Задания для заочного тура олимпиады «Ломоносов» по робототехнике – 2014 с решениями и указаниями

10—11 классы

1. Робот-пылесос имеет форму цилиндра диаметром 30 см. Робот умеет совершать два маневра: двигаться по прямой и поворачиваться на месте. В комнате лежит девять шариков диаметром 1 см: три ряда по три шарика, расстояние между рядами и шариками в ряду равны 1 м (см. рисунок).

Чтобы пылесос засосал шарик, тот должен оказаться точно под центром пылесоса. Какое минимальное количество поворотов должен совершить робот-пылесос, чтобы собрать все девять шариков?
Ответ: 3.
Указание: см. рисунок.

2. Тело брошено вертикально вверх с высоты 20 м с начальной скоростью 3 м/с. На какой высоте окажется тело через 2 с после начала движения? Сопротивлением воздуха можно пренебречь, а ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.
Ответ: 6 м.
Решение.
Ускорение тела постоянно:
$$a(t) = -g.$$
Скорость тела меняется линейно по времени:
$$v(t) = -gt + v(0).$$
Высота, соответственно, изменяется следующим образом:
$$h(t) = -g\frac{t^2}{2} + v(0)t + h(0) = -5t^2 + 3t + 20.$$
Таким образом, при $t = 2$ получаем
$$h(2) = 6.$$

3. В программе на языке Бейсик, фрагмент которой представлен ниже, описан одномерный целочисленный массив **A** с индексами от 1 до 10 и целочисленные переменные ***k***, ***i***:

```
FOR i=1 TO 10
      A(i)=5*i
NEXT i

FOR i=1 TO 10
      k=a(i)-2
      A(10-i+1)=k
NEXT i
```

Чему будут равны элементы массива **A** после выполнения фрагмента программы?

Ответ: [1 6 11 16 21 23 18 13 8 3].

4. Саша решил запрограммировать своего робота так, чтобы он мог собирать различные фигуры из семи элементов кубиков сома.

Саша быстро запрограммировал робота, чтобы он собирал куб 3x3x3. Сможет ли Саша запрограммировать робота собирать следующую фигуру?

Ответ: нет, не сможет.

Решение.

Покрасим кубики, стоящие в центральном столбике и отстоящих от него по диагонали в черный цвет:

Таким образом получится, что черных кубиков – 19 штук, а синих – 8 штук.

Рассмотрим какое максимальное количество черных кубиков может иметь каждый из семи элементов, если из них составлена заданная фигура, раскрашенная вышеописанным способом:

Номер элемента	1	2	3	4	5	6	7
Максимальное количество черных кубиков	2	3	3	2	3	3	2

Значит, максимальное суммарное количество черных кубиков у семи элементов равно 18, что на один меньше, чем имеет фигура.

5. Два судна движутся прямолинейно и равномерно в один и тот же порт. В начальный момент времени положения судов и порта образуют равносторонний треугольник.
После того как второе судно прошло 80 км – прямоугольный треугольник. В момент прибытия первого судна в порт второму остается пройти еще 120 км. По прибытии в порт первое судно без задержки выходит на встречу второму судну, и встречается с ним через 2 часа после отбытия из порта. С первого судна в начальный момент времени запустили дрон, который летает на постоянной высоте со скоростью 50 км/ч, в направлении второго судна. Дрон запрограммирован таким образом, что, долетев до второго судна, он возвращается к первому. Долетев до первого судна, дрон снова летит ко второму и так до тех пор, пока судна не встретились. Сколько километров пролетел дрон?
Ответ: 400 км.
Решение.

Введем следующие обозначения:
точка A – стартовая точка первого судна;
точка B – стартовая точка второго судна;
точка O – порт;
таком образом треугольник ΔAOB – равносторонний;
точка C – местонахождение второго после прохождения 80 км, то есть $BC = 80$ км;
точка D – месторасположения первого судна в тот момент времени, когда второе судно находится в точке C.
Точка E – место встречи судов.
Так как скорость первого судна выше, чем у второго – по условию первое судно пришло в порт первым,
то $AD > CB$ и, следовательно, $OD <$ OC. Значит у прямоугольного треугольника ΔDOC угол $\angle ODC = 90°$.

$$\angle ODC = 90°. \angle ODC = 90°$$

Обозначим за S – первоначальное расстояние между судами в км. Обозначим за v_1 скорость в км/ч движения первого судна, а за v_2 – скорость в км/ч второго судна.
Так как в прямоугольном треугольнике ΔDOC угол $\angle DOC = 60°$, то $OC = 2OD$. Отсюда получим уравнение:

$$S - 80 = \left(S - \frac{80}{v_2} v_1\right) 2. \ (*)$$

Из условия о прибытии в порт первого судна получим уравнение:

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S - 120}{v_2}. \quad (**)$$

Подставив в первое уравнение отношение скоростей, выраженное из второго уравнения, получим уравнение на S:

$$S^2 - 200S - 9600 = 0.$$

У него два корня: $S = 240$ и $S = -40$. Второй корень не подходит по физическому смыслу. Таким образом $S = 240$ км. Из уравнения (**) получим $v_1 = 2v_2$. Когда первое судно вышло из порта навстречу второму, расстояние между ними составляло 120 км, учитывая, что встреча в точке *E* произошла через два часа, получаем:

$$2(v_1 + v_2) = 120.$$

Отсюда $v_1 = 40$ км/ч, $v_2 = 20$ км/ч. Время движения от выхода судов из точек *A* и *B* до встречи в точке *E* составляет

$$\frac{S}{v_1} + 2 = 8.$$

Таким образом дрон провел в движении 8 часов, учитывая скорость его движения, получаем, что дрон пролетел 400 км.

Задания для заочного тура олимпиады «Ломоносов» по робототехнике – 2014, 2 тур
с решениями и указаниями

10—11 классы

1. Луноход едет по вверх по склону горы. Двигатели лунохода работают от солнечных батарей, и за день луноход проезжает 300 метров. Ночью двигатели отключаются, и луноход сползает по склону на 200 метров. Через сколько дней луноход достигнет вершины горы, если длина склона равна 10 км?
   Ответ: 98 дней. За цикл «день-ночь» луноход преодолевает 100 метров. Таким образом за 97 циклов луноход преодолеет 9700 метров. За последний – 98 день – луноход проедет оставшиеся до вершины 300 метров.

2. Тело бросили вертикально вверх со скоростью 30 м/с. Некоторую точку *A* тело прошло дважды с разницей во времени 2 с. Определите высоту, на которой находится точка *A*, относительно точки бросания. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, а ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.
   Ответ: 40 метров.

3. Определите, какое число будет напечатано в результате работы следующей программы на языке Бейсик:

```
DIM A, B, T, M, R AS INTEGER
A = -12
B = 10
M = A
R = F(A)
FOR T = A TO B
     IF F(T) > R THEN
          M = T
          R = F(T)
     END IF
NEXT T
PRINT M

FUNCTION F(x)
     F = (x + 2) * (4 - x)
END FUNCTION
```

   Ответ: 1. Программа ищет точку максимума целочисленной функции второго порядка. График этой функции – парабола с ветвями, направленными вниз. Корни параболы лежат в точках -2 и 4, точка максимума – вершина парабола – расположена посередине между корнями.

4. Саша решил запрограммировать своего робота так, чтобы он мог собирать различные фигуры из семнадцати блоков в форме прямоугольных параллелепипедов:
   - 13 блоков 1x2x4,
   - 2 блока 1x2x2,
   - 1 блок 2x2x2,
   - 1 блок 1x1x5.

   Сможет ли Саша запрограммировать робота собирать куб 5x5x5?
   Ответ: нет, не сможет. Любой слой куба 5x5x5 толщиной в один кубик содержит нечетное число кубиков – 25 штук. Блоки 1x2x4, 1x2x2, 2x2x2 в любой подобный слой дают «вклад» в четное число кубиков. Блок 1x1x5 – один, и, если он целиком лежит в одном слое, то не лежит в параллельном слое.

5. Два корабля движутся по двум перпендикулярным прямым, пересекающимися в точке *O*, по направлению к *O*. В какой-то момент времени оба корабля находятся в 65 км от точки *O*, скорость первого корабля равна 15 км/ч, второго – 20 км/ч. С первого корабля вылетает дрон, движущийся на постоянной высоте со скоростью 25 км/ч. За какое минимальное время дрон может долететь от первого корабля до второго?
   Ответ: 1 час. Примечание: дрон должен вылететь через 3 часа от момента, когда оба корабля находились в 65 км от точки *O*.

Задания для заочного тура олимпиады «Ломоносов» по робототехнике – 2014

7—9 классы

1. Робот-пылесос имеет форму цилиндра диаметром 30 см. Робот умеет совершать два маневра: двигаться по прямой и поворачиваться на месте. В комнате лежит девять шариков диаметром 1 см: три ряда по три шарика, расстояние между рядами и шариками в ряду равны 1 м (см. рисунок).

Чтобы пылесос засосал шарик, тот должен оказаться точно под центром пылесоса. Может ли робот собрать все девять шариков, совершив при этом только три поворота? Ответ поясните.
Ответ: да, сможет, см. рисунок

2. Сережа собрал коробку передач для мобильного робота (см. рисунок). На вал двигателя надета шестерня номер 1.

Ведущие колеса робота расположены на одной оси с шестерней номер 5. Сможет ли робот двигаться?
Ответ: нет, не сможет. Соседние шестерни крутятся в разные стороны. Предположим, что шестерня номер 1 вращается по часовой стрелке, тогда шестерня номер 2 вращается против часовой стрелки, шестерня номер 3 – по часовой стрелке, шестерня номер 4 – снова против часовой стрелки и, наконец, шестерня номер 5 – по часовой стрелке. В то же время, как соседняя с шестерней номер 1, шестерня 5 должна вращаться против часовой стрелки. Таким образом коробку передач заклинит, и робот не сможет двигаться.

3. Вы играете с роботом в следующую игру: берете по очереди шарики, лежащие на столе. За один ход можно взять один, два или три шарика. Первым ходите вы, а проигрывает тот, кто вынужден взять последний шарик. Робот запрограммирован выигрывать.
   a. Сможете ли вы выиграть, если на столе 9 шариков?
   b. Сможете ли вы выиграть, если на столе 10 шариков?

   Ответ: a – нет, не сможете; b – сможете.

4. На горизонтальной балке при помощи нити, переброшенной через два блока и одним концом закрепленной за крючок **А**, уравновесили два груза: $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{M_2}$.

   Сохранится ли равновесие, если конец нити перевесить с крючка **А** на крючок **Б**?

   Ответ: нет, не сохранится. Если перевесить конец нити перевесить с крючка **А** на крючок **Б,** груз $\mathbf{M_2}$ перевесит груз $\mathbf{M_1}$.

5. Саша решил запрограммировать своего робота так, чтобы он мог собирать из параллелепипедов 1x1x2 куб 3x3x3.

   Саша быстро догадался, что это у него не выйдет. Тогда он решил изменить задание робота.
   a. Сможет ли Саша запрограммировать робота собирать куб 3x3x3, из которого вынут один угловой кубик?

b. Сможет ли Саша запрограммировать робота собирать куб 3x3x3, из которого вынут один реберный кубик?

Ответ: a – сможет; b – нет, не сможет.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по робототехнике

14 марта 2015 г.

10–11 классы

Задача 1. Робот **M3F2** работает на лесоповале. Ему нужно разложить несколько бревен в несколько грузовиков, стоящих по кругу. При этом в любых соседних грузовиках число бревен должно отличаться на единицу. Сможет ли робот **M3F2** выполнить свою задачу, если грузовиков: а) 2014; б) 2015?
Решение:
а) Можно. Например, 1, 2, 1, 2 и т.д. бревна.
б) Нельзя. Предположим, что можно, тогда запишем числа бревен по кругу, рядом запишем их со сдвигом на один грузовик и вычтем. Получим 1 и -1, которые в сумме должны давать ноль, так как вычли общее число бревен. А так как 2015 является нечетным числом, ноль в сумме не получится. Противоречие.

Задача 2. Робот **M3S1** убирает снег на аэродроме, покрытом ровным слоем снега. Работает он установленным спереди ковшом шириной 3 м. Действую оптимальным образом робот **M3S1** расчищает круглый аэродром радиусом 1 км за 2 часа.

1) За сколько времени робот **M3S1** расчистит аэродром радиусом 2 км?
2) За сколько времени робот **M3S1** расчистит прямоугольный аэродром 2 км x 6,4 км?

Считается, что снег из ковша не вываливается и время затрачивается на работу против сил трения.
Решение:
Работа затрачивается на то, чтобы вынести снег за пределы аэродрома. Каждый комок снега выгоднее нести к ближайшей точке на границе. Для круглого аэродрома – по радиусу. Следовательно работа пропорциональна объему столбика снега, высота которого равна расстоянию до границы. Выстроив столбики на круглом аэродроме получим, что работа пропорциональна объему конуса $V = \frac{\pi}{3}R^3$. Таким образом при увеличении радиуса в два раза работа увеличивается в 8 раз. Работа по уборке прямоугольного аэродрома пропорциональна объему крыши, которую можно разрезать на три части: из двух собрать правильную пирамиду высотой 1 км и основанием в форме квадрата 2 км x 2 км, а третья часть – призма высотой 4,4 км и площадью основания 1 км. Таким образом 1) 16 часов; 2) $\sim 10,9$ часов.

Задача 3. Колесный робот **M3C4** при взгляде сверху имеет форму квадрата 8 x 8 см. У робота два ведущих колеса в форме тонких дисков радиусом 4 см, каждое из которых управляется своим независимым двигателем. Третье колесо – сферическое и неуправляемое. Роботу необходимо проехать от старта до финиша по горизонтальной плоскости вдоль прямой линии при этом объезжая препятствия в виде палочек, вертикально установленных на линии движения. Известно, что расстояние между палочками различно и меняется в пределах от 50 до 100 см. Если робот касается или сбивает палочку, он считается проигравшим. На передней панели робота установлен сверхточный датчик, который позволяет определять расстояние до препятствий. Алгоритм, заложенный в память робота для прохождения трассы, выглядит следующим образом:

```
НАЧАЛО
ПОКА <не достигли Финиша>
    ПОКА <расстояние до препятствия > 2 см> Вперед
    КОНЕЦ
    Поворот налево вокруг центра робота на 45 градусов.
    Вперед 9 см.
    Поворот направо вокруг центра робота на 90 градусов.
    Вперед 9 см.
    Поворот налево вокруг центра робота на 45 градусов.
КОНЕЦ
```

Поворот вокруг центра робота осуществляется одновременным вращением колес с одинаковой скоростью в противоположные стороны. То есть для поворота налево правое колесо вращается вперед, а левое – назад. В результате поломки левое колесо потеряло возможность вращаться назад. Возможность заменить неисправный узел в настоящий момент отсутствует. Измените алгоритм управления роботом **M3C4** таким образом, чтобы он мог пройти трассу до финиша.

Решение:

При поломке, описанной в условии, поворот налево на 45 градусов нужно осуществлять так: левое колесо неподвижно, правое двигается вперед. При этом робот поворачивается налево вокруг оси, проходящей через точку контакта левого колеса и плоскости движения перпендикулярно последней. При вращении вокруг центра робота он, точнее края колес, «заметает» окружность радиуса $r\sqrt{2}$, где r – радиус колеса робота. Так как $\sqrt{2} < 1,5$, $r\sqrt{2} < r + 2 = 6$ и разворот за 2 см до препятствия является безопасным. Также безопасным будет объезд препятствия по ломанной с длиной сторон 9 см ($9 > 6\sqrt{2}$). При вращении вокруг точки контакта колеса с дорогой робот «заметает» окружность радиуса $r\sqrt{5}$, поэтому ограничение до препятствия нужно изменить на > 4 см.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по робототехнике

14 марта 2015 г.

7–9 классы

Задача 1. Робот **M3F1** работает на лесоповале. Он может за одну операцию распилить любое бревно либо на 16 либо на 25 частей. Сможет ли робот **M3F1** в результате своих операций распилить одно бревно на 2015 частей?

Решение:

Ответ: нет, не сможет. При выполнении любой операции количество частей увеличивается на 15 или 24. Таким образом прибавка всегда кратна трем, а 2014 на три не делится.

Задача 2. Мультикоптер серии **S301** представляет собой легкий диск диаметром 1 м, внутри которого установлено 8 моторов с пропеллерами. Мультикоптер оснащен датчиком обнаружения препятствий, который расположен в центре диска. Два мультикоптера серии **S301** летят навстречу друг друг в одной плоскости с одинаковыми по модулю скоростями 18 км/ч. При срабатывании датчика обнаружения препятствий, мультикоптеры начинают разворот по окружностям, оставаясь в горизонтальной плоскости и не меняя величин скоростей. На какую минимальную величину может быть настроен датчик обнаружения препятствий, чтобы избежать столкновения, если развороты выполняются с одинаковыми ускорениями 10 м/с^2.

Решение:

Пусть R – радиус разворота, d – диаметр мультикоптера, v – скорость мультикоптера, a – ускорение мультикоптера, L – расстояние между центрами мультикоптеров. Тогда условие безопасного разворота имеет вид:

$$\sqrt{(2R)^2 + L^2} - 2R - d > 0 \quad \text{или } L > \sqrt{4Rd + d^2}, \quad \text{где } R = \frac{v^2}{a}.$$

При этом расстояние от мультикоптера до датчика другого мультикоптера будет $L - d/2$.

Ответ: $L - d/2 = \sqrt{11} - 1/2$.

Задача 3. Робот **M3F1** оказался в центре лабиринта (отмечен кругом), изображенного на рисунке:

Во одной из внешних стен лабиринта есть выход, который обозначен разрывом стены. В памяти робота **M3F1** нашлась следующая программа:

```
НАЧАЛО
ПОКА <не достигли выхода из лабиринта>
    ЕСЛИ <слева свободно> ТО повернуть налево на 90 градусов.
    ИНАЧЕ ЕСЛИ <впереди свободно>
```

```
        ИНАЧЕ ЕСЛИ <справа свободно> ТО повернуть направо на 90 градусов.
              ИНАЧЕ повернуть на 180 градусов.
    Вперед на одну клетку.
КОНЕЦ
```

1. Сможет ли с помощью этой программы робот **M3F1** выйти из лабиринта? Укажите маршрут робота.
2. Запереть робота в лабиринте можно, если поставить еще одну стенку. Можно ли запереть двигающегося по данной программе робота **M3F1** в лабиринте, удалив
а) две стенки;
б) одну стенку?