МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников
«ЛОМОНОСОВ»
по механике и математическому моделированию

2014/2015 учебный год

http://olymp.msu.ru

Олимпиада школьников «Ломоносов» 2014/2015 учебного года по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Заочный этап 1

10-11 класс

В первых пяти задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). В шестой задаче требуется прислать решение в присоединенном файле. Ответом на каждую из первых пяти задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления. При вычислениях (в случае необходимости) считать:

ускорение свободного падения равно 10 м/с^2

абсолютный нуль температур равен $-273°$C .

$\sqrt{2} = 1,4$, $\sqrt{3} = 1,7$

::1.1:: Старший брат, выгуливая собаку, увидел вдали свою младшую сестру, возвращающуюся из музыкальной школы. Дети пошли навстречу друг другу с постоянными скоростями так, что скорость брата в два раза больше, чем скорость сестры. Собака при этом радостно бегала от брата к сестре и обратно. Во сколько раз скорость собаки больше скорости брата, если от момента начала движения до момента встречи она пробежала такое же расстояние, что прошли брат и сестра суммарно?

Ответ: $1,5$

::1.2:: Старший брат, выгуливая собаку, увидел вдали свою младшую сестру, возвращающуюся из музыкальной школы. Дети пошли навстречу друг другу с постоянными скоростями так, что скорость брата в два раза больше, чем скорость сестры. Собака при этом радостно бегала от брата к сестре и обратно. Во сколько раз скорость собаки больше скорости брата, если от момента начала движения до момента встречи она пробежала расстояние в полтора раза большее чем то, которое прошли брат и сестра суммарно?

Ответ: $2,25$

::1.3:: Старший брат, выгуливая собаку, увидел вдали свою младшую сестру, возвращающуюся из музыкальной школы. Дети пошли навстречу друг другу с постоянными скоростями так, что скорость брата в полтора раза больше, чем скорость сестры. Собака при этом радостно бегала от брата к сестре и обратно. Во сколько раз скорость собаки больше скорости брата, если от момента начала движения до момента встречи она пробежала такое же расстояние, что прошли брат и сестра суммарно?

Ответ: $1,67$

::1.4:: Старший брат, выгуливая собаку, увидел вдали свою младшую сестру, возвращающуюся из музыкальной школы. Дети пошли навстречу друг другу с постоянными скоростями так, что скорость брата в полтора раза больше, чем скорость сестры. Собака при этом радостно бегала от сестры к брату и обратно. Во сколько раз скорость собаки больше скорости брата, если от момента начала движения до момента встречи она пробежала расстояние в полтора раза больше чем то, которое прошли брат и сестра суммарно?

Ответ: $2,5$

::2.1::Маленькому бруску придают начальную скорость $V_0 = 4$ м/с, и он начинает равномерно соскальзывать по наклонной плоскости с углом наклона β к горизонту таким, что $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$. Через одну секунду после начала движения брусок оказывается у основания наклонной плоскости. За какое время брусок пройдет такое же расстояние, если ему придать ту же начальную скорость и эту же наклонную плоскость расположить под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту?

Ответ: $0,67$

::2.2::Маленькому бруску придают начальную скорость $V_0 = 2$ м/с, и он начинает равномерно соскальзывать по наклонной плоскости с углом наклона β к горизонту таким, что $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{7}$. Через четыре секунды после начала движения брусок оказывается у основания наклонной плоскости. За какое время брусок пройдет такое же расстояние, если ему придать ту же начальную скорость и эту же наклонную плоскость расположить под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту?

Ответ: $1,33$

::2.3::Маленькому бруску придают начальную скорость $V_0 = 3$ м/с, и он начинает равномерно соскальзывать по наклонной плоскости с углом наклона β к горизонту таким, что $\operatorname{tg}\beta = \frac{6}{17}$. Через шесть секунд после начала движения брусок оказывается у основания наклонной плоскости. За какое время брусок пройдет такое же расстояние, если ему придать ту же начальную скорость и эту же наклонную плоскость расположить под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту?

Ответ: 3

::2.4::Маленькому бруску придают начальную скорость $V_0 = 4$ м/с, и он начинает равномерно соскальзывать по наклонной плоскости с углом наклона β к горизонту таким, что $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{7}$. Через четыре секунды после начала движения брусок оказывается у основания наклонной плоскости. За какое время брусок пройдет такое же расстояние, если ему придать ту же начальную скорость и эту же наклонную плоскость расположить под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту?

Ответ: $1,74$

::3.1::При цене лотерейного билета 1000 рублей удалось продать 1000 билетов, то есть выручка составила 1 млн. рублей. В следующем тираже цену билета снизили до 500 рублей, и выручка выросла в $1,5$ раза. Если принять линейную зависимость между ценой билета и количеством проданных билетов, то какой должна быть оптимальная цена за билет, при которой выручка будет максимально возможной? Ответ дайте в рублях, округлив его, если потребуется, до ближайшего целого значения.

Ответ: 625

::3.2::При цене лотерейного билета 800 рублей удалось продать 10000 билетов, то есть выручка составила 8 млн. рублей. В следующем тираже цену билета снизили до 400 рублей, и выручка выросла в $2,5$ раза. Если принять линейную зависимость между ценой билета и количеством проданных билетов, то какой должна быть оптимальная цена за билет, при которой выручка будет максимально возможной? Ответ дайте в рублях, округлив его, если потребуется, до ближайшего целого значения.

Ответ: 450

::3.3::При цене лотерейного билета 200 рублей удалось продать 10000 билетов, то есть выручка составила 2 млн. рублей. В следующем тираже цену билета снизили до 100 рублей, и выручка выросла в $1,5$ раза. Если принять линейную зависимость между ценой билета и количеством проданных билетов, то какой должна быть оптимальная цена за билет, при которой выручка будет максимально возможной? Ответ дайте в рублях, округлив его, если потребуется, до ближайшего целого значения.

Ответ: 125

::3.4::При цене лотерейного билета 400 рублей удалось продать 10000 билетов, то есть выручка составила 4 млн. рублей. В следующем тираже цену билета снизили до 200 рублей, и выручка выросла в $2,5$ раза. Если принять линейную зависимость между ценой билета и количеством проданных билетов, то какой должна быть оптимальная цена за билет, при которой выручка будет максимально возможной? Ответ дайте в рублях, округлив его, если потребуется, до ближайшего целого значения.

Ответ: 225

::4.1:: В расположенном на гладкой горизонтальной поверхности сосуде массы $M = 0,8$ кг, изготовленном из материала с удельной теплоемкостью $C = 500$ Дж/(кг·град), содержится 1 моль одноатомного газа при нормальном давлении $P = 10^5$ Па и температуре $T = 300$ К, равной температуре сосуда. Этот сосуд подвергается абсолютно неупругому удару по одной из своих боковых граней летящим горизонтально со скоростью $v = 80$ м/с шариком массы 200 г, изготовленным из того же материала. В результате такого взаимодействия сосуд приобретает горизонтальную скорость и движется поступательно вдоль линии движения шарика. Какую максимальную температуру (в градусах Кельвина) может приобрести газ в условиях такого испытания? Ответ округлите до целого числа градусов.

Ответ: 301

::4.2:: В расположенном на гладкой горизонтальной поверхности сосуде массы $M = 0,8$ кг, изготовленном из материала с удельной теплоемкостью $C = 300$ Дж/(кг·град), содержится 2 моля одноатомного газа при нормальном давлении $P = 10^5$ Па и температуре $T = 300$ К, равной температуре сосуда. Этот сосуд подвергается абсолютно неупругому удару по одной из своих боковых граней летящим горизонтально со скоростью $v = 90$ м/с шариком массы 200 г, изготовленным из того же материала. В результате такого взаимодействия сосуд приобретает горизонтальную скорость и движется поступательно вдоль линии движения шарика. Какую максимальную температуру (в градусах Кельвина) может приобрести газ в условиях такого испытания? Ответ округлите до целого числа градусов.

Ответ: 302

::4.3:: В расположенном на гладкой горизонтальной поверхности сосуде массы $M = 0,9$ кг, изготовленном из материала с удельной теплоемкостью $C = 428,5$ Дж/(кг·град), содержится 1 моль одноатомного газа при нормальном давлении $P = 10^5$ Па и температуре $T = 300$ К, равной температуре сосуда. Этот сосуд подвергается абсолютно неупругому удару по одной из своих боковых граней летящим горизонтально со скоростью $v = 420$ м/с шариком массы 100 г, изготовленным из того же материала. В результате такого взаимодействия сосуд приобретает горизонтальную скорость и движется поступательно вдоль линии движения шарика. Какую максимальную температуру (в градусах Кельвина) может приобрести газ в условиях такого испытания? Ответ округлите до целого числа градусов.

Ответ: 318

::4.4:: В расположенном на гладкой горизонтальной поверхности сосуде массы $M = 0,9$ кг, изготовленном из материала с удельной теплоемкостью $C = 716,5$ Дж/(кг·град), содержится 1 моль одноатомного газа при нормальном давлении $P = 10^5$ Па и температуре $T = 300$ К, равной температуре сосуда. Этот сосуд подвергается абсолютно неупругому удару по одной из своих боковых граней летящим горизонтально со скоростью $v = 180$ м/с шариком массы 100 г, изготовленным из того же материала. В результате такого взаимодействия сосуд приобретает горизонтальную скорость и движется поступательно вдоль линии движения шарика. Какую максимальную температуру (в градусах Кельвина) может приобрести газ в условиях такого испытания? Ответ округлите до целого числа градусов.

Ответ: 302

::5.1:: Материальная точка массы 110 г движется по плоскости под действием силы F по закону $\begin{cases} x(t) = 2t - t^2, \\ y(t) = 1 - 4t. \end{cases}$ Здесь координаты x, y — измеряются в метрах, время t — в секундах. Найдите величину работы силы F (в единицах СИ) за третью секунду движения.

Ответ: $0,66$

::5.2:: Материальная точка массы 210 г движется по плоскости под действием силы F по закону $\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t, \\ y(t) = 1 + 12t. \end{cases}$ Здесь координаты x, y — измеряются в метрах, время t — в секундах. Найдите величину работы силы F (в единицах СИ) за вторую секунду движения.

Ответ: $2,1$

::5.3:: Материальная точка массы 220 г движется по плоскости под действием силы F по закону $\begin{cases} x(t) = 1 + 8t, \\ y(t) = 2t^2 - 3. \end{cases}$ Здесь координаты x, y — измеряются в метрах, время t — в секундах. Найдите величину работы силы F (в единицах СИ) за третью секунду движения.

Ответ: $8,8$

::5.4:: Материальная точка массы 170 г движется по плоскости под действием силы F по закону $\begin{cases} x(t) = 8t + 2, \\ y(t) = -2t^2 - 5t. \end{cases}$ Здесь координаты x, y — измеряются в метрах, время t — в секундах. Найдите величину работы силы F (в единицах СИ) за третью секунду движения.

Ответ: $10,2$

::6.1:: Известно, что во время сильного ветра и шторма опасно, если корабль повернется к волне (ветру) бортом, а наиболее желательно ориентироваться носом к волне. Именно поэтому судно, потерявшее ход, рискует погибнуть. Что следует сделать капитану корабля, потерявшего ход, в условиях шторма в районе Марианской впадины, чтобы спасти корабль и сохранить его местоположение (чтобы ремонтная бригада могла найти его в том же месте).

Ответ: Следует отдать носовой якорь, а если его нет, опустить длинную цепь или трос. Обычно якорь удерживает корабль, ложась на дно и цепляясь за грунт. В данном случае это невозможно - на корабле нет возможности возить 9-километровую цепь. Тем не менее, длинная цепь и якорь, находящиеся в толще относительно неподвижной воды, создадут существенное сопротивление движению корабля под действием ветра и волн. Кроме того, сопротивляющийся движению носовой якорь разворачивает корабль носом по ветру.

Олимпиада школьников «Ломоносов» 2014/2015 учебного года по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап 2

10-11 класс

В первых пяти задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). В шестой задаче требуется прислать решение в присоединенном файле. Ответом на каждую из первых пяти задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления. При вычислениях (в случае необходимости) считать:

ускорение свободного падения равно 10 м/с^2

атмосферное давление равно 10^5 Па

::1.1::Два автобуса курсируют между деревнями Аннино и Борино с заездом по пути в деревню Верино. Первый автобус вышел из Аннино, одновременно с ним из Борино вышел второй автобус. Они одновременно прибыли в Верино, сделали здесь остановку на 30 минут и двинулись дальше. Первый автобус оставшийся отрезок пути от Верино до Борино ехал $3,5$ часа. Второй автобус от Верино до Аннино ехал $2,5$ часа. Найдите отношение скоростей автобусов, считая скорость каждого автобуса во время движения постоянной. В ответ запишите отношение скорости второго автобуса к скорости первого.

{1,18}

::1.2::Два автобуса курсируют между деревнями Андреево и Борисово с заездом по пути в деревню Виталино. Первый автобус вышел из Андреево, одновременно с ним из Борисово вышел второй автобус. Они одновременно прибыли в Виталино, сделали здесь остановку на 45 минут и двинулись дальше. Первый автобус оставшийся отрезок пути от Виталино до Борисово ехал $4,5$ часа. Второй автобус от Виталино до Андреево ехал $3,5$ часа. Найдите отношение скоростей автобусов, считая скорость каждого автобуса во время движения постоянной. В ответ запишите отношение скорости второго автобуса к скорости первого.

{1,13}

::1.3::Два автобуса курсируют между деревнями Аннино и Борино с заездом по пути в деревню Верино. Первый автобус вышел из Аннино, одновременно с ним из Борино вышел второй автобус. Они одновременно прибыли в Верино, сделали здесь остановку на 50 минут и двинулись дальше. Первый автобус оставшийся отрезок пути от Верино до Борино ехал $3,5$ часа. Второй автобус от Верино до Аннино ехал $2,5$ часа. Найдите отношение скоростей автобусов, считая скорость каждого автобуса во время движения постоянной. В ответ запишите отношение скорости первого автобуса к скорости второго.

{0,85}

::1.4::Два автобуса курсируют между деревнями Андреево и Борисово с заездом по пути в деревню Виталино. Первый автобус вышел из Андреево, одновременно с ним из Борисово вышел второй автобус. Они одновременно прибыли в Виталино, сделали здесь остановку на 20 минут и двинулись дальше. Первый автобус оставшийся отрезок пути от Виталино до Борисово ехал $4,5$ часа. Второй автобус от Виталино до Андреево ехал $3,5$ часа. Найдите отношение скоростей автобусов, считая скорость каждого автобуса во время движения постоянной. В ответ запишите отношение скорости первого автобуса к скорости второго.

{0,88}

::2.1::Металлический шар неподвижно лежит на горизонтальном дне сосуда. Сосуд заполнили жидкостью до уровня, едва покрывающего шар. Плотность жидкости в 5 раз меньше плотности материала шара. Определите, отношение минимальной силы давления шара на дно сосуда к начальному значению этой силы в сосуде без жидкости.
{0,8}

::2.2::Металлический шар неподвижно лежит на горизонтальном дне сосуда. Сосуд заполнили жидкостью до уровня, едва покрывающего шар. Плотность жидкости в 4 раз меньше плотности материала шара. Определите, отношение минимальной силы давления шара на дно сосуда к начальному значению этой силы в сосуде без жидкости.
{0,75}

::2.3::Металлический шар неподвижно лежит на горизонтальном дне сосуда. Сосуд заполнили жидкостью до уровня, едва покрывающего шар. Плотность жидкости в 2 раз меньше плотности материала шара. Определите, отношение минимальной силы давления шара на дно сосуда к начальному значению этой силы в сосуде без жидкости.
{0,5}

::2.4::Металлический шар неподвижно лежит на горизонтальном дне сосуда. Сосуд заполнили жидкостью до уровня, едва покрывающего шар. Плотность жидкости в 6 раз меньше плотности материала шара. Определите, отношение минимальной силы давления шара на дно сосуда к начальному значению этой силы в сосуде без жидкости.
{0,83}

::3.1::Три одинаковые цистерны полностью заполнены жидкостями. В первой цистерне содержится 12 тонн жидкости A, во второй — 17 тонн жидкости B, а в третьей — 15 тонн смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости A суммарно содержится во всех трех цистернах? Ответ дайте в тоннах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.
{16,8}

::3.2::Три одинаковые цистерны полностью заполнены жидкостями. В первой цистерне содержится 11 тонн жидкости A, во второй — 16 тонн жидкости B, а в третьей — 13 тонн смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости A суммарно содержится во всех трех цистернах? Ответ дайте в тоннах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.
{17,6}

::3.3::Три одинаковые цистерны полностью заполнены жидкостями. В первой цистерне содержится 18 тонн жидкости A, во второй — 23 тонн жидкости B, а в третьей — 20 тонн смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости A суммарно содержится во всех трех цистернах? Ответ дайте в тоннах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.
{28,8}

::3.4::Три одинаковые цистерны полностью заполнены жидкостями. В первой цистерне содержится 17 тонн жидкости A, во второй — 22 тонн жидкости B, а в третьей — 19 тонн смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости A суммарно содержится во всех трех цистернах? Ответ дайте в тоннах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.
{27,2}

::4.1::При скоростном спуске лыжник массой 90 кг движется вниз по трассе с уклоном в 45°, испытывая сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости.

При скорости 1 м/с это сопротивление равно $0,6$ Н. Какую наибольшую скорость мог бы развить лыжник, если коэффициент трения между лыжами и снегом равен $0,1$? Ответ дайте в км/час, округлив его до ближайшего целого числа.

{111}

::4.2::При скоростном спуске лыжник массой 100 кг движется вниз по трассе с уклоном в $30°$, испытывая сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости. При скорости 1 м/с это сопротивление равно $0,5$ Н. Какую наибольшую скорость мог бы развить лыжник, если коэффициент трения между лыжами и снегом равен $0,1$? Ответ дайте в км/час, округлив его до ближайшего целого числа.

{104}

::4.3::При скоростном спуске лыжник массой 100 кг движется вниз по трассе с уклоном в $45°$, испытывая сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости. При скорости 1 м/с это сопротивление равно $0,5$ Н. Какую наибольшую скорость мог бы развить лыжник, если коэффициент трения между лыжами и снегом равен $0,1$? Ответ дайте в км/час, округлив его до ближайшего целого числа.

{128}

::4.4::При скоростном спуске лыжник массой 80 кг движется вниз по трассе с уклоном в $30°$, испытывая сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости. При скорости 1 м/с это сопротивление равно $0,6$ Н. Какую наибольшую скорость мог бы развить лыжник, если коэффициент трения между лыжами и снегом равен $0,1$? Ответ дайте в км/час, округлив его до ближайшего целого числа.

{85}

::5.1::В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа, закрытый сверху тяжелым поршнем веса $P = 10$ кг, поступает переменное количество теплоты Q, меняющееся со временем по закону: $q = \frac{q_0}{t_0}\left(t_0 - \sqrt{2t_0 t - t^2}\right)$. Здесь $q_0 = 110$ Дж, $t_0 = 1$ с и t — время в секундах. Найдите перемещение поршня с момента времени $t_1 = 0$ с до момента времени $t_2 = 2$ с, если площадь поршня $S = 1$ дм^2. Ответ дайте в сантиметрах, округлив его до ближайшего целого числа.

{0}

::5.2::В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа, закрытый сверху тяжелым поршнем веса $P = 10$ кг, поступает переменное количество теплоты Q, меняющееся со временем по закону: $q = \frac{q_0}{t_0}\left(t_0 - \sqrt{2t_0 t - t^2}\right)$. Здесь $q_0 = 110$ Дж, $t_0 = 1$ с и t — время в секундах. Найдите перемещение поршня с момента времени $t_1 = 0$ с до момента времени $t_2 = 1$ с, если площадь поршня $S = 1$ дм^2. Ответ дайте в сантиметрах, округлив его до ближайшего целого числа.

{-4; 4}

::5.3::В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа, закрытый сверху тяжелым поршнем веса $P = 10$ кг, поступает переменное количество теплоты Q, меняющееся со временем по закону: $q = \frac{q_0}{t_0}\left(t_0 - \sqrt{2t_0 t - t^2}\right)$. Здесь $q_0 = 110$ Дж, $t_0 = 1$ с и t — время в секундах. Найдите перемещение поршня с момента времени $t_1 = 1$ с до момента времени $t_2 = 2$ с, если площадь поршня $S = 1$ дм^2. Ответ дайте в сантиметрах, округлив его до ближайшего целого числа.

{4}

::5.4::В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа, закрытый сверху тяжелым поршнем веса $P = 10$ кг, поступает переменное количество теплоты Q, меняющееся со временем по закону: $q = \frac{q_0}{t_0}\left(t_0 + \sqrt{2t_0 t - t^2}\right)$. Здесь $q_0 = 110$ Дж, $t_0 = 1$ с и t — время в секундах. Найдите перемещение поршня с момента времени $t_1 = 0$ с до момента времени $t_2 = 2$ с, если площадь поршня $S = 1$ дм^2. Ответ дайте в сантиметрах, округлив его до ближайшего целого числа.

{0}

::5.5::В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа, закрытый сверху тяжелым поршнем веса $P = 10$ кг, поступает переменное количество теплоты Q, меняющееся со временем по закону: $q = \frac{q_0}{t_0}\left(t_0 + \sqrt{2t_0 t + t^2}\right)$. Здесь $q_0 = 110$ Дж, $t_0 = 1$ с и t — время в секундах. Найдите перемещение поршня с момента времени $t_1 = 0$ с до момента времени $t_2 = 2$ с, если площадь поршня $S = 1$ дм^2.

{11,2}

::5.6::В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа, закрытый сверху тяжелым поршнем веса $P = 10$ кг, поступает переменное количество теплоты Q, меняющееся со временем по закону: $q = \frac{q_0}{t_0}\left(t_0 + \sqrt{2t_0 t + t^2}\right)$. Здесь $q_0 = 110$ Дж, $t_0 = 1$ с и t — время в секундах. Найдите перемещение поршня с момента времени $t_1 = 1$ с до момента времени $t_2 = 2$ с, если площадь поршня $S = 1$ дм^2.

{4,4}

::6.1::Часто бывает, что, промокнув под дождем, мы имеем ограниченное время для сушки белья. Предположим, что у нас есть 10 минут и в течение одной минуты мы можем воспользоваться феном, создавая тепловой поток на одежду. Как вы считаете, в каком случае одежда высохнет лучше: если сразу воспользоваться феном и потом 9 минут сушить естественным путем, или воспользоваться феном на последней минуте? А может быть, надо выждать несколько минут и потом воспользоваться феном, и оставшееся время опять сушить на воздухе?

Решение. В этой задаче в первую очередь оценивается не ответ на поставленный вопрос, а способность к анализу физических явлений, к математическому моделированию процесса и к критическому анализу собственной предложенной модели. Приветствуется, если автор для проверки своей теории проведет эксперимент, который легко осуществить в домашних условиях. Ниже приведен пример возможного моделирования ситуации. Сразу отметим, что это не единственный вариант рассуждения. "Рассмотрим процесс испарения без учета свойств материала одежды, т.е. предположим, что испарение происходит точно также, как и из блюдца с водой. При этом будем считать, что комната достаточно велика и изменением влажности воздуха в процессе испарения можно пренебречь. При этом температуру испаряющейся воды будем считать постоянной. Тогда скорость испарения воды будет постоянной. Если воспользоваться феном на первой минуте, то температура воды повысится, увеличится плотность насыщенных паров над водой и скорость испарения увеличится. Так как после окончания действия фена температура будет падать постепенно, то несколько минут после действия фена скорость испарения будет больше, чем при начальной температуре воды. Ответ: Использовать фен на первой минуте."Хорошо, если автор сможет сам увидеть недостатки своего рассуждения и отметит существующие проблемы предложенной модели. Например, если использовать фен на последних минутах, то вода нагреется сильнее и испарение будет более интенсивным. Выходом из этого может быть проведение эксперимента.

Олимпиада школьников Ломоносов–2015
по механике и математическому моделированию

9 класс

1. Как с помощью гири в 200 г. и линейки с делениями найти вес какого-нибудь не слишком большого, но и не слишком маленького предмета?

2. Три лыжника движутся по трассе с постоянными скоростями. Первый лыжник стартовал на 20 секунд раньше второго, а третий — на 4 секунды позже второго. В какой-то момент времени все три гонщика оказались в одной точке трассы. Известно, что на финише третий лыжник на 12 секунд обогнал первого. На сколько секунд первый лыжник отстал от второго?

3. По исследованиям британских ученых средняя продолжительность жизни человека, который с 20 лет выкуривает по 2 сигареты в день, составляет 60 лет, а человека, который с 20 лет выкуривает по 12 сигарет в день, — 40 лет. Какова средняя продолжительность жизни человека, который не курит? В своих исследованиях британские ученые считают негативное влияние курения на продолжительность жизни линейной функцией от количества сигарет.

4. Металлический шар неподвижно лежит на горизонтальном дне сосуда. Сосуд заполнили жидкостью до уровня, едва покрывающего шар. Плотность жидкости в 5 раз меньше плотности материала шара. Определите, на сколько процентов минимальная сила давления шара на дно отличается от начального значения. Положительное изменение означает увеличение.

5. Наверное, многие из нас знакомы с проблемой сушки волос. Представьте, человек утром помыл голову и у него 10 минут до выхода на улицу, а еще надо позавтракать. То есть на использование фена у него не более минуты времени. Можем ли мы на основе математического моделирования процесса сушки дать человеку совет? Что лучше: посушить волосы сначала в течение минуты, а потом позавтракать, или сначала позавтракать, а потом в течение минуты перед выходом сушить волосы? А может быть, надо начать завтрак, затем прерваться на минуту для сушки волос феном, а затем продолжить завтракать? Проведите и опишите эксперимент, помогающий ответить на данные вопросы.

17 ноября 2014 года *г. Москва*

Олимпиада школьников Ломоносов–2015
по механике и математическому моделированию

7–8 класс

1. Как с помощью гири в 200 г. и линейки с делениями найти вес какого-нибудь не слишком большого, но и не слишком маленького предмета?

2. Три лыжника движутся по трассе с постоянными скоростями. Первый лыжник стартовал на 20 секунд раньше второго, а третий — на 4 секунды позже второго. В какой-то момент времени все три гонщика оказались в одной точке трассы. Известно, что на финише третий лыжник на 12 секунд обогнал первого. На сколько секунд первый лыжник отстал от второго?

3. По исследованиям британских ученых средняя продолжительность жизни человека, который с 20 лет выкуривает по 2 сигареты в день, — 60 лет, а человека, который с 20 лет выкуривает по 12 сигарет в день, — 40 лет. Какова средняя продолжительность жизни человека, который не курит? В своих исследованиях британские ученые считают негативное влияние курения на продолжительность жизни линейной функцией от количества сигарет.

4. Металлический шар неподвижно лежит на горизонтальном дне сосуда. Сосуд заполнили жидкостью до уровня, едва покрывающего шар. Плотность жидкости в 4 раз меньше плотности материала шара. Определите, на сколько процентов минимальная сила давления шара на дно отличается от начального значения. Положительное изменение означает увеличение.

5. Наверное, многие из нас знакомы с проблемой сушки волос. Представьте, человек утром помыл голову и у него 10 минут до выхода на улицу, а еще надо позавтракать. То есть на использование фена у него не более минуты времени. Можем ли мы на основе математического моделирования процесса сушки дать человеку совет? Что лучше: посушить волосы сначала в течение минуты, а потом позавтракать, или сначала позавтракать, а потом в течение минуты перед выходом сушить волосы? А может быть, надо начать завтрак, затем прерваться на минуту для сушки волос феном, а затем продолжить завтракать? Проведите и опишите эксперимент, помогающий ответить на данные вопросы.

17 ноября 2014 года *г. Москва*

Решения задач варианта 151.

1. Двигатели запущенной вертикально вверх с поверхности Земли ракеты, обеспечивающие ракете ускорение 20 м/с^2, через 40 секунд после старта внезапно прекратили работу. На какую максимальную высоту поднимется ракета? Может ли эта ракета представлять опасность для объекта, находящегося на высоте 45 км? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: а) 48 км; б) да. **Решение.** Пусть $a = 20$ м/с^2, $\tau = 40$ с. На первом участке движения, когда двигатели работали, скорость и набранная высота соответственно равны: $V = at$, $y = \frac{at^2}{2}$. Поэтому в момент прекращения работы двигателей: $V_0 = a\tau$, $y_0 = \frac{a\tau^2}{2}$ – это будет «нулевой» момент для второго участка.

На втором участке: $V = V_0 - gt = a\tau - gt$, $y = y_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau t - \frac{gt^2}{2}$. На максимальной высоте $V = a\tau - gt = 0$, поэтому время, когда ракета будет на максимальной высоте, равно: $t = \frac{a\tau}{g}$. Значит, максимальная высота подъёма ракеты равна:

$y_{\max} = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau\frac{a\tau}{g} - \frac{g}{2}\frac{a^2\tau^2}{g^2} = \frac{a\tau^2\left(g+a\right)}{2g}$. Подстановка чисел дает $y_{\max} = 48$ км.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ на оба вопроса; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе на первый вопрос, ответ на второй вопрос неверен или пропущен; **10 баллов**: правильные уравнения и правильная логика, но ответ неверен из-за арифметической ошибки; **5 баллов:** правильные уравнения и правильный ответ для случая, когда от ускорения на первом этапе отнимается g.

2. Передвижная железнодорожная платформа, имеющая горизонтальное днище в форме прямоугольника длиной 10 метров и шириной 5 метров, загружается зерном. Поверхность зерна имеет угол не более 45 градусов с плоскостью основания (иначе зернышки ссыпаются), плотность зерна равняется 1 200 кг/м^3. Найдите максимальную массу насыпанного на платформу зерна.

Ответ: 62,5 т. **Решение.** Расчет показывает, что максимальная высота зерновой кучи будет равна половине ширины платформы, то есть 2,5 м. Кучу можно разбить на «горизонтально лежащую вдоль платформы» призму (ее высота 5 м, а основание – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ и гипотенузой 5), и две одинаковых пирамиды в «торцах» платформы (в основании каждой из них лежит прямоугольник 5 x 2,5 и высота равна 2,5).

Суммарный объем равен $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5}{2}\cdot 5+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 5\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{125}{4}+\frac{125}{6}=\frac{125\cdot 5}{12}$ м^3. Поэтому масса равна $\frac{125\cdot 5}{12}\cdot 1200=62500$ кг.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ; **15 баллов**: при правильном в целом решении и правильном ответе имеются мелкие дефекты; **10 баллов**: правильное решение, но ответ неверен из-за арифметической ошибки.

3. Гаврила увидел в окно белку, севшую на ветку дерева прямо напротив него на расстоянии 3 м 75 см. Он решил покормить зверюшку и бросил орех горизонтально со скоростью 5 м/с прямо в направлении белки. Сможет ли белка поймать орех, если она умеет прыгать с большой скоростью в любом направлении на расстояние 1 м 80 см? Считать, что ускорение свободного падения равно $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: Да. **Решение:** Координаты белки в начальный момент: $x=a$; $y=0$. Орех движется по закону: $x(t)=V_0t$; $y(t)=\frac{gt^2}{2}$.

Поэтому квадрат расстояния от сидящей белки до летящего ореха в момент времени t равен: $r^2=\left(V_0t-a\right)^2+\left(\frac{gt^2}{2}\right)^2=\frac{g^2t^4}{4}+V_0^2t^2-2V_0at+a^2$. Подставляя числовые значения, получаем: $r^2=25t^4+25t^2-\frac{75}{2}t+\frac{225}{16}=\frac{25}{16}\left(16t^4+16t^2-24t+9\right)$.

Приходим к минимизации функции $f(t)=16t^4+16t^2-24t+9$. Так как $f'(t)=64t^3+32t-24=8\left(8t^3+4t-3\right)$, то решаем уравнение $8t^3+4t-3=0$. Так как $8t^3+4t-3$ $=(2t-1)\left(4t^2+2t+3\right)$ и уравнение $4t^2+2t+3=0$ действительных корней не имеет, то уравнение $8t^3+4t-3=0$ имеет единственный корень $t=\frac{1}{2}$. Это будет точка минимума функции $f(t)=16t^4+16t^2-24t+9$, так как производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс.

Поэтому $\left(r^2\right)_{\min}=\frac{25}{16}\left(\frac{16}{16}+\frac{16}{4}-\frac{24}{2}+9\right)=\frac{25\cdot 2}{16}$, и $r_{\min}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (м).

Нужно сравнить это число с $1,8=\frac{9}{5}$. Так как $\frac{5\sqrt{2}}{4}<\frac{9}{5}\ \Leftrightarrow\ 25\sqrt{2}<36\ \Leftrightarrow\ 25<18\sqrt{2}\ \Leftrightarrow$ $625<324\cdot 2$, то орех будет достижим для белки.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение, правильное значение минимального расстояния и правильный ответ на вопрос; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе имеются дефекты; например: найден корень кубического уравнения, но не доказано, что нет других корней; найден нуль производной, но не доказано, что это точка минимума; некорректно проведено сравнение чисел в конце и т. п.; **10 баллов**: правильный ход решения задачи, но ответ неверен из-за вычислительных ошибок; **5 баллов:** правильное начало решения, получено уравнение четвертой степени и правильно получена производная (по *t* или по *x*), но ее нули не найдены или найдены неверно.

Вариант 151

4. **Условие** Один моль идеального совершает циклический процесс, который в переменных P, T описывается уравнением

$$\left(\frac{P}{P_0} - a\right)^2 + \left(\frac{T}{T_0} - b\right)^2 = c^2,$$

где P_0, T_0, a, b, c — некоторые константы, $c^2 < a^2 + b^2$. Определите максимальный объем, который занимает газ.

Ответ: $V_{max} = \frac{RT_0}{P_0}\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac}$

Решение В осях $P/P_0, T/T_0$ процесс изображается окружностью с центром в точке (a, b) и радиусом c. Для каждой точки объем, занимаемый газом есть $R\frac{T}{P}$, то есть пропорционален тангенсу угла наклона прямой, соединяющей данную точку с началом координат. Ясно, что экстремальные значения достигаются, если эта прямая является касательной. Из геометрических соображений

$$\left(\frac{T/T_0}{P/P_0}\right)_{max} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac},$$

то есть

$$V_{max} = \frac{RT_0}{P_0}\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac}$$

Критерии:

1. Верно выписано выражение для искомой величины как функции какой-нибудь переменной, например, $V(T)$ или указано, как эту величину найти из геометрических соображений - 5 баллов
2. П. 1 + указано, при каком значении параметра достигается экстремум (через производную или геометрически), но значение экстремума не вычислено - 10 баллов
3. Получено верное выражение для экстремума, но сделаны ошибки в преобразованиях, или не до конца вычислены тригонометрические функции - 15 баллов

5. **Условие**: Два невесомых цилиндрических катка лежат на горизонтальной поверхности параллельно друг другу и имеют радиусы $R = 1{,}25$ м и $r = 75$ см. На них положена плоская тяжелая плита массы $m = 100$ кг так, что она имеет наклон к горизонту $\alpha = \arccos(0,92)$. Найдите величину и направление ускорения плиты до того момента, как она коснется земли, если проскальзывания нет. С каким ускорением двигаются катки? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Ответ: 2 м/с; arcsin0,2;

Решение: Перейдем в систему координат, где центр (левого) колеса покоится. В этой системе все точки обода движутся с одинаковой скоростью v. То есть поверхность движется горизонтально влево с этой скоростью. И точка соприкосновения с плитой так же имеет эту скорость, но направлена она под углом α к горизонту вправо.

Ту же скорость v имеет и точка соприкосновения второго колеса с поверхностью. В этой системе координат центр колеса так же покоится и точка соприкосновения с плитой движется под углом α вправо. То есть, плита движется вдоль себя (но только в этой системе координат!)

В абсолютной системе координат, связанной с поверхностью, ко всем скоростям мы должны добавить горизонтальную скорость v. Значит, плита движется поступательно вправо под углом $\alpha/2$ со скоростью $2v\cos(\alpha/2)$. Движение поступательное, прямолинейное (угол не зависит от скорости).

Далее, из закона сохранения энергии: если плита опустилась на h — из закона сохранения энергии она приобретет скорость $\sqrt{2gh}$. Но, поскольку её перемещение за это время равно $h/\sin(\alpha/2)$, из соответствующей формулы кинематики ($2as = v^2$), её ускорение равно $a = g\sin(\alpha/2)$.

Поскольку в условии дан арккосинус α, ответ можно записать так: $a = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Критерии:

1. Если понято, что движение плоскопараллельное. — 5 баллов
2. П. 1 + Получен угол $\alpha/2$ — 10 баллов
3. Найдено ускорение плиты — 15 баллов

6. **Условие**: Для орошения своего участка некий фермер создал систему каналов $ABCDEFGH$, изображенную на рисунке. Все каналы одинаковы и их соединение происходит в узлах, обозначенных буквами B, D и G. Вода поступает в узел A и выходит из узла E. Назовем расходом количество кубометров воды, протекающее через сечение канала за единицу времени.

Фермер обнаружил, что при перемещении по каналам из одной точки A, B, C, D, E, F, G или H в любую другую сумма расходов одинакова и не зависит от формы пути (С учётом знака — если мы движемся против течения, то расход вычитается).

Оказалось, что расход в канале BC равен q_0. Найдите расход в канале AB, в канале AH и общий расход воды, поступающий в узел A.

Ответ: $2q_0$, $\frac{3}{2}q_0$, $\frac{7}{2}q_0$

Решение: Сначала, в силу симметрии заметим, что расход в канале CD также равен q_0. Обозначим расход в канале BG и симметричном ему GD за x. Тогда суммарный расход по пути BCD равен расходу по пути BGD: $2q_0 = 2x$. Следовательно, $x = q_0$.

Далее, поскольку вода в эти каналы поступает из AB, расход в канале AB равен $2q_0$.

Искомый расход q в канале AH равен расходу в канале HG (в силу одинаковости этих каналов). По пути AHG сумма расходов получается равной $2q$, а по пути ABG — равной $3q_0$. Откуда получаем, что $q = \frac{3}{2}q_0$

Расход воды, поступающий в узел A расходится по каналам AB и AH. Значит общий расход воды равен $2q_0 + \frac{3}{2}q_0 = \frac{7}{2}q_0$

Критерии:

1. Понят закон сложения расходов по разным каналам — 5 баллов
2. П. 1 + рассуждения симметрии — 10 баллов
3. Проведен окончательный рассчет, но с ошибкой — 15 баллов

Решения задач варианта 152.

1. Двигатели запущенной вертикально вверх с поверхности Земли ракеты, обеспечивающие ракете ускорение 30 м/с^2, через 30 секунд после старта внезапно прекратили работу. На какую максимальную высоту поднимется ракета? Может ли эта ракета представлять опасность для объекта, находящегося на высоте 50 км? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: а) 54 км; б) да. **Решение.** Пусть $a = 30$ м/с^2, $\tau = 30$ с. На первом участке движения, когда двигатели работали, скорость и набранная высота соответственно равны: $V = at$, $y = \frac{at^2}{2}$.

Поэтому в момент прекращения работы двигателей: $V_0 = a\tau$, $y_0 = \frac{a\tau^2}{2}$ – это будет «нулевой» момент для второго участка.

На втором участке: $V = V_0 - gt = a\tau - gt$, $y = y_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau t - \frac{gt^2}{2}$. На максимальной высоте $V = a\tau - gt = 0$, поэтому время, когда ракета будет на максимальной высоте, равно: $t = \frac{a\tau}{g}$. Значит, максимальная высота подъёма ракеты равна:

$y_{\max} = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau\frac{a\tau}{g} - \frac{g}{2}\frac{a^2\tau^2}{g^2} = \frac{a\tau^2(g+a)}{2g}$. Подстановка чисел дает $y_{\max} = 54$ км.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ на оба вопроса; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе на первый вопрос, ответ на второй вопрос неверен или пропущен; **10 баллов**: правильные уравнения и правильная логика, но ответ неверен из-за арифметической ошибки; **5 баллов:** правильные уравнения и правильный ответ для случая, когда от ускорения на первом этапе отнимается g.

2. Передвижная железнодорожная платформа, имеющая горизонтальное днище в форме прямоугольника длиной 10 метров и шириной 4 метра, загружается песком. Поверхность песка имеет угол не более 45 градусов с плоскостью основания (иначе песчинки ссыпаются), плотность песка равняется 1 500 кг/м^3. Найдите максимальную массу насыпанного на платформу песка.

Ответ: 52 т. **Решение.** Расчет показывает, что максимальная высота песчаной кучи будет равна половине ширины платформы, то есть 2 м. Кучу можно разбить на «горизонтально лежащую вдоль платформы» призму (ее высота 6 м, а основание – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $2\sqrt{2}$ и гипотенузой 4), и две одинаковых пирамиды в «торцах» платформы (в основании каждой из них лежит прямоугольник 4 х 2 и высота равна 2).

Суммарный объем равен $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot 6+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2\cdot 2\ =24+\frac{32}{3}=\frac{104}{3}$ м^3. Поэтому масса равна $\frac{104}{3}\cdot 1500=52000$ кг.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ; **15 баллов**: при правильном в целом решении и правильном ответе имеются мелкие дефекты; **10 баллов**: правильное решение, но ответ неверен из-за арифметической ошибки.

3. Гаврила увидел в окно белку, севшую на ветку дерева прямо напротив него на расстоянии 3 м 75 см. Он решил покормить зверюшку и бросил орех горизонтально со скоростью 2,5 м/с прямо в направлении белки. Сможет ли белка поймать орех, если она умеет прыгать с большой скоростью в любом направлении на расстояние 2 м 70 см? Считать, что ускорение свободного падения равно $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: Нет. **Решение:** Координаты белки в начальный момент: $x=a$; $y=0$. Орех движется по закону: $x(t)=V_0t$; $y(t)=\frac{gt^2}{2}$.

Поэтому квадрат расстояния от сидящей белки до летящего ореха в момент времени t равен: $r^2=(V_0t-a)^2+\left(\frac{gt^2}{2}\right)^2\ =\frac{g^2t^4}{4}+V_0^2t^2-2V_0at+a^2$. Подставляя числовые значения, получаем: $r^2=25t^4+\frac{25}{4}t^2-\frac{75}{4}t+\frac{225}{16}\ \ r^2=\frac{25}{16}\left(16t^4+4t^2-12t+9\right)$.

Приходим к минимизации функции $f(t)=16t^4+4t^2-12t+9$. Так как $f'(t)=64t^3+8t-12=4\left(16t^3+2t-3\right)$, то решаем уравнение $16t^3+2t-3=0$. Так как $16t^3+2t-3=0\ =(2t-1)\left(8t^2+4t+3\right)$ и уравнение $8t^2+4t+3=0$ действительных корней не имеет, то уравнение $16t^3+2t-3=0$ имеет единственный корень $t=\frac{1}{2}$. Это будет точка минимума функции $f(t)=16t^4+4t^2-12t+9$, так как производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс.

Поэтому $\left(r^2\right)_{\min}=\frac{25}{16}\left(\frac{16}{16}+\frac{4}{4}-6+9\right)\ =\frac{25\cdot 5}{16}$, и $r_{\min}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$ (м).

Нужно сравнить это число с $2,7=\frac{27}{10}$. Так как $\frac{5\sqrt{5}}{4}>\frac{27}{10}\ \Leftrightarrow\ 25\sqrt{5}>54\ \Leftrightarrow\ 625\cdot 5>54\cdot 54$ $\Leftrightarrow\ 3125>2916$, то орех будет недостижим для белки.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение, правильное значение минимального расстояния и правильный ответ на вопрос; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе имеются дефекты; например: найден корень кубического уравнения, но не доказано, что нет других корней; найден нуль производной, но не доказано, что это точка минимума; некорректно проведено сравнение чисел в конце и т. п.; **10 баллов**: правильный ход решения задачи, но ответ неверен из-за вычислительных ошибок; **5 баллов:** правильное начало решения, получено уравнение четвертой степени и правильно получена производная (по *t* или по *x*), но ее нули не найдены или найдены неверно.

4. **Условие** Один моль идеального совершает циклический процесс, который в переменных T, V описывается уравнением

$$\left(\frac{V}{V_0}-a\right)^2+\left(\frac{T}{T_0}-b\right)^2=c^2,$$

где V_0, T_0, a, b, c — некоторые константы, $c^2 < a^2+b^2$. Определите максимальное давление газа в этом процессе.

Ответ: $P_{max}=\dfrac{RT_0}{V_0}\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac}$

Решение В осях $P/P_0, T/T_0$ процесс изображается окружностью с центром в точке (a, b) и радиусом c. Для каждой точки объем, занимаемый газом есть $R\frac{T}{P}$, то есть пропорционален тангенсу угла наклона прямой, соединяющей данную точку с началом координат. Ясно, что экстремальные значения достигаются, если эта прямая является касательной. Из геометрических соображений

$$\left(\frac{T/T_0}{P/P_0}\right)_{max}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac},$$

то есть

$$V_{max}=\frac{RT_0}{P_0}\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac}$$

Критерии:

1. Верно выписано выражение для искомой величины как функции какой-нибудь переменной, например, $V(T)$ или указано, как эту величину найти из геометрических соображений - 5 баллов
2. П. 1 + указано, при каком значении параметра достигается экстремум (через производную или геометрически), но значение экстремума не вычислено - 10 баллов
3. Получено верное выражение для экстремума, но сделаны ошибки в преобразованиях, или не до конца вычислены тригонометрические функции - 15 баллов

5. **Условие**: Два невесомых цилиндрических катка лежат на горизонтальной поверхности параллельно друг другу и имеют радиусы $R = 1$ м и $r = 40$ см. На них положена плоская тяжелая плита массы $m = 150$ кг так, что она имеет наклон к горизонту $\alpha = \arccos(0,68)$. Найдите величину и направление ускорения плиты до того момента, как она коснется земли, если проскальзывания нет. С каким ускорением двигаются катки? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Ответ: 4 м/с; arcsin0,4

Решение: Перейдем в систему координат, где центр (левого) колеса покоится. В этой системе все точки обода движутся с одинаковой скоростью v. То есть поверхность движется горизонтально влево с этой скоростью. И точка соприкосновения с плитой так же имеет эту скорость, но направлена она под углом α к горизонту вправо.

Ту же скорость v имеет и точка соприкосновения второго колеса с поверхностью. В этой системе координат центр колеса так же покоится и точка соприкосновения с плитой движется под углом α вправо. То есть, плита движется вдоль себя (но только в этой системе координат!)

В абсолютной системе координат, связанной с поверхностью, ко всем скоростям мы должны добавить горизонтальную скорость v. Значит, плита движется поступательно вправо под углом $\alpha/2$ со скоростью $2v\cos(\alpha/2)$. Движение поступательное, прямолинейное (угол не зависит от скорости).

Далее, из закона сохранения энергии: если плита опустилась на h — из закона сохранения энергии она приобретет скорость $\sqrt{2gh}$. Но, поскольку её перемещение за это время равно $h/\sin(\alpha/2)$, из соответствующей формулы кинематики ($2as = v^2$), её ускорение равно $a = g\sin(\alpha/2)$.

Поскольку в условии дан арккосинус α, ответ можно записать так: $a=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Критерии:

1. Если понято, что движение плоскопараллельное. — 5 баллов
2. П. 1 + Получен угол $\alpha/2$ — 10 баллов
3. Найдено ускорение плиты — 15 баллов

6. **Условие**: Для орошения своего участка некий фермер создал систему каналов $ABCDEFGH$, изображенную на рисунке. Все каналы одинаковы и их соединение происходит в узлах, обозначенных буквами B, D и G. Вода поступает в узел A и выходит из узла E. Назовем расходом количество кубометров воды, протекающее через сечение канала за единицу времени.

Фермер обнаружил, что при перемещении по каналам из одной точки A, B, C, D, E, F, G или H в любую другую сумма расходов одинакова и не зависит от формы пути (С учётом знака — если мы движемся против течения, то расход вычитается).

Оказалось, что расход в канале AH равен q_0. Найдите расход в канале AB, в канале BC и общий расход воды, поступающий в узел A.

Ответ: $\frac{4}{3}q_0$, $\frac{2}{3}q_0$, $\frac{7}{3}q_0$

Решение: Сначала, в силу симметрии заметим, что расход в канале HG также равен q_0. Обозначим расход в канале BC и симметричном ему CD за x, а в канале BG и симметричном ему GD за y.

Тогда суммарный расход по пути BCD равен расходу по пути BGD: $2x = 2y$. Следовательно, $x = y$.

По пути AHG сумма расходов получается равной $2q_0$, а по пути ABG — равной $3x$. Откуда получаем, что $x = \frac{2}{3}q_0$

Расход воды, поступающий в узел A расходится по каналам AB и AH. Значит общий расход воды равен $q_0 + \frac{4}{3}q_0 = \frac{7}{3}q_0$

Критерии:

1. Понят закон сложения расходов по разным каналам — 5 баллов
2. П. 1 + рассуждения симметрии — 10 баллов
3. Проведен окончательный рассчет, но с ошибкой — 15 баллов

Решения задач варианта 153.

1. Двигатели запущенной вертикально вверх с поверхности Земли ракеты, обеспечивающие ракете ускорение 20 м/с^2, через 50 секунд после старта внезапно прекратили работу. На какую максимальную высоту поднимется ракета? Может ли эта ракета представлять опасность для объекта, находящегося на высоте 70 км? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: а) 75 км; б) да. **Решение.** Пусть $a = 20$ м/с^2, $\tau = 50$ с. На первом участке движения, когда двигатели работали, скорость и набранная высота соответственно равны: $V = at$, $y = \dfrac{at^2}{2}$.

Поэтому в момент прекращения работы двигателей: $V_0 = a\tau$, $y_0 = \dfrac{a\tau^2}{2}$ – это будет «нулевой» момент для второго участка.

На втором участке: $V = V_0 - gt = a\tau - gt$, $y = y_0 + V_0 t - \dfrac{gt^2}{2} = \dfrac{a\tau^2}{2} + a\tau t - \dfrac{gt^2}{2}$. На максимальной высоте $V = a\tau - gt = 0$, поэтому время, когда ракета будет на максимальной высоте, равно: $t = \dfrac{a\tau}{g}$. Значит, максимальная высота подъёма ракеты равна:

$y_{\max} = \dfrac{a\tau^2}{2} + a\tau\dfrac{a\tau}{g} - \dfrac{g}{2}\dfrac{a^2\tau^2}{g^2} = \dfrac{a\tau^2\left(g+a\right)}{2g}$. Подстановка чисел дает $y_{\max} = 75$ км.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ на оба вопроса; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе на первый вопрос, ответ на второй вопрос неверен или пропущен; **10 баллов**: правильные уравнения и правильная логика, но ответ неверен из-за арифметической ошибки; **5 баллов:** правильные уравнения и правильный ответ для случая, когда от ускорения на первом этапе отнимается g.

2. Передвижная железнодорожная платформа, имеющая горизонтальное днище в форме прямоугольника длиной 8 метров и шириной 5 метров, загружается зерном. Поверхность зерна имеет угол не более 45 градусов с плоскостью основания (иначе зернышки ссыпаются), плотность зерна равняется 1 200 кг/м^3. Найдите максимальную массу насыпанного на платформу зерна.

Ответ: 47,5 т. **Решение.** Расчет показывает, что максимальная высота зерновой кучи будет равна половине ширины платформы, то есть 2,5 м. Кучу можно разбить на «горизонтально лежащую вдоль платформы» призму (ее высота 3 м, а основание – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ и гипотенузой 5), и две одинаковых пирамиды в «торцах» платформы (в основании каждой из них лежит прямоугольник 5 x 2,5 и высота равна 2,5).

Суммарный объем равен $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot \frac{5}{2}\cdot 3+2\cdot \frac{1}{3}\cdot 5\cdot \frac{5}{2}\cdot \frac{5}{2} = \frac{75}{4}+\frac{125}{6}=\frac{25\cdot 19}{12}$ м^3. Поэтому масса равна $\frac{25\cdot 19}{12}\cdot 1200=47500$ кг.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ; **15 баллов**: при правильном в целом решении и правильном ответе имеются мелкие дефекты; **10 баллов**: правильное решение, но ответ неверен из-за арифметической ошибки.

3. Гаврила увидел в окно белку, севшую на ветку дерева прямо напротив него на расстоянии 3 м 75 см. Он решил покормить зверюшку и бросил орех горизонтально со скоростью 5 м/с прямо в направлении белки. Сможет ли белка поймать орех, если она умеет прыгать с большой скоростью в любом направлении на расстояние 1 м 70 см? Считать, что ускорение свободного падения равно $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: Нет. **Решение:** Координаты белки в начальный момент: $x=a$; $y=0$. Орех движется по закону: $x(t)=V_0t$; $y(t)=\frac{gt^2}{2}$. Поэтому квадрат расстояния от сидящей белки до летящего ореха в момент времени *t* равен: $r^2=(V_0t-a)^2+\left(\frac{gt^2}{2}\right)^2 = \frac{g^2t^4}{4}+V_0^2t^2-2V_0at+a^2$.

Подставляя числовые значения, получаем: $r^2=25t^4+25t^2-\frac{75}{2}t+\frac{225}{16} = \frac{25}{16}\left(16t^4+16t^2-24t+9\right)$.

Приходим к минимизации функции $f(t)=16t^4+16t^2-24t+9$. Так как $f'(t)=64t^3+32t-24=8\left(8t^3+4t-3\right)$, то решаем уравнение $8t^3+4t-3=0$. Так как $8t^3+4t-3$ $=(2t-1)\left(4t^2+2t+3\right)$ и уравнение $4t^2+2t+3=0$ действительных корней не имеет, то уравнение $8t^3+4t-3=0$ имеет единственный корень $t=\frac{1}{2}$. Это будет точка минимума функции $f(t)=16t^4+16t^2-24t+9$, так как производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс.

Поэтому $\left(r^2\right)_{\min}=\frac{25}{16}\left(\frac{16}{16}+\frac{16}{4}-\frac{24}{2}+9\right) = \frac{25\cdot 2}{16}$, и $r_{\min}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (м).

Нужно сравнить это число с $1,7=\frac{17}{10}$. Так как $\frac{5\sqrt{2}}{4}>\frac{17}{10} \Leftrightarrow 25\sqrt{2}>34 \Leftrightarrow 25>17\sqrt{2} \Leftrightarrow$ $625>289\cdot 2$, то орех будет недостижим для белки.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение, правильное значение минимального расстояния и правильный ответ на вопрос; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе имеются дефекты; например: найден корень кубического уравнения, но не доказано, что нет других корней; найден нуль производной, но не доказано, что это точка минимума; некорректно проведено сравнение чисел в конце и т. п.; **10 баллов**: правильный ход решения задачи, но ответ неверен из-за вычислительных ошибок; **5 баллов:** правильное начало решения, получено уравнение четвертой степени и правильно получена производная (по *t* или по *x*), но ее нули не найдены или найдены неверно.

4. **Условие** Один моль идеального совершает циклический процесс, который в переменных P, T описывается уравнением

$$\left(\frac{P}{P_0}-a\right)^2+\left(\frac{T}{T_0}-b\right)^2=c^2,$$

где P_0, T_0, a, b, c — некоторые константы, $c^2<a^2+b^2$. Определите минимальный объем газа в этом процессе.

Ответ: $V_{min}=\frac{RT_0}{P_0}\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}-bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}+ac}$

Решение В осях $P/P_0, T/T_0$ процесс изображается окружностью с центром в точке (a, b) и радиусом c. Для каждой точки объем, занимаемый газом есть $R\frac{T}{P}$, то есть пропорционален тангенсу угла наклона прямой, соединяющей данную точку с началом координат. Ясно, что экстремальные значения достигаются, если эта прямая является касательной. Из геометрических соображений

$$\left(\frac{T/T_0}{P/P_0}\right)_{max}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac},$$

то есть

$$V_{max}=\frac{RT_0}{P_0}\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac}$$

Критерии:

1. Верно выписано выражение для искомой величины как функции какой-нибудь переменной, например, $V(T)$ или указано, как эту величину найти из геометрических соображений - 5 баллов
2. П. 1 + указано, при каком значении параметра достигается экстремум (через производную или геометрически), но значение экстремума не вычислено - 10 баллов
3. Получено верное выражение для экстремума, но сделаны ошибки в преобразованиях, или не до конца вычислены тригонометрические функции - 15 баллов

5. **Условие**: Два невесомых цилиндрических катка лежат на горизонтальной поверхности параллельно друг другу и имеют радиусы $R=1$ м и $r=75$ см. На них положена плоская тяжелая плита массы $m=75$ кг так, что она имеет наклон к горизонту $\alpha=\arccos(0,98)$. Найдите величину и направление ускорения плиты до того момента, как она коснется земли, если проскальзывания нет. С каким ускорением двигаются катки? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Ответ: 1 м/с; arcsin0,1;

Решение: Перейдем в систему координат, где центр (левого) колеса покоится. В этой системе все точки обода движутся с одинаковой скоростью v. То есть поверхность движется горизонтально влево с этой скоростью. И точка соприкосновения с плитой так же имеет эту скорость, но направлена она под углом α к горизонту вправо.

Ту же скорость v имеет и точка соприкосновения второго колеса с поверхностью. В этой системе координат центр колеса так же покоится и точка соприкосновения с плитой движется под углом α вправо. То есть, плита движется вдоль себя (но только в этой системе координат!)

В абсолютной системе координат, связанной с поверхностью, ко всем скоростям мы должны добавить горизонтальную скорость v. Значит, плита движется поступательно вправо под углом $\alpha/2$ со скоростью $2v\cos(\alpha/2)$. Движение поступательное, прямолинейное (угол не зависит от скорости).

Далее, из закона сохранения энергии: если плита опустилась на h — из закона сохранения энергии она приобретет скорость $\sqrt{2gh}$. Но, поскольку её перемещение за это время равно $h/\sin(\alpha/2)$, из соответствующей формулы кинематики ($2as=v^2$), eӵ ускорение равно $a=g\sin(\alpha/2)$.

Поскольку в условии дан арккосинус α, ответ можно записать так: $a=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Критерии:

1. Если понято, что движение плоскопараллельное. — 5 баллов
2. П. 1 + Получен угол $\alpha/2$ — 10 баллов
3. Найдено ускорение плиты — 15 баллов

6. **Условие**: Для орошения своего участка некий фермер создал систему каналов $ABCDEFGH$, изображенную на рисунке. Все каналы одинаковы и их соединение происходит в узлах, обозначенных буквами B, D и G. Вода поступает в узел A и выходит из узла E. Назовем расходом количество кубометров воды, протекающее через сечение канала за единицу времени.

Фермер обнаружил, что при перемещении по каналам из одной точки A, B, C, D, E, F, G или H в любую другую сумма расходов одинакова и не зависит от формы пути (С учётом знака — если мы движемся против течения, то расход вычитается).

Оказалось, что расход в канале BC равен q_0. Найдите расход в канале AB, в канале AH и общий расход воды, поступающий в узел A.

Ответ: $\frac{1}{2}q_0$, $\frac{3}{4}q_0$, $\frac{7}{4}q_0$

Решение: Обозначим расход в канале BC за x. Заметим, в силу симметрии, что расход в канале CD также равен x. Обозначим расход в канале BG и симметричном ему GD за y. Тогда суммарный расход по пути BCD равен расходу по пути BGD: $2x = 2y$. Следовательно, $x = y$.

Далее, поскольку вода в эти каналы поступает из AB, $x = \frac{1}{2}q_0$.

Искомый расход q в канале AH равен расходу в канале HG (в силу одинаковости этих каналов). По пути AHG сумма расходов получается равной $2q$, а по пути ABG — равной $\frac{3}{2}q_0$. Откуда получаем, что $q = \frac{3}{4}q_0$

Расход воды, поступающий в узел A расходится по каналам AB и AH. Значит общий расход воды равен $q_0 + \frac{3}{4}q_0 = \frac{7}{4}q_0$

Критерии:

1. Понят закон сложения расходов по разным каналам — 5 баллов
2. П. 1 + рассуждения симметрии — 10 баллов
3. Проведен окончательный рассчет, но с ошибкой — 15 баллов

Решения задач варианта 154.

1. Двигатели запущенной вертикально вверх с поверхности Земли ракеты, обеспечивающие ракете ускорение 30 м/с^2, через 20 секунд после старта внезапно прекратили работу. На какую максимальную высоту поднимется ракета? Может ли эта ракета представлять опасность для объекта, находящегося на высоте 20 км? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: а) 24 км; б) да. **Решение.** Пусть $a = 30$ м/с^2, $\tau = 20$ с. На первом участке движения, когда двигатели работали, скорость и набранная высота соответственно равны: $V = at$, $y = \frac{at^2}{2}$. Поэтому в момент прекращения работы двигателей: $V_0 = a\tau$, $y_0 = \frac{a\tau^2}{2}$ – это будет «нулевой» момент для второго участка.

На втором участке: $V = V_0 - gt = a\tau - gt$, $y = y_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau t - \frac{gt^2}{2}$. На максимальной высоте $V = a\tau - gt = 0$, поэтому время, когда ракета будет на максимальной высоте, равно: $t = \frac{a\tau}{g}$. Значит, максимальная высота подъёма ракеты равна:

$y_{\max} = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau\frac{a\tau}{g} - \frac{g}{2}\frac{a^2\tau^2}{g^2} = \frac{a\tau^2\left(g+a\right)}{2g}$. Подстановка чисел дает $y_{\max} = 24$ км.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ на оба вопроса; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе на первый вопрос, ответ на второй вопрос неверен или пропущен; **10 баллов**: правильные уравнения и правильная логика, но ответ неверен из-за арифметической ошибки; **5 баллов:** правильные уравнения и правильный ответ для случая, когда от ускорения на первом этапе отнимается g.

2. Передвижная железнодорожная платформа, имеющая горизонтальное днище в форме прямоугольника длиной 8 метров и шириной 4 метра, загружается песком. Поверхность песка имеет угол не более 45 градусов с плоскостью основания (иначе песчинки ссыпаются), плотность песка равняется 1 500 кг/м^3. Найдите максимальную массу насыпанного на платформу песка.

Ответ: 40 т. **Решение.** Расчет показывает, что максимальная высота песчаной кучи будет равна половине ширины платформы, то есть 2 м. Кучу можно разбить на «горизонтально лежащую вдоль платформы» призму (ее высота 4 м, а основание – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $2\sqrt{2}$ и гипотенузой 4), и две одинаковых пирамиды в «торцах» платформы (в основании каждой из них лежит прямоугольник 4 х 2 и высота равна 2).

Суммарный объем равен $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot 4+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2\cdot 2\ =16+\frac{32}{3}=\frac{80}{3}$ м^3. Поэтому масса равна $\frac{80}{3}\cdot 1500=40000$ кг.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ; **15 баллов**: при правильном в целом решении и правильном ответе имеются мелкие дефекты; **10 баллов**: правильное решение, но ответ неверен из-за арифметической ошибки.

3. Гаврила увидел в окно белку, севшую на ветку дерева прямо напротив него на расстоянии 3 м 75 см. Он решил покормить зверюшку и бросил орех горизонтально со скоростью 2,5 м/с прямо в направлении белки. Сможет ли белка поймать орех, если она умеет прыгать с большой скоростью в любом направлении на расстояние 2 м 80 см? Считать, что ускорение свободного падения равно $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: Да. **Решение:** Координаты белки в начальный момент: $x=a$; $y=0$. Орех движется по закону: $x(t)=V_0t$; $y(t)=\frac{gt^2}{2}$.

Поэтому квадрат расстояния от сидящей белки до летящего ореха в момент времени t равен: $r^2=(V_0t-a)^2+\left(\frac{gt^2}{2}\right)^2\ =\frac{g^2t^4}{4}+V_0^2t^2-2V_0at+a^2$. Подставляя числовые значения, получаем: $r^2=25t^4+\frac{25}{4}t^2-\frac{75}{4}t+\frac{225}{16}\ \ r^2=\frac{25}{16}\left(16t^4+4t^2-12t+9\right)$.

Приходим к минимизации функции $f(t)=16t^4+4t^2-12t+9$. Так как $f'(t)=64t^3+8t-12=4\left(16t^3+2t-3\right)$, то решаем уравнение $16t^3+2t-3=0$. Так как $16t^3+2t-3=0\ =(2t-1)\left(8t^2+4t+3\right)$ и уравнение $8t^2+4t+3=0$ действительных корней не имеет, то уравнение $16t^3+2t-3=0$ имеет единственный корень $t=\frac{1}{2}$. Это будет точка минимума функции $f(t)=16t^4+4t^2-12t+9$, так как производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс.

Поэтому $\left(r^2\right)_{\min}=\frac{25}{16}\left(\frac{16}{16}+\frac{4}{4}-6+9\right)\ =\frac{25\cdot 5}{16}$, и $r_{\min}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$ (м).

Нужно сравнить это число с $2,8=\frac{14}{5}$. Так как $\frac{5\sqrt{5}}{4}<\frac{14}{5}\ \Leftrightarrow\ 25\sqrt{5}<56\ \Leftrightarrow\ 625\cdot 5<56\cdot 56$ $\Leftrightarrow\ 3125>3136$, то орех будет достижим для белки.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение, правильное значение минимального расстояния и правильный ответ на вопрос; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе имеются дефекты; например: найден корень кубического уравнения, но не доказано, что нет других корней; найден нуль производной, но не доказано, что это точка минимума; некорректно проведено сравнение чисел в конце и т. п.; **10 баллов**: правильный ход решения задачи, но ответ неверен из-за вычислительных ошибок; **5 баллов:** правильное начало решения, получено уравнение четвертой степени и правильно получена производная (по *t* или по *x*), но ее нули не найдены или найдены неверно.

Вариант 154

4. **Условие** Один моль идеального совершает циклический процесс, который в переменных T, V описывается уравнением

$$\left(\frac{V}{V_0} - a\right)^2 + \left(\frac{T}{T_0} - b\right)^2 = c^2,$$

где V_0, T_0, a, b, c — некоторые константы, $c^2 < a^2 + b^2$. Определите минимальное давление газа в этом процессе.

Ответ: $P_{min} = \dfrac{RT_0}{V_0}\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}-bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}+ac}$

Решение В осях $P/P_0, T/T_0$ процесс изображается окружностью с центром в точке (a, b) и радиусом c. Для каждой точки объем, занимаемый газом есть $R\frac{T}{P}$, то есть пропорционален тангенсу угла наклона прямой, соединяющей данную точку с началом координат. Ясно, что экстремальные значения достигаются, если эта прямая является касательной. Из геометрических соображений

$$\left(\frac{T/T_0}{P/P_0}\right)_{max} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac},$$

то есть

$$V_{max} = \frac{RT_0}{P_0}\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac}$$

Критерии:

1. Верно выписано выражение для искомой величины как функции какой-нибудь переменной, например, $V(T)$ или указано, как эту величину найти из геометрических соображений - 5 баллов
2. П. 1 + указано, при каком значении параметра достигается экстремум (через производную или геометрически), но значение экстремума не вычислено - 10 баллов
3. Получено верное выражение для экстремума, но сделаны ошибки в преобразованиях, или не до конца вычислены тригонометрические функции - 15 баллов

5. **Условие**: Два невесомых цилиндрических катка лежат на горизонтальной поверхности параллельно друг другу и имеют радиусы $R = 1$ м и $r = 50$ см. На них положена плоская тяжелая плита массы $m = 75$ кг так, что она имеет наклон к горизонту $\alpha = \arccos(0,82)$. Найдите величину и направление ускорения плиты до того момента, как она коснется земли, если проскальзывания нет. С каким ускорением двигаются катки? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Ответ: 3 м/с; arcsin0,2.

Решение: Перейдем в систему координат, где центр (левого) колеса покоится. В этой системе все точки обода движутся с одинаковой скоростью v. То есть поверхность движется горизонтально влево с этой скоростью. И точка соприкосновения с плитой так же имеет эту скорость, но направлена она под углом α к горизонту вправо.

Ту же скорость v имеет и точка соприкосновения второго колеса с поверхностью. В этой системе координат центр колеса так же покоится и точка соприкосновения с плитой движется под углом α вправо. То есть, плита движется вдоль себя (но только в этой системе координат!)

В абсолютной системе координат, связанной с поверхностью, ко всем скоростям мы должны добавить горизонтальную скорость v. Значит, плита движется поступательно вправо под углом $\alpha/2$ со скоростью $2v\cos(\alpha/2)$. Движение поступательное, прямолинейное (угол не зависит от скорости).

Далее, из закона сохранения энергии: если плита опустилась на h — из закона сохранения энергии она приобретет скорость $\sqrt{2gh}$. Но, поскольку её перемещение за это время равно $h/\sin(\alpha/2)$, из соответствующей формулы кинематики ($2as = v^2$), её ускорение равно $a = g\sin(\alpha/2)$.

Поскольку в условии дан арккосинус α, ответ можно записать так: $a = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Критерии:

1. Если понято, что движение плоскопараллельное. — 5 баллов
2. П. 1 + Получен угол $\alpha/2$ — 10 баллов
3. Найдено ускорение плиты — 15 баллов

6. **Условие**: Для орошения своего участка некий фермер создал систему каналов $ABCDEFGH$, изображенную на рисунке. Все каналы одинаковы и их соединение происходит в узлах, обозначенных буквами B, D и G. Вода поступает в узел A и выходит из узла E. Назовем расходом количество кубометров воды, протекающее через сечение канала за единицу времени.

Фермер обнаружил, что при перемещении по каналам из одной точки A, B, C, D, E, F, G или H в любую другую сумма расходов одинакова и не зависит от формы пути (С учётом знака — если мы движемся против течения, то расход вычитается).

Оказалось, что общий расход воды, поступающий в узел A равен q_0. Найдите расход в каждом из каналов DE, BC и в GF.

Ответ: $\frac{4}{7}q_0$, $\frac{2}{7}q_0$, $\frac{3}{7}q_0$

Решение: Сначала, в силу симметрии заметим, что расход в канале BC равен расходу в канале CD (обозначим его за x), а расход в канале BG равен расходу в канале GD (его обозначим за y).

Тогда суммарный расход по пути BCD равен расходу по пути BGD: $2x = 2y$. Следовательно, $x = y$.

В канал DE уже попадает $2x$.

Обозначам расход в канале GF за q. Такой же расход в канале FE.

По пути GFE сумма расходов получается равной $2q$, а по пути GDE — равной $3x$. Откуда получаем, что $x = \frac{2}{3}q$. Значит, в канал DE попадает $2x = \frac{4}{3}q$

Расход воды, поступающий в узел E (а, значит, и в A) равен суммарному $q + \frac{4}{3}q = \frac{7}{3}q$, По условию задачи — это q_0 Значит, $q = \frac{3}{7}q_0$, а $x = \frac{2}{7}q_0$.

Критерии:

1. Понят закон сложения расходов по разным каналам — 5 баллов
2. П. 1 + рассуждения симметрии — 10 баллов
3. Проведен окончательный рассчет, но с ошибкой — 15 баллов