ABC) : S(\triangle KLM)$.

Ответ: $\frac{9}{2}$. **Решение.** Поскольку треугольник равнобедренный, то вписанная окружность касается основания в середине, поэтому $AM = MC = AK = CL = 2$, $BK = BL = 1$. Найдём площади треугольников (по отношению к площади $\triangle ABC$): $S(\triangle AKM) = S(\triangle CLM) = \frac{1}{3}S(\triangle ABC)$,

$S(\triangle BKL) = \frac{1}{9}S(\triangle ABC)$. Таким образом, площадь оставшейся части $S(\triangle KLM) = \frac{2}{9}S(\triangle ABC)$.



6. Найдите сумму

$$\frac{1}{(\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{1} + \sqrt{2})} + \frac{1}{(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(\sqrt[4]{9999} + \sqrt[4]{10000})(\sqrt{9999} + \sqrt{10000})}.$$

Ответ: 9. Решение. Если домножить числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$ на $\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{n+1}$, получим $\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}$. Указанная сумма преобразуется к $(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{1}) + (\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}) + \dots + (\sqrt[4]{10000} - \sqrt[4]{9999}) = \sqrt[4]{10000} - \sqrt[4]{1} = 9$.

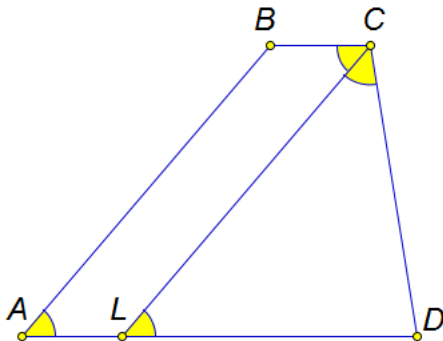
7. В таблице 5×5 расставлены числа (не обязательно целые), причем каждое число в три раза меньше числа, стоящего в соседней клетке справа, и в два раза больше числа, стоящего в соседней клетке снизу. Найдите число, стоящее в центральной клетке, если известно, что сумма всех чисел в таблице равна 341.

		?		

Ответ: $\frac{36}{11}$. **Решение.** Обозначим число, стоящее в левом нижнем углу за x . Получим уравнение $x(1 + 2 + 4 + 8 + 16)(1 + 3 + 9 + 27 + 81) = 341$, откуда $x = \frac{1}{11}$. Число, стоящее в центре, равно $36x = \frac{36}{11}$.

8. В трапеции $ABCD$ основание AD в четыре раза больше основания BC , а угол $\angle BCD$ в два раза больше угла $\angle BAD$. Найдите отношение $CD : PQ$, где PQ — средняя линия трапеции.

Ответ: 6:5. **Решение.** Пусть $BC = a$, $AD = 4a$, тогда $PQ = (a+4a)/2 = 2,5a$. Проведем биссектрису CL угла $\angle BCD$ (см. рис.). Она разобьет трапецию на параллелограмм и равнобедренный треугольник $\triangle CLD$ со сторонами $CD = LD = 3a$. Следовательно, $CD : PQ = 3a : 2,5a = 6 : 5$.



Отборочный этап. 5-7 классы.

1. У отца есть три сына, родившихся в один и тот же день, но в разные годы. Младшему из сыновей 2 года. Через 12 лет возраст отца станет равен сумме возрастов его трех сыновей. Определите нынешний возраст среднего и старшего сыновей, если известно, что отцу сейчас 33 года.

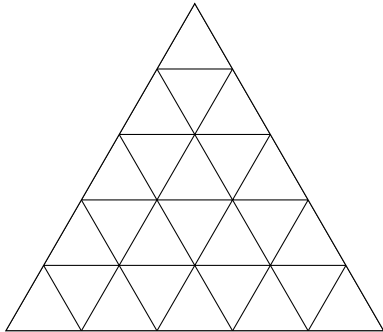
Ответ: 3 и 4. **Решение.** Через 12 лет отцу станет 45 лет, а младшему сыну — 14. Оставшимся сыновьям в сумме будет 31 год. Поскольку возраст каждого более 14 лет, то это возможно только если им 15 и 16 лет. Следовательно, сейчас им 3 и 4 года.

2. Стопку листов формата А4 перегнули посередине и сложили в два раза (получилась брошюра формата А5). После этого перенумеровали страницы получившейся брошюры: 1, 2, 3, ... Оказалось, что сумма чисел на одном из листов равна 74. Сколько листов было в стопке?

Ответ: 9. **Решение.** Заметим, что сумма чисел на каждом листочке одинакова. Если последняя страница имеет номер n , то на первом листочке

будут числа $1, 2, n - 1$ и n . Следовательно $2n + 2 = 74$, откуда получаем, что количество страниц $n = 36$. На каждом листе размещается 4 страницы, значит листов было 9.

3. На рисунке изображена сетка, состоящая из 25 маленьких правильных треугольников.



Сколько ромбов, можно составить из двух соседних маленьких треугольников?

Ответ: 30. Решение. Заметим, что каждому ромбу соответствует одно внутренне ребро. Подсчитав внутренние ребра получаем ответ — 30 ромбов.

4. *Сказка про жадных медвежат.* Два медвежонка нашли большую круглую головку сыра. Хотели поделить её поровну, но не сумели — каждый боялся, что другому достанется больше. Вдруг откуда ни возьмись подошла к ним лиса.

— Давайте я вам поделю сыр поровну.

— Вот хорошо-то! — обрадовались медвежата. — Дели! Лиса взяла сыр и разломала его на две части, но так, что один кусок был больше другого. Медвежата закричали:

— Этот больше! Лиса успокоила их:

— Сейчас я всё улажу. Она откусила от большей части кусок, равный меньшей части. Теперь большим стал другой кусок.

— И так неровно! — забеспокоились медвежата.

— Ну, полно, — сказала лиса. — Я сама знаю своё дело! И она снова откусила от большей кусок, равный меньшей части.

Лиса продолжала так делить сыр, пока не наелась. Всего она откусила по 3 раза от каждой части таким же образом — откусывая от одной части кусок, равный другой части. А медвежата только чёрными носами водили туда-сюда, туда-сюда: от большего куска — к меньшему, от меньшего — к большему.

Но вот куски сравнялись, а медвежатам почти и сыра не осталось: два маленьких кусочка по 20 граммов каждый.

— Ну что ж, — сказала лиса, — хоть и помалу, да зато поровну! Приятного вам аппетита, медвежата! — И, помахав хвостом, плутовка убежала. Определите вес головки сыра, найденной медвежатами.

Ответ: 680г. **Решение.** Произведем разбор с конца. В последний момент у медвежат были кусочки по 20г. каждый, значит перед этим были кусочки 40 и 20 грамм. Будем обозначать это $(20, 20) \leftarrow (40, 20)$. Тогда полная последовательность действий будет выглядеть так:
 $(20, 20) \leftarrow (40, 20) \leftarrow (40, 60) \leftarrow (100, 60) \leftarrow (100, 160) \leftarrow (260, 160) \leftarrow (260, 420)$. Следовательно, вес головки, которую нашли медвежата, был равен $260 + 420 = 680$.

5. В таблице 3х3 написаны следующие числа :

10	20	40
32	61	91
100	1000	2000

Разрешается за один ход менять местами любые два числа. За какое наименьшее количество ходов можно добиться того, чтобы сумма чисел в каждом столбце делилась на 3?

Ответ: 2. **Решение.**

1	2	1
2	1	1
1	1	2

Выпишем остатки от деления этих чисел на 3. Несложно заметить, что сумма чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма соответствующих остатков делится на 3. Остатки, равные 2, надо собрать в одном столбце, на что потребуется не менее 2 ходов. Очевидно, что за 2 хода это сделать можно.

6. Найдите количество чисел от 1 до 3400, кратных 34 и имеющих ровно 2 нечетных натуральных делителя. Например, само число 34 имеет делители 1, 2, 17 и 34, ровно два из которых нечетные.

Ответ: 7. **Решение.** Очевидно, что если число делится на 34, то его делителями всегда будут 1 и 17. По условию других нечетных делителей быть не должно, следовательно, это должны быть числа вида $17 \cdot 2^k$, $k \geq 1$ (и только они). Эти числа попадают в указанный диапазон при $k = 1, 2, \dots, 7$.

7. Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ меньше дроби $\frac{c}{d}$ и $b > d > 0$. Определите, что меньше: среднее арифметическое этих двух дробей или дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

Ответ: Дробь $\frac{a+c}{b+d}$ меньше. **Решение.** $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow ad(b-d) < bc(b-d) \Leftrightarrow abd + bcd < b^2c + ad^2 \Leftrightarrow 2abd + 2bcd < abd + bcd + b^2c + ad^2 \Leftrightarrow 2(a+c)bd < (ad+bc)(b+d) \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{ad+bc}{2bd} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right)$.

Заключительный этап. 10 – 11 классы.

Решения и ответы варианта 151; ответы ко всем вариантам.

Сами варианты приведены ниже.

1. В ящике лежат сто разноцветных шариков: 28 красных, 20 зелёных, 13 жёлтых, 19 синих, 11 белых и 9 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

Ответ: 76. Решение. Наихудший вариант: будет вытащено 14 красных, 14 зелёных, 13 жёлтых, 14 синих, 11 белых и 9 чёрных шариков – всего 75 шариков. Следующий шарик обязательно будет 15-м шариком какого-то одного из цветов: либо красным, либо зеленым, либо синим.

Ответ варианта 152: 109.

Ответ варианта 153: 83.

Ответ варианта 154: 98.

2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = \left(\arcsin \left(\sin \left(\arccos (\cos 3x) \right) \right) \right)^{-5}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$. Решение. Число $\frac{2\pi}{3}$ является периодом функции $\cos 3x$. Так как множество значений функции $z = \arccos(\cos t)$ равно $[0; \pi]$, а функция

$$\arcsin(\sin z) = \begin{cases} z, & \text{при } 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - z, & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq z \leq \pi, \end{cases} \quad \text{то } \frac{\pi}{3} \text{ будет периодом функции } y. \text{ Так как точки вида}$$

$\frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$ не принадлежат области определения функции y , то $\frac{\pi}{3}$ – наименьший период.

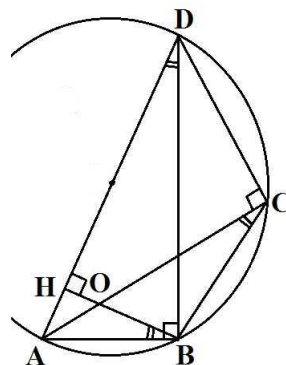
Ответ варианта 152: $\frac{\pi}{4}$.

Ответ варианта 153: $\frac{\pi}{6}$.

Ответ варианта 154: $\frac{\pi}{4}$.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и DB перпендикулярны сторонам DC и AB соответственно. Из точки B проведён перпендикуляр на сторону AD , пересекающий AC в точке O . Найдите AO , если $AB = 4$, $OC = 6$.

Ответ: 2. Решение. Так как $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, то четырёхугольник вписан в окружность с диаметром AD . Поэтому $\angle ACB = \angle ADB$ – как опирающиеся на одну дугу. Так как BH – высота в прямоугольном $\triangle ABD$, то $\angle ADB = \angle ABH$. Тогда треугольники ABO и ACB подобны по двум углам, и выполняются соотношения: $\frac{AB}{AO} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{4}{AO} = \frac{AO+6}{4}$
 $\Leftrightarrow AO^2 + 6AO - 16 = 0 \Leftrightarrow AO = -8$ или $AO = 2$. Ответ: $AO = 2$.



Ответ варианта 152: 9.

Ответ варианта 153: 1.

Ответ варианта 154: 12.

4. Найдите наибольшее значение $x + y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \geq 1.$$

Ответ: $1 + \sqrt{2}$ **Решение.** Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} y - \frac{x^2 + y^2}{2} \geq 0, \\ \frac{x^2 + y^2}{2} - 1 < 0, \\ (x; y) \neq (0; 0), \\ x^2 + y^2 \neq 2, \\ y > 0. \end{cases}$$

Множеством решений этой системы являются пары точек $(x; y)$, лежащие внутри верхнего полукруга (без границы) $x^2 + y^2 = 2$, $y > 0$, но вне круга $x^2 + (y-1)^2 = 1$ или внутри круга $x^2 + (y-1)^2 = 1$, но вне верхнего полукруга (без границы) $x^2 + y^2 = 2$, $y > 0$.

Найдём максимальное значение суммы $x + y$. Уравнение $x + y = a$ задаёт семейство параллельных прямых, пересекающих ось OX под углом 135° . Максимальное значение a , при котором прямая из этого семейства имеет непустое пересечение с множеством решения неравенства, находится из условия касания прямой $x + y = a$ и окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Его можно найти либо из геометрических соображений, либо подставив $y = a - x$ в уравнение окружности и определив a , при котором дискриминант равен нулю. При этом из двух значений $a = 1 \pm \sqrt{2}$ выбираем наибольшее: $a = 1 + \sqrt{2}$. Необходимо проверить, что при таком a прямая не пересекает окружность $x^2 + y^2 = 2$, что гарантирует, что касание первой окружности нашим семейством прямых происходит раньше касания второй.

Ответ варианта 152: $-1 - \sqrt{2}$.

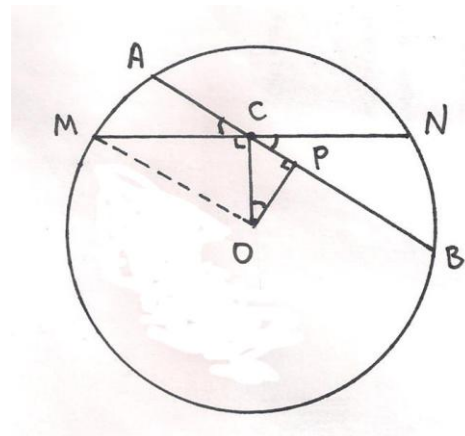
Ответ варианта 153: $-1 - \sqrt{2}$.

Ответ варианта 154: $1 + \sqrt{2}$.

5. Отрезок $AB = 8$ пересекает плоскость α под углом 30° и делится этой плоскостью в отношении $1:3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A и B и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

Ответ: $2\sqrt{7}$. **Решение.** Обозначив точку пересечения AB с плоскостью α через C , получим $AC = 2$, $BC = 6$. В пересечении сферы с плоскостью получается некоторая окружность. Проведём через C диаметр MN этой окружности. Тогда AB и MN – хорды сферы, и по свойству пересекающихся хорд: $MC \cdot CN = AC \cdot CB = 12$. Так как $MN = MC + CN \geq 2\sqrt{MC \cdot CN} = 4\sqrt{3}$, то минимальный радиус окружности больше или равен $2\sqrt{3}$ и значение $2\sqrt{3}$ достигается при $MC = CN = 2\sqrt{3}$, то есть C – центр этой окружности.

Так как $\angle COP = 90^\circ - \angle OCP = \angle NCP = 30^\circ$, то



$OC = 2 \cdot CP$. При этом $CP = \frac{AB}{2} - AC = 2$. Значит, $R^2 = OM^2 = MC^2 + OC^2 = 12 + 4^2 = 28$.

Ответ варианта 152: $2\sqrt{19}$.

Ответ варианта 153: $2\sqrt{13}$.

Ответ варианта 154: $\sqrt{39}$.

6. Для любого натурального n и для любого набора чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ из отрезка $[0; 3]$ уравнение $\sum_{i=1}^n |x - x_i| = an$ имеет решение x , принадлежащее отрезку $[0; 3]$. Укажите, какие из следующих значений a удовлетворяют этому условию:

а) $a = 0$, б) $a = \frac{3}{2}$, в) $a = 2$.

Ответ: только $a = \frac{3}{2}$. **Решение.** Для доказательства невозможности любого a , кроме

$a = \frac{3}{2}$, можно привести пример: $n = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Тогда $\sum_{i=1}^n |x - x_i| = |x - 0| + |x - 3| = 3$ для любого $x \in [0; 3]$, и получающееся уравнение $3 = 2a$ не имеет решений при всех a , кроме для $a = \frac{3}{2}$. Теперь докажем, что при $a = \frac{3}{2}$ решения всегда будут.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n |x - x_i|$. Тогда $f(0) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$,

$0 \leq f(0) \leq 3$.

$$f(3) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n |3 - x_i| = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (3 - x_i) = \frac{1}{n} \cdot \left(3n - \sum_{i=1}^n x_i \right) = 3 - f(0), \quad 0 \leq f(3) \leq 3.$$

Значит, $f(0) + f(3) = 3$, при этом одно из слагаемых не меньше, чем $\frac{3}{2}$, а другое не больше, чем $\frac{3}{2}$, и $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0; 3]$. Поэтому обязательно найдётся значение x , при котором $f(x) = \frac{3}{2}$.

Ответ варианта 152: только $a = 2$.

Ответ варианта 153: только $a = \frac{5}{2}$.

Ответ варианта 154: только $a = 3$.

7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 6, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2 \arcsin \frac{1}{3}$?

Ответ: $5\sqrt{23}$. **Решение.** Введём обозначения: a – длина ребра основания, $SA = x$, $SB = y$ и $SC = z$ – длины боковых рёбер, α – величина плоского угла при вершине S , SO – высота пирамиды, $h = AA_1$ – высота основания.

Из теоремы косинусов для боковых граней следует
$$\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha, \\ a^2 = y^2 + z^2 - 2zy \cos \alpha, \\ a^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos \alpha. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получаем, что $(x-z)(x+z) = 2(x-z)y \cos \alpha$. Следовательно, возможны два случая: 1) $x = z$; 2) $x + z = 2y \cos \alpha$ (откуда следует, что $\cos \alpha > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$). Если все величины x, y и z раз-

личны, то с необходимостью получаем
$$\begin{cases} x + y = 2z \cos \alpha, \\ y + z = 2x \cos \alpha, \\ x + z = 2y \cos \alpha, \end{cases}$$
 откуда следует, что $x - z = 0$, т.е.

по крайней мере две из величин x, y и z равны.

Рассмотрим два случая: 1) $x = y = z$; 2) $y = z \neq x$.

В первом случае пирамида $SABC$ правильная и её объём равен $V_1 = \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{\frac{1}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{12}}$

($S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, $SA_1 = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$, $A_1O = \frac{h}{3} = \frac{a \sqrt{3}}{6}$, следовательно $SO = a \sqrt{\frac{1}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{12}}$). Получаем,

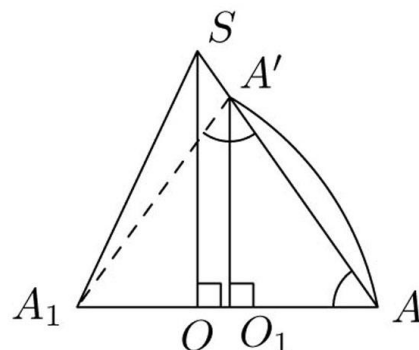
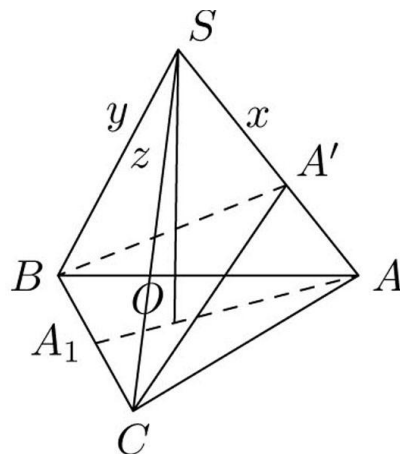
что объём является убывающей функцией по α и у правильной пирамиды он будет минимальным при $\alpha = 2 \arcsin \frac{1}{3}$. При $a = 6$ получаем, что $h = 3\sqrt{3}$, $SO = \sqrt{69}$, $S_{\text{осн}} = 9\sqrt{3}$ и $V_{SABC} = 9\sqrt{23}$.

Второй случай. Если $y = z \neq x$, то получаем пирамиду $SBCA'$, где точки A и A' лежат на одной окружности с центром в точке A_1 и радиусом, равным длине отрезка AA_1 , то есть $A_1A' = A_1A = h$. Треугольник $A'BC$ – правильный и $V_{SA'BC} < V_{SABC}$. Найдём объём пирамиды $A'ABC$. Для этого достаточно найти её высоту $A'O_1$. Построим сечение пирамиды плоско-

стью (SA_1A) . $A'O_1 = h \sin(\pi - 2\angle A_1AA') = h \sin 2\angle A_1AA' = \frac{2h \cdot \operatorname{tg} \angle A_1AA'}{1 + \operatorname{tg}^2 \angle A_1AA'} = \frac{12h^2 \cdot SO}{4h^2 + 9SO^2} = \frac{4\sqrt{69}}{9}$,

поскольку $\operatorname{tg} \angle A_1AA' = \frac{3SO}{2h}$.

Окончательно получаем, что $V_{A'ABC} = 4\sqrt{23}$ и $V_{SA'BC} = V_{SABC} - V_{A'ABC} = 5\sqrt{23}$.



Ответ варианта 152: $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Ответ варианта 153: $21\sqrt{39}$.

Ответ варианта 154: $32\sqrt{11}$.

8. Маша, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Маши числа перестали меняться, и тогда она остановилась.

а) Какое число оказалось у Маши в конце?

б) Какое наименьшее число могло быть у Маши в самом начале (укажите две его последние цифры)?

Ответ: а) 17; б) 09 (число 100...0009).

Решение. а) Пусть это число n , оканчивающееся на цифру y . Тогда $n = 10x + y$ после очередной операции станет равным $3x + 2y$. Равенство $10x + y = 3x + 2y$ равносильно $7x = y$ и, так как y – цифра, то $y = 7$, $x = 1$. Поэтому $n = 17$.

б) Заметим, что если исходное число не равно 17, то оно обязательно уменьшается: $10x + y > 3x + 2y \Leftrightarrow 7x > y$ (что для $x \neq 0$ и $x \neq 1$ всегда верно). Из соотношения $2(10x + y) = 17x + 3x + 2y$ следует, что число $10x + y$ делится на 17 тогда и только тогда, когда $3x + 2y$ делится на 17. Поскольку стабилизация операции происходит на числе 17, то исходное число также должно делиться на 17.

Найдём наименьшее 2015-значное число, которое делится на 17. Для удобства выпишем остатки степеней 10 при делении на 17 (см. таблицу):

Степень	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Остаток	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	12	1	10

Так как через каждые 17 степеней остатки повторяются, а $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ (эта запись означает, что 10^{16} и 1 дают одинаковые остатки при делении на 17), и $2014 = 16 \cdot 125 + 14$, то $10^{2014} \equiv 10^{14} \equiv 8 \pmod{17}$, то $10^{2014} + 9$ делится на 17 нацело. Это и будет наименьшее 2015-значное число, делящееся нацело на 17. Оно оканчивается на 09.

Ответ варианта 152: а) 17; б) 99 (число 999...9999).

Ответ варианта 153: а) 17; б) 05 (число 100...0005)..

Ответ варианта 154: а) 17; б) 88 (число 999...9988)..

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Задания заключительного этапа 2014/2015 учебного года для 10–11 класса

Вариант 151

1. В ящике лежат сто разноцветных шариков: 28 красных, 20 зелёных, 13 жёлтых, 19 синих, 11 белых и 9 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = \left(\arcsin \left(\sin \left(\arccos (\cos 3x) \right) \right) \right)^{-5}.$$

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и DB перпендикулярны сторонам DC и AB соответственно. Из точки B проведён перпендикуляр на сторону AD , пересекающий AC в точке O . Найдите AO , если $AB = 4$, $OC = 6$.

4. Найдите наибольшее значение $x + y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \geq 1.$$

5. Отрезок $AB = 8$ пересекает плоскость α под углом 30° и делится этой плоскостью в отношении $1:3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A и B и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

6. Для любого натурального n и для любого набора чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ из отрезка $[0; 3]$ уравнение

$$\sum_{i=1}^n |x - x_i| = an$$
 имеет решение x , принадлежащее отрезку $[0; 3]$. Укажите, какие из следующих значений a удовлетворяют этому условию:

а) $a = 0$, б) $a = \frac{3}{2}$, в) $a = 2$.

7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 6, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2 \arcsin \frac{1}{3}$?

8. Маша, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Маши числа перестали меняться, и тогда она остановилась.

а) Какое число оказалось у Маши в конце?

б) Какое наименьшее число могло быть у Маши в самом начале (укажите две его последние цифры)?

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Задания заключительного этапа 2014/2015 учебного года для 10–11 класса

Вариант 152

1. В ящике лежат 120 разноцветных шариков: 31 красный, 24 зелёных, 29 жёлтых, 21 синий и 15 белых. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 25 шариков одного цвета?

2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = \left(\arcsin \left(\sin \left(\arccos (\cos 4x) \right) \right) \right)^{-3}.$$

3. Из вершины L выпуклого четырёхугольника $KLMN$ проведён перпендикуляр на сторону KN , пересекающий диагональ KM в точке O так, что $KO = 3$. Найдите OM , если $KL = 6$, $NL \perp KL$, $KM \perp MN$.

4. Найдите наименьшее значение $x - y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}}(-x) \geq 1.$$

5. Отрезок $MN = 16$ пересекает плоскость α под углом 60° и делится этой плоскостью в отношении 1:7. Найдите радиус сферы, проходящей через точки M и N и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

6. Для любого натурального n и для любого набора чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ из отрезка $[0; 4]$ уравнение

$$\sum_{i=1}^n |x - x_i| = an$$
 имеет решение x , принадлежащее отрезку $[0; 4]$. Укажите, какие из следующих значений a удовлетворяют этому условию:

а) $a = 1$, б) $a = 2$, в) $a = 4$.

7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 2, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2 \arcsin \frac{1}{4}$?

8. Петя, скучая на уроке математики, проделал с некоторым 2016-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа он отбросил последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавил удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом он опять проделал ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Пети числа перестали меняться, и тогда он остановился.

а) Какое число оказалось у Пети в конце?

б) Какое наибольшее число могло быть у Пети в самом начале (укажите две его последние цифры)?

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Задания заключительного этапа 2014/2015 учебного года для 10–11 класса

Вариант 153

1. В ящике лежат сто разноцветных шариков: 26 красных, 22 зелёных, 18 жёлтых, 13 синих, 11 белых и 10 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 17 шариков одного цвета?

2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = \left(\arcsin \left(\sin \left(\arccos (\cos 6x) \right) \right) \right)^{-1}.$$

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и DB перпендикулярны сторонам DC и AB соответственно. Из точки B проведён перпендикуляр на сторону AD , пересекающий AC в точке O . Найдите AO , если $AB = 2$, $OC = 3$.

4. Найдите наименьшее значение $x + y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}}(-y) \geq 1.$$

5. Отрезок $AB = 10$ пересекает плоскость α под углом 30° и делится этой плоскостью в отношении $1:4$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A и B и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

6. Для любого натурального n и для любого набора чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ из отрезка $[0; 5]$ уравнение

$$\sum_{i=1}^n |x - x_i| = an$$
 имеет решение x , принадлежащее отрезку $[0; 5]$. Укажите, какие из следующих значений a удовлетворяют этому условию:

а) $a = 1$, б) $a = \frac{5}{2}$, в) $a = 5$.

7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 12, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2 \arcsin \frac{3}{8}$?

8. Миша, скучая на уроке математики, проделал с некоторым 2016-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа он отбросил последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавил удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом он опять проделал ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Миши числа перестали меняться, и тогда он остановился.

а) Какое число оказалось у Миши в конце?

б) Какое наименьшее число могло быть у Миши в самом начале (укажите две его последние цифры)?

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Задания заключительного этапа 2014/2015 учебного года для 10–11 класса

Вариант 154

1. В ящике лежат 120 разноцветных шариков: 30 красных, 19 зелёных, 32 жёлтых, 21 синий и 18 белых. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 21 шарика одного цвета?

2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = \left(\arcsin \left(\sin \left(\arccos (\cos 4x) \right) \right) \right)^{-7}.$$

3. Из вершины L выпуклого четырёхугольника $KLMN$ проведён перпендикуляр на сторону KN , пересекающий диагональ KM в точке O так, что $KO = 4$. Найдите OM , если $KL = 8$, $NL \perp KL$, $KM \perp MN$.

4. Найдите наибольшее значение $x - y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} x \geq 1.$$

5. Отрезок $MN = 12$ пересекает плоскость α под углом 60° и делится этой плоскостью в отношении $1:3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки M и N и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

6. Для любого натурального n и для любого набора чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ из отрезка $[0; 6]$ уравнение

$$\sum_{i=1}^n |x - x_i| = an$$
 имеет решение x , принадлежащее отрезку $[0; 6]$. Укажите, какие из следующих значений a удовлетворяют этому условию:

а) $a = 0$, б) $a = 3$, в) $a = 4$.

7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 8, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2 \arcsin \frac{1}{4}$?

8. Аня, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Ани числа перестали меняться, и тогда она остановилась.

а) Какое число оказалось у Ани в конце?

б) Какое наибольшее число могло быть у Ани в самом начале (укажите две его последние цифры)?

9 марта 2015 г.

Заключительный этап. 9 класс.

1. В некоторой стране алфавит состоит из трёх букв: «М», «Г» и «У». Словом называется любая состоящая из этих букв конечная последовательность, в которой две согласные не могут стоять рядом и две гласные не могут стоять рядом. Сколько в этой стране состоящих из 200 букв слов, которые содержат каждую из трёх букв хотя бы по разу?

Ответ: $2^{101} - 4$. **Решение.** Разобравшись со структурой слов, приходим к рассмотрению трёх случаев.

1) Первая буква М. Тогда вторая — У, третья — Г или М, четвертая — У, пятая — Г или М, ..., 200-я — У. Таких слов будет 2^{99} . 2) Аналогично, если первая буква — Г.

3) Первая буква У. Тогда вторая — Г или М, третья — У, четвертая — Г или М, ..., 200-я — Г или М. Таких слов будет 2^{100} .

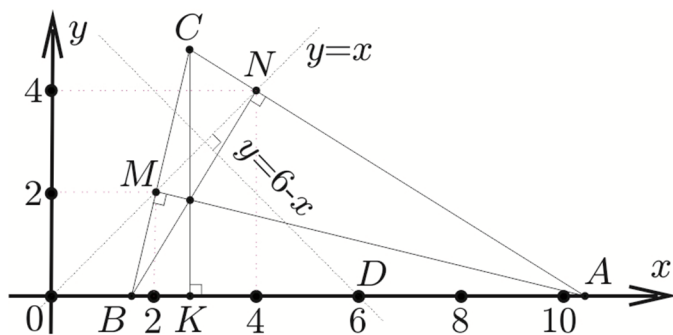
Всего слов: $2^{99} + 2^{99} + 2^{100} = 2^{101}$. Отсюда нужно убрать 4 слова: МУ-МУ...МУ, ГУГУ...ГУ, УМУМ...УМ и УГУГ...УГ (в каждом из них нет одной из букв).

2. График квадратичной функции $f(x) = x^2 + 2px - p^2 + 7p - 2015$ пересекает координатные оси в трех точках: А, В и С. Найдите значение p , при котором произведение длин отрезков $OA \times OB \times OC$ будет наименьшим.

Ответ: $p = \frac{7}{2}$. **Решение.** Для того, чтобы парабола пересекала в трех точках необходимо, чтобы уравнение имело два различных корня x_1 и x_2 . Несложно проверить, что для данного трехчлена дискриминант всегда положителен. Тогда произведение $OA \times OB \times OC = |x_1| \cdot |x_2| \cdot |f(0)|$. Применяв теорему Виета, получим, что это произведение равно квадрату свободного члена. Значит оно минимально, когда минимален $(-p^2 + 7p - 2015)^2$, что будет при $p = \frac{7}{2}$.

3. В треугольнике $\triangle ABC$, основание AB которого лежит на оси абсцисс, проведены высоты AM , BN и CK . Найдите длину основания AB , если известны координаты точек $M(2, 2)$ и $N(4, 4)$.

Ответ: $AB = 4\sqrt{5}$. **Решение.**



Опирающаяся на AB как на

диаметр окружность содержит точки M и N (см. рис.). Её центр D равноудалён от M и N . Так как прямая MN имеет вид $y = x$, то перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину MN — точку $(3, 3)$ — имеет вид $y = 6 - x$. Значит, середина AB — точка D — имеет координаты $(6, 0)$. Точка D равноудалена от точек A, B, M и N . При этом $DM^2 = DN^2 = 4^2 + 2^2 = 20$. Значит, $BD = AD = 2\sqrt{5}$, и длина основания равна $AB = 4\sqrt{5}$.

4. Все натуральные числа разбили на «хорошие» и «плохие» по следующим правилам:

а) Из любого плохого числа можно вычесть некоторое натуральное число, не превосходящее его половины так, чтобы получившаяся разность стала «хорошей».

б) Из «хорошего» числа нельзя вычесть не более половины, так, чтобы оно осталось «хорошим».

Известно, что число 1 — «хорошее». Найдите ближайшее к 2015 хорошее число.

Ответ: 2047. **Решение.** Рассмотрев несколько первых натуральных чисел заметим, что хорошие числа имеют вид $2^n - 1$ (а $2^n, \dots, 2n + 1 - 2$ — плохие).

Докажем это по методу математической индукции. Для $n = 1$ утверждение дано в условии. Предположим, что утверждение доказано для $n - 1$. Рассмотрим число вида $M = 2^n + k$, где $k = 0, 1, \dots, 2^n - 2$. Тогда из такого числа можно вычесть $k + 1 \leq \frac{1}{2}(2^n + k) = \frac{M}{2}$.

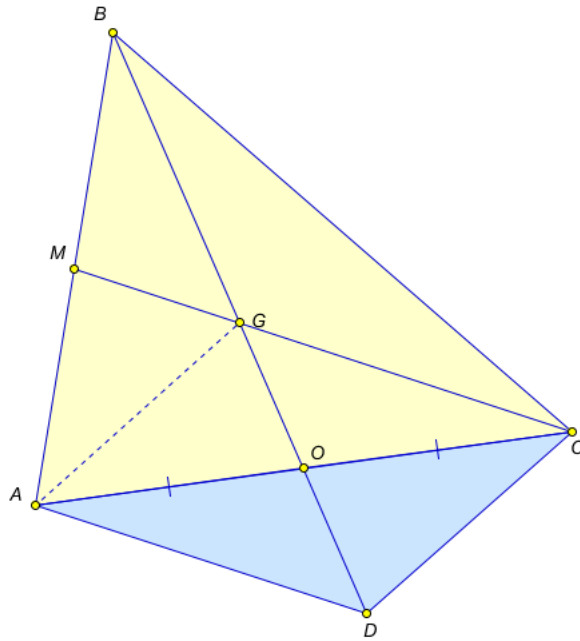
С другой стороны, рассмотрим число вида $N = 2^n - 1$. Из него надо вычесть по крайней мере 2^{n-1} , что превосходит $\frac{N}{2} = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$.

Значит ближайшим хорошим числом к 2015 будет число $2047 = 2^{11} - 1$.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ площади треугольников ABD и BCD равны, а площадь ACD равна половине площади ABD . Найдите длину отрезка CM , где M — середина стороны AB , если известно, что $AD = 12$.

Ответ: $CM = 18$. **Решение.** Из равенства площадей ABC и CBD вытекает, что O — точка пересечения диагоналей AC и BD делит AC пополам (см. рис). А из того, что $S(ACD) = \frac{1}{2}S(ABD)$ следует, что $S(AOD) = \frac{1}{3}S(AOB)$, следовательно, $OD = \frac{1}{3}BO = GO$, где G — точка пересечения медиан треугольника ABC .

Значит $AGCD$ — параллелограмм, поэтому $AD = CG = \frac{2}{3}CM = 12$, откуда $CM = 18$.



6. Последовательность задана рекуррентным соотношением: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} + 3$. Может ли число $a_{2015} - a_{2011} - 39$ быть простым?

Ответ: Нет, это число будет кратно $a_{2011} > 1$. **Решение.** Покажем, что это число будет кратно a_{2011} . Действительно, рассмотрим остатки от деления на a_{2011} последующих членов. Очевидно, a_{2012} и a_{2013} дают остатки 3, $a_{2014} - 12$, а $a_{2015} - 39$. Следовательно, $a_{2015} - a_{2011} - 39$ делится на a_{2011} без остатка.

7. Найдите решение системы в натуральных числах
$$\begin{cases} a^3 + b = c(a^2 + b^2) \\ a + b^3 = d(a^2 + b^2) \end{cases}$$

Ответ: $a = b = c = d = 1$. **Решение.** Сначала докажем, что $(a, b) = 1$. Действительно, предположим, что $(a, b) = d > 1$. Тогда из первого уравнения $b = c(a^2 + b^2) - a^3 : d^2$. Аналогично из второго уравнения $a : d^2$, что приводит к противоречию.

Заметим, что числа $a(a^2 + b^2) - (a^3 + b) = b(ab - 1)$ и $b(a^2 + b^2) - (a + b^3) = a(ab - 1)$ кратны $a^2 + b^2$. Следовательно, $ab - 1$ должно делиться на $a^2 + b^2$, что возможно только при $a = b = 1$.

Заключительный этап. 8 класс.

1. На день рождения Андрея последней пришла Яна, подарившая ему мяч, а предпоследним — Эдуард, подаривший ему калькулятор. Испытывая

калькулятор, Андрей заметил, что произведение количества всех его подарков на количество подарков, которые у него были до прихода Эдуарда, ровно на 16 больше, чем произведение его возраста на количество подарков, которые у него были до прихода Яны. Сколько подарков у Андрея?

Ответ: 18. **Решение.** Если n — число подарков, а a — возраст Андрея, то $n(n-2) = a(n-1)$. Отсюда $a = \frac{n^2-2n-16}{n-1} = n-1 - \frac{17}{n-1}$. Поэтому $n-1 = 17$, $a = 16$.

2. В равностороннем треугольнике ABC на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2 , так, что $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$. На стороне AC выбрана точка B_1 , так, что $AB_1 : B_1C = 1 : 2$. Найдите сумму углов $\angle AA_1B_1 + \angle AA_2B_1$.

Ответ: 30° . **Решение.** Поскольку $A_1B_1 \parallel AB$, то $\angle BAA_1 = \angle AA_1B_1$. Из симметрии $\angle BAA_1 = \angle CAA_2$. Остается заметить, что $\angle CB_1A_2 = \angle B_1AA_2 + \angle AA_2B_1$ как внешний в $\triangle AA_2B_1$.

3. Все натуральные числа разбили на «хорошие» и «плохие» по следующим правилам:

а) Из любого плохого числа можно вычесть некоторое натуральное число, не превосходящее его половины так, чтобы получившаяся разность стала «хорошей».

б) Из «хорошего» числа нельзя вычесть не более половины, так, чтобы оно осталось «хорошим».

Известно, что число 1 — «хорошее». Найдите ближайшее к 2015 хорошее число.

Ответ: 2047. **Решение.** Заметим, что хорошие числа имеют вид $2^n - 1$. Действительно, пусть число имеет вид $M = 2^n + k$, где $k = 0, 1, \dots, 2^n - 2$. Тогда из такого числа можно вычесть $k + 1 \leq \frac{1}{2}(2^n + k) = \frac{M}{2}$. С другой стороны из числа вида $N = 2^n - 1$ надо вычесть по крайней мере 2^{n-1} , что превосходит $\frac{N}{2} = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$. Значит ближайшим к 2015 будет число $2047 = 2^{11} - 1$.

4. В треугольнике $\triangle ABC$, основание AB которого лежит на оси абсцисс, проведены высоты AM , BN и CK . Найдите длину основания AB , если известны координаты точек $M(2, 2)$ и $N(4, 4)$.

Ответ: $AB = 4\sqrt{5}$. **Решение.** Опирающаяся на AB как на диаметр окружность содержит точки M и N . Её центр D равноудалён от M и N . Так как прямая MN имеет вид $y = x$, то перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину MN — точку $(3, 3)$ — имеет вид $y = 6 - x$. Значит, середина AB — точка D — имеет координаты $(6, 0)$. Точка D

- Решение.** Разобравшись со структурой слов, приходим к рассмотрению трёх случаев.

- Всего слов: $2^{99} + 2^{99} + 2^{100} = 2^{101}$. Отсюда нужно убрать 4 слова: МУ-МУ...МУ, ГУГУ...ГУ, УМУМ...УМ и УГУГ...УГ (в каждом из них нет одной из букв).

- Ответ:** $p = \frac{7}{2}$. **Решение.** Для того, чтобы парабола пересекала в трех точках необходимо, чтобы уравнение имело два различных корня x_1 и x_2 . Несложно проверить, что для данного трехчлена дискриминант всегда положителен. Тогда произведение $OA \times OB \times OC = |x_1| \cdot |x_2| \cdot |f(0)|$. Применяв теорему Виета, получим, что это произведение равно квадрату свободного члена. Значит оно минимально, когда минимален $(-p^2 + 7p - 2015)^2$, что будет при $p = \frac{7}{2}$.

Заключительный этап. 5-7 классы.

1. В полном контейнере находятся 150 арбузов и дынь на общую сумму 24 тыс. рублей, при этом все арбузы суммарно стоят столько же, сколько все дыни. Сколько рублей стоит один арбуз, если известно, что дынь (без арбузов) контейнер вмещает 120 штук, а арбузов (без дынь) — 160?

Ответ: 100 руб. **Решение.** Пусть было x арбузов, тогда дынь будет $150 - x$. Если контейнер вмещает 120 дынь, то одна дыня занимает $\frac{1}{120}$ часть контейнера. Аналогично один арбуз занимает $\frac{1}{160}$ часть контейнера. Поэтому, если в контейнере всего 150 арбузов и дынь (и при этом контейнер полон), то $\frac{x}{160} + \frac{150-x}{120} = 1$. Отсюда $x = 120$. Значит, было 120 арбузов и 30 дынь. Если арбуз стоит a рублей, а дыня — b рублей, то (так как стоимость арбузов и дынь одинакова): $120a = 30b = 12000$. Поэтому $a = 100$, $b = 400$.

2. Для двух положительных чисел $a \neq b$ известно, что

$$a^2 - 2015a = b^2 - 2015b.$$

Какое наименьшее значение может принимать $a^2 + b^2$?

Ответ: $2015^2/2 = 2030112,5$. **Решение.** Переносим и сокращая на $a - b \neq 0$, получим $a + b = 2015$. Тогда $a^2 + b^2 = a^2 + (2015 - a)^2 = 2a^2 - 2030a + 2015^2$ и наименьшее значение достигается в вершине параболы $2x^2 + 4030x + 2015^2$, т.е. когда $a = b = 2015/2$.

3. Таблицу размера 3×3 надо заполнить числами 2014, 2015 и 2016, так, чтобы сумма чисел в каждой строке была одинаковой. Сколькими различными способами можно это сделать?

Ответ: 831. **Решение.** Вычтем 2015 из всех чисел — суммы при этом останутся одинаковыми, а числа в таблице будут принимать значения 0 и ± 1 . Рассмотрим 27 возможных комбинаций чисел, находящихся в одной строке. Возможные значения суммы этих чисел: ± 3 — по 1 комбинации, ± 2 — по 3 комбинации, ± 1 — по 6 комбинаций, 0 — 7 комбинаций. Тогда указанную в условии расстановку можно сделать $2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 6^3 + 7^3 = 831$ способом.

4. На день рождения Андрея последней пришла Яна, подарившая ему мяч, а предпоследним — Эдуард, подаривший ему калькулятор. Испытывая калькулятор, Андрей заметил, что произведение количества всех его подарков на количество подарков, которые у него были до прихода Эдуарда, ровно на 16 больше, чем произведение его возраста на количество

подарков, которые у него были до прихода Яны. Сколько подарков у Андрея?

Ответ: 18. **Решение.** Если n — число подарков, а a — возраст Андрея, то $n(n - 2) = a(n - 1)$. Отсюда $a = \frac{n^2 - 2n - 16}{n - 1} = n - 1 - \frac{17}{n - 1}$. Поэтому $n - 1 = 17$, $a = 16$.

5. В равностороннем треугольнике ABC на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2 , так, что $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$. На стороне AC выбрана точка B_1 , так, $AB_1 : B_1C = 1 : 2$. Найдите сумму углов $\angle AA_1B_1 + \angle AA_2B_1$.

Ответ: 30° . **Решение.** Поскольку $A_1B_1 \parallel AB$, то $\angle BAA_1 = \angle AA_1B_1$. Из симметрии $\angle BAA_1 = \angle CAA_2$. Остается заметить, что $\angle CB_1A_2 = \angle B_1AA_2 + \angle AA_2B_1$ как внешний в $\triangle AA_2B_1$.

6. Найдите наибольшее возможное значение $\text{НОД}(x + 2015y, y + 2015x)$, если известно, что x и y — взаимно простые числа.

Ответ: $2015^2 - 1 = 4060224$. **Решение.** Заметим, что общий делитель будет также делить $(x + 2015y) - 2015(y + 2015x) = (1 - 2015^2)x$. Аналогично он делит $(1 - 2015^2)y$, а поскольку $(x, y) = 1$, то он делит $(1 - 2015^2)$. С другой стороны, если взять $x = 1$, $y = 2015^2 - 2016$, то как раз и получим $\text{НОД}(x + 2015y, y + 2015x) = 2015^2 - 1$.