

**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2015-2016 учебный год**

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА

**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2015-2016 учебный год**

**ЗАДАНИЯ ПЕРВОГО ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ**

Задание 1

Вариант 1.1

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0; 0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.012 + 0.26x - ax^2$, $a > 0$. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0125, доля бария оказывается не менее 0.015. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a ? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2$; $a, b, c > 0$. По условию задачи из неравенства $\alpha \leq x \leq 0.1$ следует $g(x) \geq \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \geq \alpha, x_2 \leq 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \begin{cases} \frac{b}{2a} \leq \alpha \Leftrightarrow a \geq \frac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{b}{2\alpha}, \frac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01} \right] \\
 2. \quad & \begin{cases} \alpha \leq \frac{b}{2a} \leq 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \\
 & a \in \left[\frac{b}{0.2}; \min\left(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1)\right) \right], f(\alpha) = \frac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}. \\
 3. \quad & \begin{cases} \frac{b}{2a} \geq 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min\left(\frac{b}{0.2}, f(\alpha)\right)].
 \end{aligned}$$

Подставляя значения $c=0.012$, $b=0.26$, $\alpha=0.0125$, $\beta=0.015$ и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.3]$.

Ответ: 2.3.

Вариант 1.2

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0; 0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.013 + 0.25x - ax^2$, $a > 0$. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.014, доля бария оказывается не менее 0.016. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a ? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2$; $a, b, c > 0$. По условию задачи из неравенства $\alpha \leq x \leq 0.1$ следует $g(x) \geq \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \geq \alpha, x_2 \leq 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

$$1. \begin{cases} \frac{b}{2a} \leq \alpha \Leftrightarrow a \geq \frac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{b}{2\alpha}, \frac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01} \right]$$

$$2. \begin{cases} \alpha \leq \frac{b}{2a} \leq 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases}$$

$$a \in \left[\frac{b}{0.2}; \min\left(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1)\right) \right], f(\alpha) = \frac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$$

$$3. \begin{cases} \frac{b}{2a} \geq 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min\left(\frac{b}{0.2}, f(\alpha)\right)].$$

Подставляя значения $c=0.013$, $b=0.25$, $\alpha=0.014$, $\beta=0.016$ и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.2]$.

Ответ: 2.2.

Вариант 1.3

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0; 0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.013 + 0.27x - ax^2$, $a > 0$. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0126, доля бария оказывается не менее 0.016. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a ? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2$; $a, b, c > 0$. По условию задачи из неравенства $\alpha \leq x \leq 0.1$ следует $g(x) \geq \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \geq \alpha, x_2 \leq 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни

уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

$$1. \begin{cases} \frac{b}{2a} \leq \alpha \Leftrightarrow a \geq \frac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{b}{2\alpha}, \frac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01} \right]$$

$$2. \begin{cases} \alpha \leq \frac{b}{2a} \leq 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases}$$

$$a \in \left[\frac{b}{0.2}; \min\left(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1)\right) \right], f(\alpha) = \frac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$$

$$3. \begin{cases} \frac{b}{2a} \geq 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min\left(\frac{b}{0.2}, f(\alpha)\right)].$$

Подставляя значения $c=0.013$, $b=0.27$, $\alpha=0.0126$, $\beta=0.016$ и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.4]$.

Ответ: 2.4.

Вариант 1.4

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0; 0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.014 + 0.27x - ax^2$, $a > 0$. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0125, доля бария оказывается не менее 0.016. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a ? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2$; $a, b, c > 0$. По условию задачи из неравенства $\alpha \leq x \leq 0.1$ следует $g(x) \geq \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \geq \alpha, x_2 \leq 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

$$1. \begin{cases} \frac{b}{2a} \leq \alpha \Leftrightarrow a \geq \frac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{b}{2\alpha}, \frac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01} \right]$$

$$2. \begin{cases} \alpha \leq \frac{b}{2a} \leq 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases}$$

$$a \in [\frac{b}{0.2}; \min(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1))], f(\alpha) = \frac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$$

$$3. \begin{cases} \frac{b}{2a} \geq 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min(\frac{b}{0.2}, f(\alpha))].$$

Подставляя значения $c=0.014$, $b=0.27$, $\alpha=0.0125$, $\beta=0.016$ и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.5]$.

Ответ: 2.5.

Вариант 1.5

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0; 0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.015 + 0.28x - ax^2$, $a > 0$. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0126, доля бария оказывается не менее 0.017. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a ? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2$; $a, b, c > 0$. По условию задачи из неравенства $\alpha \leq x \leq 0.1$ следует $g(x) \geq \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \geq \alpha, x_2 \leq 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

$$1. \begin{cases} \frac{b}{2a} \leq \alpha \Leftrightarrow a \geq \frac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [\frac{b}{2\alpha}, \frac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01}]$$

$$2. \begin{cases} \alpha \leq \frac{b}{2a} \leq 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases}$$

$$a \in [\frac{b}{0.2}; \min(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1))], f(\alpha) = \frac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$$

$$3. \begin{cases} \frac{b}{2a} \geq 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min(\frac{b}{0.2}, f(\alpha))].$$

Подставляя значения $c=0.015$, $b=0.28$, $\alpha=0.0126$, $\beta=0.017$ и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.6]$.

Ответ: 2.6.

Вариант 1.6

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0; 0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.016 + 0.29x - ax^2$, $a > 0$. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0125, доля бария оказывается не менее 0.018. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a ? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2$; $a, b, c > 0$. По условию задачи из неравенства $\alpha \leq x \leq 0.1$ следует $g(x) \geq \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \geq \alpha, x_2 \leq 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

$$1. \begin{cases} \frac{b}{2a} \leq \alpha \Leftrightarrow a \geq \frac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{b}{2\alpha}, \frac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01} \right]$$

$$2. \begin{cases} \alpha \leq \frac{b}{2a} \leq 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases}$$

$$a \in \left[\frac{b}{0.2}; \min\left(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1)\right) \right], f(\alpha) = \frac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$$

$$3. \begin{cases} \frac{b}{2a} \geq 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min\left(\frac{b}{0.2}, f(\alpha)\right)].$$

Подставляя значения $c=0.016$, $b=0.29$, $\alpha=0.0125$, $\beta=0.018$ и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.7]$.

Ответ: 2.7.

Вариант 1.7

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0; 0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как

$g(x) = 0.017 + 0.3x - ax^2$, $a > 0$. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0125, доля бария оказывается не менее 0.019. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a ? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2$; $a, b, c > 0$. По условию задачи из неравенства $\alpha \leq x \leq 0.1$ следует $g(x) \geq \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \geq \alpha, x_2 \leq 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

$$1. \begin{cases} \frac{b}{2a} \leq \alpha \Leftrightarrow a \geq \frac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{b}{2\alpha}, \frac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01} \right]$$

$$2. \begin{cases} \alpha \leq \frac{b}{2a} \leq 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases}$$

$$a \in \left[\frac{b}{0.2}; \min\left(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1)\right) \right], f(\alpha) = \frac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$$

$$3. \begin{cases} \frac{b}{2a} \geq 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min\left(\frac{b}{0.2}, f(\alpha)\right)].$$

Подставляя значения $c=0.017$, $b=0.3$, $\alpha=0.0125$, $\beta=0.019$ и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.8]$.

Ответ: 2.8.

Вариант 1.8

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0; 0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.018 + 0.31x - ax^2$, $a > 0$. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0125, доля бария оказывается не менее 0.02. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a ? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2$; $a, b, c > 0$. По условию задачи из неравенства $\alpha \leq x \leq 0.1$ следует $g(x) \geq \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \geq \alpha, x_2 \leq 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

$$1. \begin{cases} \frac{b}{2a} \leq \alpha \Leftrightarrow a \geq \frac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{b}{2\alpha}, \frac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01} \right]$$

$$2. \begin{cases} \alpha \leq \frac{b}{2a} \leq 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \leq 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases}$$

$$a \in \left[\frac{b}{0.2}; \min\left(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1)\right) \right], f(\alpha) = \frac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$$

$$3. \begin{cases} \frac{b}{2a} \geq 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min\left(\frac{b}{0.2}, f(\alpha)\right)].$$

Подставляя значения $c=0.018$, $b=0.31$, $\alpha=0.0125$, $\beta=0.02$ и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.9]$.

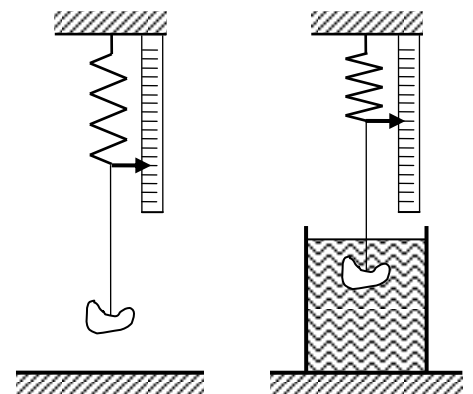
Ответ: 2.9.

Задание 2

Вариант 2.1

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса $P_1 = 10,000$ Н, а в воде (см. рис.) $P_2 = 9,000$ Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_m = 8960$ кг/м³, плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³, молярная масса меди $M_m = 64$ г/моль, молярная масса олова $M_{ол} = 119$ г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{\text{Архимеда}} = mg - \rho_v gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_B g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_B \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}.$$

(1)

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_M m_M + N_{OL} m_{OL}}{V}$$

где m_M , m_{OL} – массы атомов меди и олова, а N_M , N_{OL} – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{OL} = \alpha N$, $N_M = (1 - \alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1 - \alpha)N m_M + \alpha N m_{OL}}{V}.$$

(2)

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при $\alpha = 0$, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_M = \frac{N m_M}{V}.$$

(3)

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{OL}}{m_M} \right) \rho_M.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{OL}}{m_M} = \frac{M_{OL}}{M_M}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{OL}}{M_M} \right) \rho_M.$$

(4)

Приравняв правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_B \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{OL}}{M_M} \right) \rho_M,$$

откуда

$$\alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_M} - 1}{\frac{M_{OL}}{M_M} - 1}.$$

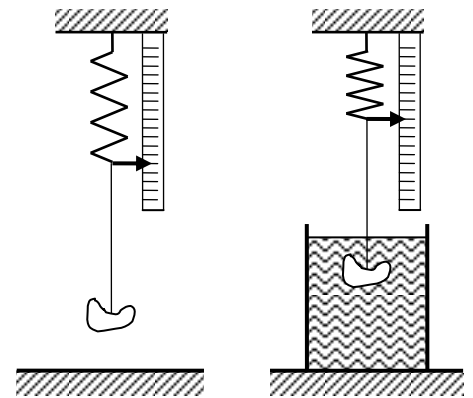
$$\text{Числовой ответ: } \alpha = \frac{\frac{10,000}{10,000 - 9,000} \cdot \frac{1000}{8960} - 1}{\frac{119}{64} - 1} \approx 0,135.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1} \approx 13,5 \%$$

Вариант 2.2

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса $P_1 = 10,000$ Н, а в воде (см. рис.) $P_2 = 8,965$ Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_{\text{м}} = 8960$ кг/м³, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³, молярная масса меди $M_{\text{м}} = 64$ г/моль, молярная масса олова $M_{\text{ол}} = 119$ г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{\text{Архимеда}} = mg - \rho_{\text{в}} gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_{\text{в}} g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}.$$

(1)

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_{\text{м}} m_{\text{м}} + N_{\text{ол}} m_{\text{ол}}}{V}$$

где $m_{\text{м}}$, $m_{\text{ол}}$ – массы атомов меди и олова, а $N_{\text{м}}$, $N_{\text{ол}}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{\text{ол}} = \alpha N$, $N_{\text{м}} = (1 - \alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1 - \alpha)N m_{\text{м}} + \alpha N m_{\text{ол}}}{V}.$$

(2)

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при $\alpha = 0$, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_M = \frac{Nm_M}{V}.$$

(3)

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{\text{ол}}}{m_M} \right) \rho_M.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{\text{ол}}}{m_M} = \frac{M_{\text{ол}}}{M_M}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_M} \right) \rho_M.$$

(4)

Приравнявая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_B \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_M} \right) \rho_M,$$

откуда

$$\alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_M} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_M} - 1}.$$

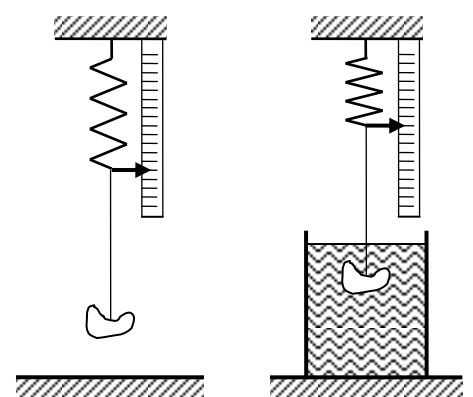
$$\text{Числовой ответ: } \alpha = \frac{\frac{10,000}{10,000 - 8,965} \cdot \frac{1000}{8960} - 1}{\frac{119}{64} - 1} \approx 0,091.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_M} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_M} - 1} \approx 9,1\%$$

Вариант 2.3

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса $P_1 = 10,000$ Н, а в воде (см. рис.) $P_2 = 8,980$ Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_M = 8960$ кг/м³, плотность воды $\rho_B = 1000$ кг/м³, молярная масса меди $M_M = 64$ г/моль, молярная масса



олова $M_{\text{ол}} = 119$ г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{\text{Архимеда}} = mg - \rho_{\text{в}} gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_{\text{в}} g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}.$$

(1)

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_{\text{м}} m_{\text{м}} + N_{\text{ол}} m_{\text{ол}}}{V}$$

где $m_{\text{м}}$, $m_{\text{ол}}$ – массы атомов меди и олова, а $N_{\text{м}}$, $N_{\text{ол}}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{\text{ол}} = \alpha N$, $N_{\text{м}} = (1 - \alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1 - \alpha)N m_{\text{м}} + \alpha N m_{\text{ол}}}{V}.$$

(2)

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при $\alpha = 0$, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_{\text{м}} = \frac{N m_{\text{м}}}{V}.$$

(3)

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}} \right) \rho_{\text{м}}.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}} = \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} \right) \rho_{\text{м}}.$$

(4)

Приравнивая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} \right) \rho_{\text{м}},$$

откуда

$$\alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_M} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_M} - 1}.$$

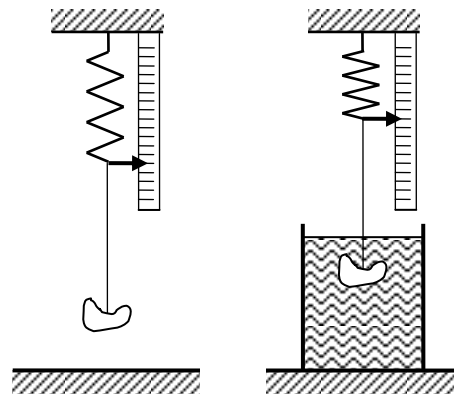
$$\text{Числовой ответ: } \alpha = \frac{\frac{10,000}{10,000 - 8,980} \cdot \frac{1000}{8960} - 1}{\frac{119}{64} - 1} \approx 0,110.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_M} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_M} - 1} \approx 11,0 \%$$

Вариант 2.4

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса $P_1 = 10,000$ Н, а в воде (см. рис.) $P_2 = 8,990$ Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_M = 8960$ кг/м³, плотность воды $\rho_B = 1000$ кг/м³, молярная масса меди $M_M = 64$ г/моль, молярная масса олова $M_{\text{ол}} = 119$ г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{\text{Архимеда}} = mg - \rho_B gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_B g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_B \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}.$$

(1)

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_M m_M + N_{\text{ол}} m_{\text{ол}}}{V}$$

где $m_{\text{м}}$, $m_{\text{ол}}$ – массы атомов меди и олова, а $N_{\text{м}}$, $N_{\text{ол}}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{\text{ол}} = \alpha N$, $N_{\text{м}} = (1 - \alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1 - \alpha)Nm_{\text{м}} + \alpha Nm_{\text{ол}}}{V}.$$

(2)

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при $\alpha = 0$, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_{\text{м}} = \frac{Nm_{\text{м}}}{V}.$$

(3)

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}}\right) \rho_{\text{м}}.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}} = \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right) \rho_{\text{м}}.$$

(4)

Приравнявая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right) \rho_{\text{м}},$$

откуда

$$\alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1}.$$

Числовой ответ: $\alpha = \frac{\frac{10,000}{10,000 - 8,965} \cdot \frac{1000}{8960} - 1}{\frac{119}{64} - 1} \approx 0,122.$

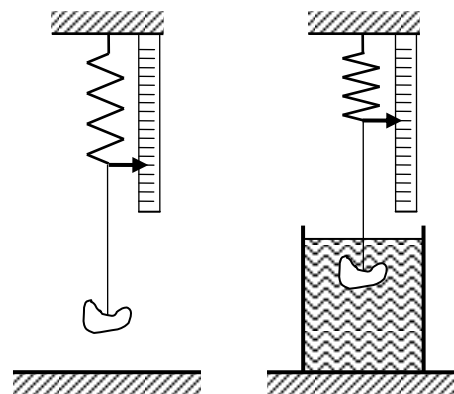
Ответ: $\alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1} \approx 12,2 \%$

Вариант 2.5

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная

бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса $P_1 = 10,000$ Н, а в воде (см. рис.) $P_2 = 9,025$ Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_M = 8960$ кг/м³, плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³, молярная масса меди $M_M = 64$ г/моль, молярная масса олова $M_{ол} = 119$ г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{\text{Архимеда}} = mg - \rho_v gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_v g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_v \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}.$$

(1)

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_M m_M + N_{ол} m_{ол}}{V}$$

где m_M , $m_{ол}$ – массы атомов меди и олова, а N_M , $N_{ол}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{ол} = \alpha N$, $N_M = (1 - \alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1 - \alpha)N m_M + \alpha N m_{ол}}{V}.$$

(2)

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при $\alpha = 0$, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_M = \frac{N m_M}{V}.$$

(3)

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{ол}}{m_M} \right) \rho_M.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{ол}}{m_M} = \frac{M_{ол}}{M_M}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} \right) \rho_{\text{м}}.$$

(4)

Приравнявая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} \right) \rho_{\text{м}},$$

откуда

$$\alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1}.$$

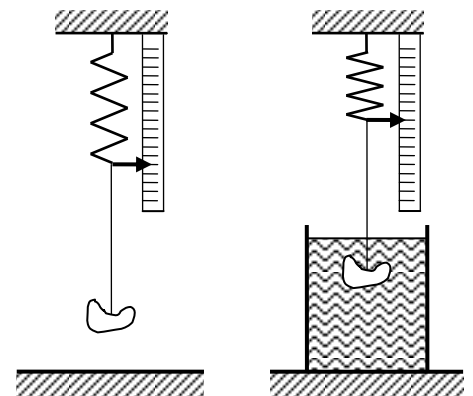
$$\text{Числовой ответ: } \alpha = \frac{\frac{10,000}{10,000 - 9,025} \cdot \frac{1000}{8960} - 1}{\frac{119}{64} - 1} \approx 0,168.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1} \approx 16,8\%$$

Вариант 2.6

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса $P_1 = 10,000$ Н, а в воде (см. рис.) $P_2 = 9,040$ Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_{\text{м}} = 8960$ кг/м³, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³, молярная масса меди $M_{\text{м}} = 64$ г/моль, молярная масса олова $M_{\text{ол}} = 119$ г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{\text{Архимеда}} = mg - \rho_{\text{в}} gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_{\text{в}} g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}.$$

(1)

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_{\text{м}}m_{\text{м}} + N_{\text{ол}}m_{\text{ол}}}{V}$$

где $m_{\text{м}}$, $m_{\text{ол}}$ – массы атомов меди и олова, а $N_{\text{м}}$, $N_{\text{ол}}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{\text{ол}} = \alpha N$, $N_{\text{м}} = (1 - \alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1 - \alpha)Nm_{\text{м}} + \alpha Nm_{\text{ол}}}{V}.$$

(2)

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при $\alpha = 0$, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_{\text{м}} = \frac{Nm_{\text{м}}}{V}.$$

(3)

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}}\right) \rho_{\text{м}}.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}} = \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right) \rho_{\text{м}}.$$

(4)

Приравняв правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right) \rho_{\text{м}},$$

откуда

$$\alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1}.$$

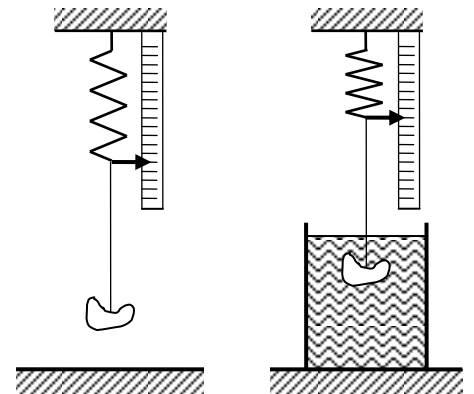
$$\text{Числовой ответ: } \alpha = \frac{\frac{10,000}{10,000 - 9,040} \cdot \frac{1000}{8960} - 1}{\frac{119}{64} - 1} \approx 0,189.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1} \approx 18,9\%$$

Вариант 2.7

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса $P_1 = 10,000$ Н, а в воде (см. рис.) $P_2 = 9,055$ Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_m = 8960$ кг/м³, плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³, молярная масса меди $M_m = 64$ г/моль, молярная масса олова $M_{ол} = 119$ г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{\text{Архимеда}} = mg - \rho_v gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_v g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_v \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}.$$

(1)

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_m m_m + N_{ол} m_{ол}}{V}$$

где m_m , $m_{ол}$ – массы атомов меди и олова, а N_m , $N_{ол}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{ол} = \alpha N$, $N_m = (1 - \alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1 - \alpha)N m_m + \alpha N m_{ол}}{V}.$$

(2)

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при $\alpha = 0$, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_m = \frac{N m_m}{V}.$$

(3)

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}} \right) \rho_{\text{м}}.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}} = \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} \right) \rho_{\text{м}}. \quad (4)$$

Приравняв правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} \right) \rho_{\text{м}},$$

откуда

$$\alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1}.$$

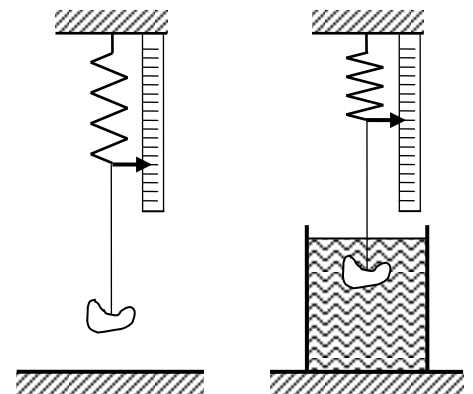
$$\text{Числовой ответ: } \alpha = \frac{\frac{10,000}{10,000 - 9,055} \cdot \frac{1000}{8960} - 1}{\frac{119}{64} - 1} \approx 0,211.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1} \approx 21,1\%$$

Вариант 2.8

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса $P_1 = 10,000$ Н, а в воде (см. рис.) $P_2 = 9,070$ Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_{\text{м}} = 8960$ кг/м³, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³, молярная масса меди $M_{\text{м}} = 64$ г/моль, молярная масса олова $M_{\text{ол}} = 119$ г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{\text{Архимеда}} = mg - \rho_{\text{в}} gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_{\text{в}} g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}.$$

(1)

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_{\text{м}} m_{\text{м}} + N_{\text{ол}} m_{\text{ол}}}{V}$$

где $m_{\text{м}}$, $m_{\text{ол}}$ – массы атомов меди и олова, а $N_{\text{м}}$, $N_{\text{ол}}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{\text{ол}} = \alpha N$, $N_{\text{м}} = (1 - \alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1 - \alpha)Nm_{\text{м}} + \alpha Nm_{\text{ол}}}{V}.$$

(2)

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при $\alpha = 0$, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_{\text{м}} = \frac{Nm_{\text{м}}}{V}.$$

(3)

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}} \right) \rho_{\text{м}}.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}} = \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} \right) \rho_{\text{м}}.$$

(4)

Приравнивая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} \right) \rho_{\text{м}},$$

откуда

$$\alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_M} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_M} - 1}.$$

$$\text{Числовой ответ: } \alpha = \frac{\frac{10,000}{10,000 - 9,070} \cdot \frac{1000}{8960} - 1}{\frac{119}{64} - 1} \approx 0,233.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_M} - 1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_M} - 1} \approx 23,3\%$$

Задание 3

Вариант 3.1

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 65 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 12 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 145 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 15 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O, A, B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна $145 - 65 = 80$ (градусов). Обозначим угол SAO через α , угол SBO через β , угол AOB через γ . Тогда, полагая $SO=1$, отсюда вычисляем $OA = \operatorname{ctg} \alpha$, $OB = \operatorname{ctg} \beta$, $AB = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta - 2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos \gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\triangle AOB} = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника AOB через OC, получаем $OC = \frac{2S_{\triangle AOB}}{AB}$, откуда $\operatorname{tg} \angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения $\alpha=12$, $\beta=15$ (градусов), получаем: $\operatorname{tg} \angle SCO = 0.316574$.
Ответ: 0.32.

Вариант 3.2

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 62 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 20 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 132 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 15 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O, A, B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна $132 - 62 = 70$ (градусов). Обозначим угол SAO через α , угол SBO через β , угол AOB через γ . Тогда, полагая $SO=1$, отсюда вычисляем

$OA = ctg\alpha, OB = ctg\beta, AB = \sqrt{ctg^2\alpha + ctg^2\beta - 2 \cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot \cos\gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\triangle AOB} = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника АОВ через ОС, получаем $OC = \frac{2S_{\triangle AOB}}{AB}$, откуда $tg \angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения $\alpha=20, \beta=15$ (градусов), получаем: $tg \angle SCO = 0.3947$.
 Ответ: 0.39.

Вариант 3.3

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 60 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 12 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 160 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 18 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки О,А,В на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла АОВ равна $160-60 = 100$ (градусов). Обозначим угол SAO через α , угол SBO через β , угол AOB через γ . Тогда, полагая $SO=1$, отсюда вычисляем $OA = ctg\alpha, OB = ctg\beta, AB = \sqrt{ctg^2\alpha + ctg^2\beta - 2 \cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot \cos\gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\triangle AOB} = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника АОВ через ОС, получаем $OC = \frac{2S_{\triangle AOB}}{AB}$, откуда $tg \angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения $\alpha=12, \beta=18$ (градусов), получаем: $tg \angle SCO = 0.4245$.
 Ответ: 0.42.

Вариант 3.4

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 30 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 10 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 100 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 14 градусов к поверхности Земли. Чему равен

тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O, A, B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна $100-30 = 70$ (градусов). Обозначим угол SAO через α , угол SBO через β , угол AOB через γ . Тогда, полагая $SO=1$, отсюда вычисляем $OA = \operatorname{ctg} \alpha$, $OB = \operatorname{ctg} \beta$, $AB = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta - 2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos \gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\triangle AOB} = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника AOB через OC, получаем $OC = \frac{2S_{\triangle AOB}}{AB}$, откуда $\operatorname{tg} \angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения $\alpha=10$, $\beta=14$ (градусов), получаем: $\operatorname{tg} \angle SCO = 0.2675$.
 Ответ: 0.27.

Вариант 3.5

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 25 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 18 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 135 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 15 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O, A, B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна $100-30 = 70$ (градусов). Обозначим угол SAO через α , угол SBO через β , угол AOB через γ . Тогда, полагая $SO=1$, отсюда вычисляем $OA = \operatorname{ctg} \alpha$, $OB = \operatorname{ctg} \beta$, $AB = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta - 2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos \gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\triangle AOB} = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника AOB через OC, получаем $OC = \frac{2S_{\triangle AOB}}{AB}$, откуда $\operatorname{tg} \angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения $\alpha=18$, $\beta=15$ (градусов), получаем: $\operatorname{tg} \angle SCO = 0.51799$.
 Ответ: 0.52.

Вариант 3.6

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 35 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 10 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 110 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 12 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O, A, B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна $110 - 35 = 75$ (градусов). Обозначим угол SAO через α , угол SBO через β , угол AOB через γ . Тогда, полагая $SO=1$, отсюда вычисляем $OA = \operatorname{ctg} \alpha$, $OB = \operatorname{ctg} \beta$, $AB = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta - 2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos \gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\triangle AOB} = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника AOB через OC, получаем $OC = \frac{2S_{\triangle AOB}}{AB}$, откуда $\operatorname{tg} \angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения $\alpha=10$, $\beta=12$ (градусов), получаем: $\operatorname{tg} \angle SCO = 0.24689$.
 Ответ: 0.25.

Вариант 3.7

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 75 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 12 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 140 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 16 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O, A, B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна $140 - 75 = 65$ (градусов). Обозначим угол SAO через α , угол SBO через β , угол AOB через γ . Тогда, полагая $SO=1$, отсюда вычисляем $OA = \operatorname{ctg} \alpha$, $OB = \operatorname{ctg} \beta$, $AB = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta - 2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos \gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\triangle AOB} = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника АОВ через ОС, получаем $OC = \frac{2S_{\triangle AOB}}{AB}$, откуда $tg \angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения $\alpha=12$, $\beta=16$ (градусов), получаем: $tg \angle SCO = 0.30395$.
 Ответ: 0.30.

Вариант 3.8

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 72 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 10 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 140 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 14 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки О,А,В на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла АОВ равна $140-72 = 68$ (градусов). Обозначим угол SAO через α , угол SBO через β , угол AOB через γ . Тогда, полагая $SO=1$, отсюда вычисляем $OA = ctg \alpha$, $OB = ctg \beta$, $AB = \sqrt{ctg^2 \alpha + ctg^2 \beta - 2 \cdot ctg \alpha \cdot ctg \beta \cdot \cos \gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\triangle AOB} = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника АОВ через ОС, получаем $OC = \frac{2S_{\triangle AOB}}{AB}$, откуда $tg \angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения $\alpha=10$, $\beta=14$ (градусов), получаем: $tg \angle SCO = 0.26488$.
 Ответ: 0.26.

Задание 4

Вариант 4.1

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой $m = 10$ г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной $l = 1,02$ м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарiku маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен $T = 2,01$ с. Найти величину напряженности электрического поля E . Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_L$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$ находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения

равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально.

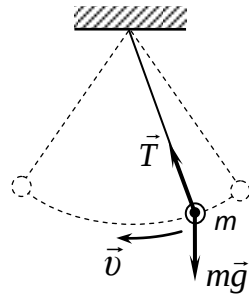


Рис. 1

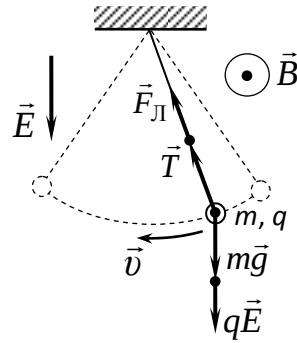


Рис. 2

Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_L$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx \frac{0,01}{10^{-8}} \left(\frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 1,02}{2,01^2} - 9,8 \right) \approx 157 \text{ кВ/м}$ (167 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx 157 \text{ кВ/м}$

Вариант 4.2

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой $m = 10$ г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной $l = 1,04$ м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарику маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен $T = 2,04$ с. Найти величину напряженности электрического поля E . Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_L$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$ находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком

меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

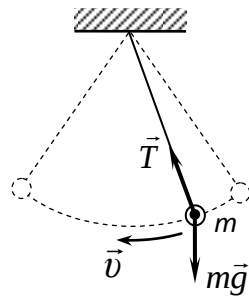


Рис. 1

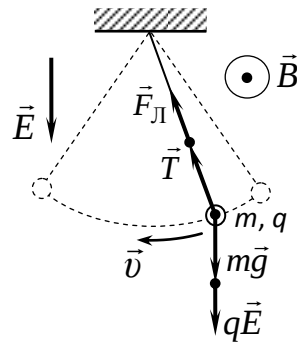


Рис. 2

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_L$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx \frac{0,01}{10^{-8}} \left(\frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 1,04}{2,04^2} - 9,8 \right) \approx 56 \text{ кВ/м}$ (66 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx 56 \text{ кВ/м}$

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой $m = 10$ г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной $l = 1,05$ м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарiku маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен $T = 2,03$ с. Найти величину напряженности электрического поля E . Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_L$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$

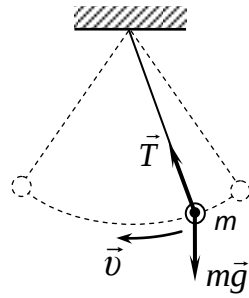


Рис. 1

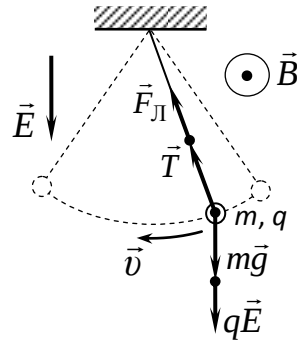


Рис. 2

скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$ находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_L$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx \frac{0,01}{10^{-8}} \left(\frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 1,05}{2,03^2} - 9,8 \right) \approx 249 \text{ кВ/м}$ (259 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx 249 \text{ кВ/м}$

Вариант 4.4

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой $m = 10 \text{ г}$, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной $l = 1,08 \text{ м}$, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарiku маятника сообщили заряд $q = 10^{-8} \text{ Кл}$, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение ипустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен $T = 2,07 \text{ с}$. Найти величину напряженности электрического поля E . Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_L$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила

$q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а

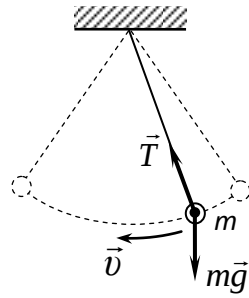


Рис. 1

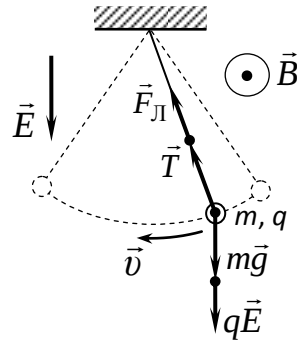


Рис. 2

сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$ находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_L$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx \frac{0,01}{10^{-8}} \left(\frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 1,08}{2,07^2} - 9,8 \right) \approx 140 \text{ кВ/м}$ (150 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx 140 \text{ кВ/м}$

Вариант 4.5

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой $m = 10 \text{ г}$, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной $l = 2,08 \text{ м}$, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарiku маятника сообщили заряд $q = 10^{-8} \text{ Кл}$, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение ипустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен $T = 2,86 \text{ с}$. Найти величину напряженности электрического поля E . Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_L$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний

незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$

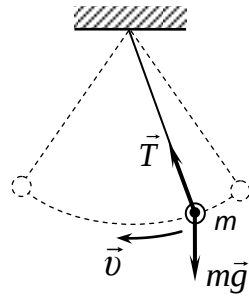


Рис. 1

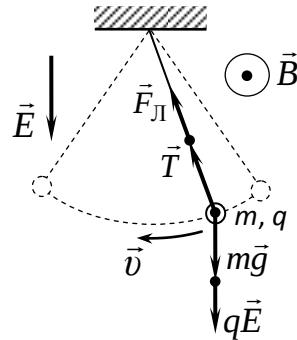


Рис. 2

находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_L$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx \frac{0,01}{10^{-8}} \left(\frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 2,08}{2,86^2} - 9,8 \right) \approx 229 \text{ кВ/м}$ (239 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx 229 \text{ кВ/м}$

Вариант 4.6

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой $m = 10 \text{ г}$, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной $l = 2,07 \text{ м}$, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарiku маятника сообщили заряд $q = 10^{-8} \text{ Кл}$, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен $T = 2,88 \text{ с}$. Найти величину напряженности электрического поля E . Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_L$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$

находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения

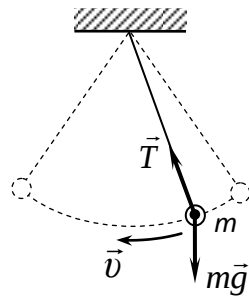


Рис. 1

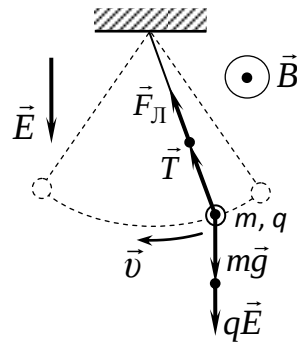


Рис. 2

равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_L$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx \frac{0,01}{10^{-8}} \left(\frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 2,07}{2,88^2} - 9,8 \right) \approx 42 \text{ кВ/м}$ (52 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx 42 \text{ кВ/м}$

Вариант 4.7

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой $m = 10$ г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной $l = 2,09$ м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарiku маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен $T = 2,89$ с. Найти величину напряженности электрического поля E . Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_L$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$ находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком

меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

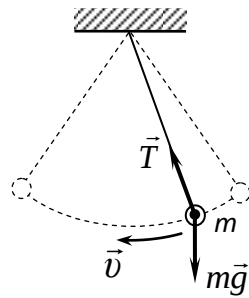


Рис. 1

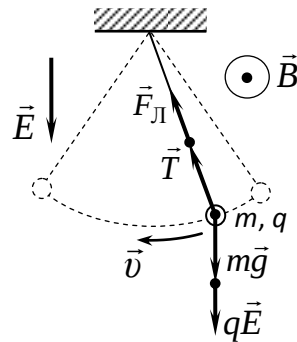


Рис. 2

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_L$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx \frac{0,01}{10^{-8}} \left(\frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 2,09}{2,89^2} - 9,8 \right) \approx 69 \text{ кВ/м}$ (79 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g \right) \approx 69 \text{ кВ/м}$

Вариант 4.8

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой $m = 10$ г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной $l = 2,13$ м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарику маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен $T = 2,91$ с. Найти величину напряженности электрического поля E . Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила,

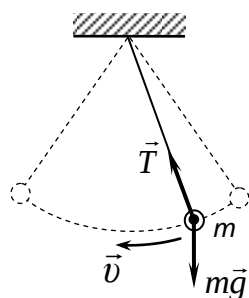


Рис. 1

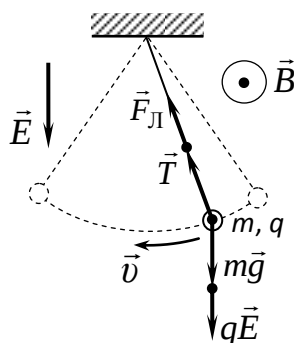


Рис. 2

действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_L$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю. Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$ находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_L$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx \frac{0,01}{10^{-8}}\left(\frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 2,13}{2,91^2} - 9,8\right) \approx 120 \text{ кВ/м}$ (130 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx 120 \text{ кВ/м}$

Тестовые задания для разминки 1-го тура (10-11 классы):

Угол между географическим меридианом и любым направлением, отсчитанный по часовой стрелке называется:

Широта

Азимут

Вектор

Прозрачная разновидность берилла голубовато-зеленого цвета называется:

Аквамарин

Изумруд

Топаз

Крупная глыба льда, отколовшаяся от берега Арктики или Антарктики и находящаяся в океане:

Ледник

Морена

Айсберг

Полосчатый халцедон называется:

Морион

Агат

Малахит

Разрушение морских берегов прибоем называется

Карстование

Коррозия

Абразия

Осадочный материал, накапливающийся в долинах рек, называется

Аллювий

Морена

Терраса

След упавшего на землю метеорита называется:

Атолл

Астеносфера

Астрооблема

Коралловая постройка округлой формы с мелкой лагуной посередине называется:

Бархан

Атолл

Балка

Серповидный песчаный холм с пологим наветренным и крутым подветренным склоном называется:

Риф

Бархан

Атолл

Основными рудами алюминиевой промышленности являются:

Бурые железняки

Каменные угли

Бокситы

Раздробленная на остроугольные обломки и сцементированная горная порода называется:

Брекчия

Конгломерат

Песчаник

Какого цвета изумруд?

Красного

Синего

Зеленого

Какого цвета сапфир?

Красного

Синего

Зеленого

Какого цвета рубин?

Красного

Синего

Зеленого

Как называется место на поверхности Земли с наибольшей силой землетрясения?

Эпицентр

Горячая точка

Кратер

Как называются небольшие неокатанные обломки горных пород?

Валуны

Мел

Гравий

Как называется полоса берега, сложенная песком и заливаемая морем?

Терраса

Пляж

Лагуна

Что образуется в результате карстовых процессов?

Пещера

Кратер

Пляж

Содержание какого газа самое высокое в атмосфере планеты Земля?

Азота

Водорода

Гелия

Укажите самое распространенное химическое соединение в земной коре.

H₂O

CaO

SiO₂

Какая горная порода имеет магматическое происхождение?

Гранит

Глина

Известняк

Какая порода относится к группе осадочных горных пород?

Гранит

Известняк

Базальт

Как называются расплавленные горные породы, изливающиеся из жерла вулкана?

Магма

Гидротермы

Лава

Как называются расплавленные горные породы, находящиеся в земных недрах?

Магма

Гидротермы

Лава

Что относится к продуктам извержения вулкана?

Пепел

Глина

Мрамор

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
2015-2016 учебный год

*ЗАДАНИЯ 2-го ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ «ГЕОЛОГИЯ»
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ*

Задание 1

Вариант 1.1

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2600 кг/м^3 , нерудного - 2550 кг/м^3 . Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 17 кг/м^3 увеличивает содержание компонента на 1%? Ответ дайте в целых кг/м^3 .

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2 , их плотности - ρ_1 и ρ_2 , а содержание в них полезного компонента (в долях) C_1 и C_2 соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в

ней равно $x = \frac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\frac{V_2}{V_1}$ через t , $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ через k . Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1 + t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - k C_2}{1 - k} + \frac{\rho_2 (C_2 - C_1)}{(1 - k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y , увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx , то отсюда получим уравнение

$$a + \frac{b}{y + \Delta y} = a + \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow \frac{b}{y + \Delta y} = \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow y = \frac{-\Delta x \Delta y + \sqrt{(\Delta x \Delta y)^2 - 4b\Delta x \Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2592 кг/м^3

Вариант 1.2

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2640 кг/м^3 , нерудного - 2585 кг/м^3 . Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 17 кг/м^3 увеличивает содержание компонента на 1%? Ответ дайте в целых кг/м^3 .

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2 , их плотности - ρ_1 и ρ_2 , а содержание в них полезного компонента (в долях) C_1 и C_2

соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x = \frac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\frac{V_2}{V_1}$ через t , $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ через k . Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1 + t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - k C_2}{1 - k} + \frac{\rho_2 (C_2 - C_1)}{(1 - k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y , увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx , то отсюда получим уравнение

$$a + \frac{b}{y + \Delta y} = a + \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow \frac{b}{y + \Delta y} = \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow y = \frac{-\Delta x \Delta y + \sqrt{(\Delta x \Delta y)^2 - 4b\Delta x \Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2507 кг/м³

Вариант 1.3

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2610 кг/м³, нерудного - 2560 кг/м³. Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 17 кг/м³ увеличивает содержание компонента на 1%? Ответ дайте в целых кг/м³.

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2 , их плотности - ρ_1 и ρ_2 , а содержание в них полезного компонента (в долях) C_1 и C_2 соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x = \frac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\frac{V_2}{V_1}$ через t , $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ через k . Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1 + t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - k C_2}{1 - k} + \frac{\rho_2 (C_2 - C_1)}{(1 - k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y , увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx , то отсюда получим уравнение

$$a + \frac{b}{y + \Delta y} = a + \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow \frac{b}{y + \Delta y} = \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow y = \frac{-\Delta x \Delta y + \sqrt{(\Delta x \Delta y)^2 - 4b\Delta x \Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2602 кг/м³

Вариант 1.4

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2620 кг/м^3 , нерудного - 2570 кг/м^3 . Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 17 кг/м^3 увеличивает содержание компонента на 1%? Ответ дайте в целых кг/м^3 .

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2 , их плотности - ρ_1 и ρ_2 , а содержание в них полезного компонента (в долях) C_1 и C_2 соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x = \frac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\frac{V_2}{V_1}$ через t , $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ через k . Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1 + t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - k C_2}{1 - k} + \frac{\rho_2 (C_2 - C_1)}{(1 - k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y , увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx , то отсюда получим уравнение

$$a + \frac{b}{y + \Delta y} = a + \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow \frac{b}{y + \Delta y} = \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow y = \frac{-\Delta x \Delta y + \sqrt{(\Delta x \Delta y)^2 - 4b\Delta x \Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2612 кг/м^3

Вариант 1.5

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2600 кг/м^3 , нерудного - 2549 кг/м^3 . Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 16 кг/м^3 увеличивает содержание компонента на 0.94%? Ответ дайте в целых кг/м^3 .

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2 , их плотности - ρ_1 и ρ_2 , а содержание в них полезного компонента (в долях) C_1 и C_2 соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x = \frac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\frac{V_2}{V_1}$ через t , $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ через k . Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1 + t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - k C_2}{1 - k} + \frac{\rho_2 (C_2 - C_1)}{(1 - k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y , увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx , то отсюда получим уравнение

$$a + \frac{b}{y + \Delta y} = a + \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow \frac{b}{y + \Delta y} = \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow y = \frac{-\Delta x \Delta y + \sqrt{(\Delta x \Delta y)^2 - 4b\Delta x \Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2568 кг/м³

Вариант 1.6

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2615 кг/м³, нерудного - 2564 кг/м³. Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 16 кг/м³ увеличивает содержание компонента на 0.94%? Ответ дайте в целых кг/м³.

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2 , их плотности - ρ_1 и ρ_2 , а содержание в них полезного компонента (в долях) C_1 и C_2 соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x = \frac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\frac{V_2}{V_1}$ через t , $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ через k . Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1 + t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - k C_2}{1 - k} + \frac{\rho_2 (C_2 - C_1)}{(1 - k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y , увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx , то отсюда получим уравнение

$$a + \frac{b}{y + \Delta y} = a + \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow \frac{b}{y + \Delta y} = \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow y = \frac{-\Delta x \Delta y + \sqrt{(\Delta x \Delta y)^2 - 4b\Delta x \Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2583 кг/м³

Вариант 1.7

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2620 кг/м³, нерудного - 2569 кг/м³. Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 16 кг/м³ увеличивает содержание компонента на 0.94%? Ответ дайте в целых кг/м³.

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2 , их плотности - ρ_1 и ρ_2 , а содержание в них полезного компонента (в долях) C_1 и C_2

соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x = \frac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\frac{V_2}{V_1}$ через t , $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ через k . Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1 + t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - k C_2}{1 - k} + \frac{\rho_2 (C_2 - C_1)}{(1 - k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y , увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx , то отсюда получим уравнение

$$a + \frac{b}{y + \Delta y} = a + \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow \frac{b}{y + \Delta y} = \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow y = \frac{-\Delta x \Delta y + \sqrt{(\Delta x \Delta y)^2 - 4b\Delta x \Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2588 кг/м³

Вариант 1.8

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2641 кг/м³, нерудного - 2590 кг/м³. Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 16 кг/м³ увеличивает содержание компонента на 0.94%? Ответ дайте в целых кг/м³.

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2 , их плотности - ρ_1 и ρ_2 , а содержание в них полезного компонента (в долях) C_1 и C_2 соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x = \frac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\frac{V_2}{V_1}$ через t , $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ через k . Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1 + t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - k C_2}{1 - k} + \frac{\rho_2 (C_2 - C_1)}{(1 - k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y , увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx , то отсюда получим уравнение

$$a + \frac{b}{y + \Delta y} = a + \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow \frac{b}{y + \Delta y} = \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow y = \frac{-\Delta x \Delta y + \sqrt{(\Delta x \Delta y)^2 - 4b\Delta x \Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2609 кг/м³

Задание 2

Вариант 2.1

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол $\varphi = 30^\circ$. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей

такой орбиты к радиусу планеты $\frac{R}{R_0} = 7$. Планета делает один оборот вокруг своей оси в

гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 10^5$ с. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3 , 7600 кг/м^3 , 12800 кг/м^3).

Гравитационную постоянную принять равной $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Решение.

Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B , лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB , проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB , должна оказаться на его противоположной половине. Для этого

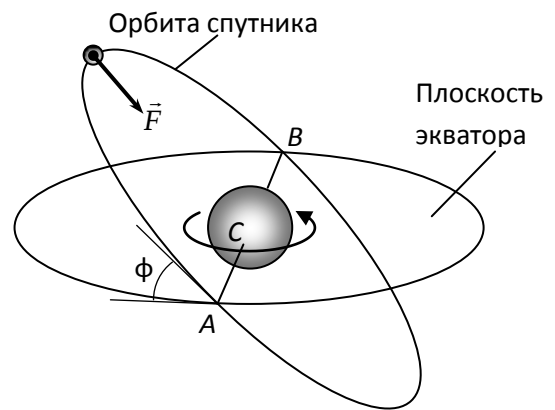
нужно время, равное $\frac{1}{2}T$, $\frac{3}{2}T$, $\frac{5}{2}T$ и т. д., то

есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n + 1)T$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G \frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G \frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите

$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в

уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n + 1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем:



$R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_0^3 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 = \frac{3 \cdot 3,14 \cdot 7^3}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{10}} \approx 4800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 \approx 4800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Вариант 2.2

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол $\phi = 30^\circ$. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей такой орбиты к радиусу планеты $\frac{R}{R_0} = 5,3$. Планета делает один оборот вокруг своей оси

в гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 26$ ч. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3 , 7600 кг/м^3 , 12800 кг/м^3).

Гравитационную постоянную принять равной $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Решение.

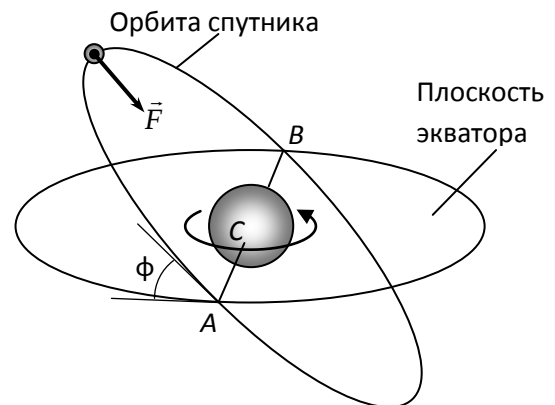
Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B , лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB , проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB , должна оказаться на его противоположной половине. Для этого

нужно время, равное $\frac{1}{2}T$, $\frac{3}{2}T$, $\frac{5}{2}T$ и т. д., то

есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2} \right) T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n+1)T$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G \frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G \frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите

$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в



уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n+1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем:

$R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3,14 \cdot 5,3^3}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot (26 \cdot 3600)^2} \approx 2400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \approx 2400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Вариант 2.3

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол $\phi = 45^\circ$. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей

такой орбиты к радиусу планеты $\frac{R}{R_0} = 6$. Планета делает один оборот вокруг своей оси в

гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 8,9 \cdot 10^4$ с. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен $\text{кг}/\text{м}^3$ (например: $1500 \text{ кг}/\text{м}^3$, $7600 \text{ кг}/\text{м}^3$, $12800 \text{ кг}/\text{м}^3$).

Гравитационную постоянную принять равной $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

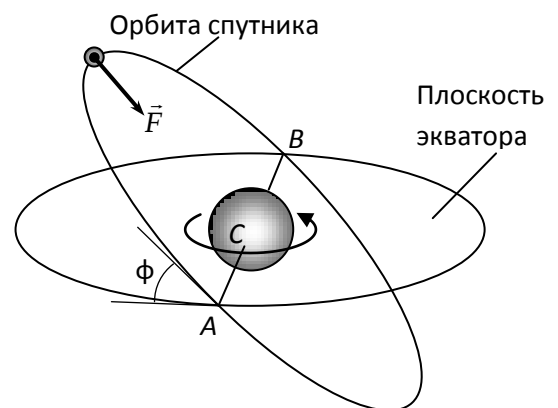
Решение.

Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B , лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB , проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB , должна оказаться на его противоположной половине. Для этого

нужно время, равное $\frac{1}{2}T$, $\frac{3}{2}T$, $\frac{5}{2}T$ и т. д., то

есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n+1)T$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G \frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение



спутника: $G \frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите

$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в

уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n+1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем:

$R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_0^3 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 = \frac{3 \cdot 3,14 \cdot 6^3}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot (8,9 \cdot 10^4)^2} \approx 3800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 \approx 3800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Вариант 2.4

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол $\varphi = 45^\circ$. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей

такой орбиты к радиусу планеты $\frac{R}{R_0} = 6,6$. Планета делает один оборот вокруг своей оси

в гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 8,6 \cdot 10^4$ с. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3 , 7600 кг/м^3 , 12800 кг/м^3).

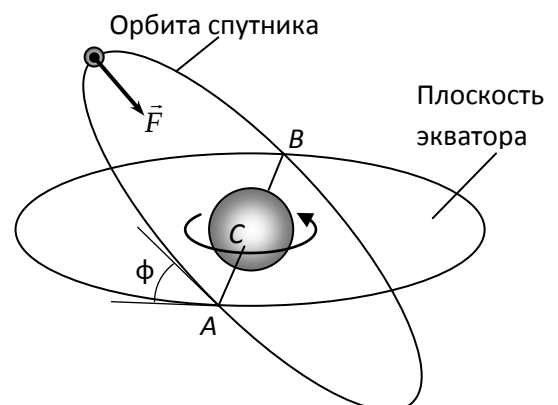
Гравитационную постоянную принять равной $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Решение.

Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B , лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB , проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB , должна оказаться на его противоположной половине. Для этого

нужно время, равное $\frac{1}{2}T$, $\frac{3}{2}T$, $\frac{5}{2}T$ и т. д., то

есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2} \right) T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n+1)T$, где $n = 0, 1, 2, \dots$.



(1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G \frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G \frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите

$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в

уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n+1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем:

$R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 = \frac{3 \cdot 3,14 \cdot 6,6^3}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot (8,6 \cdot 10^4)^2} \approx 5500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 \approx 5500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Вариант 2.5

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

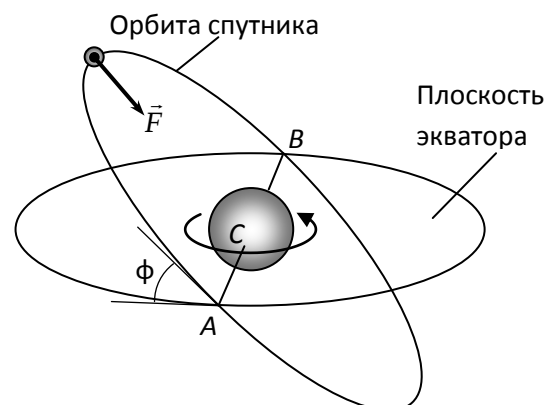
Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол $\varphi = 60^\circ$. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей такой орбиты к радиусу планеты $\frac{R}{R_0} = 2,3$. Планета делает один оборот вокруг своей оси

в гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 3,6 \cdot 10^4$ с. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен $\text{кг}/\text{м}^3$ (например: 1500 $\text{кг}/\text{м}^3$, 7600 $\text{кг}/\text{м}^3$, 12800 $\text{кг}/\text{м}^3$).

Гравитационную постоянную принять равной $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Решение.

Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B , лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB , проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB , должна оказаться на его противоположной половине. Для этого



нужно время, равное $\frac{1}{2}T, \frac{3}{2}T, \frac{5}{2}T$ и т. д., то есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n + 1)T$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G \frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G \frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите

$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в

уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n + 1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем:

$R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3,14 \cdot 2,3^3}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot (3,6 \cdot 10^4)^2} \approx 1300 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

$$\text{Ответ: } \rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \approx 1300 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Вариант 2.6

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

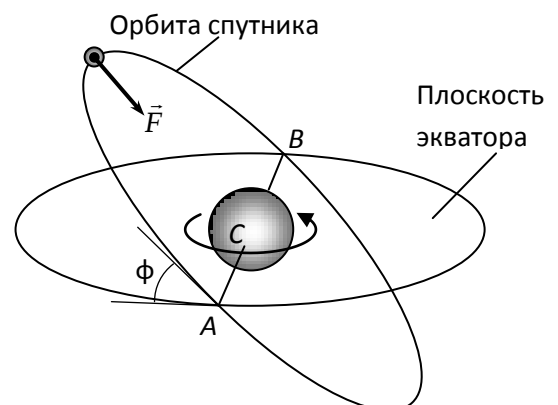
Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол $\varphi = 60^\circ$. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей такой орбиты к радиусу планеты $\frac{R}{R_0} = 2,5$. Планета делает один оборот вокруг своей оси

в гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 9$ ч. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен $\text{кг}/\text{м}^3$ (например: $1500 \text{ кг}/\text{м}^3$, $7600 \text{ кг}/\text{м}^3$, $12800 \text{ кг}/\text{м}^3$).

Гравитационную постоянную принять равной $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Решение.

Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B , лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB , проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB , должна оказаться



на его противоположной половине. Для этого нужно время, равное $\frac{1}{2}T, \frac{3}{2}T, \frac{5}{2}T$ и т. д., то есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n+1)T$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G \frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G \frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите

$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n+1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем:

$R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3,14 \cdot 2,5^3}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot (9 \cdot 3600)^2} \approx 2100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

$$\text{Ответ: } \rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \approx 2100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Вариант 2.7

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол $\varphi = 15^\circ$. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей

такой орбиты к радиусу планеты $\frac{R}{R_0} = 3,4$. Планета делает один оборот вокруг своей оси

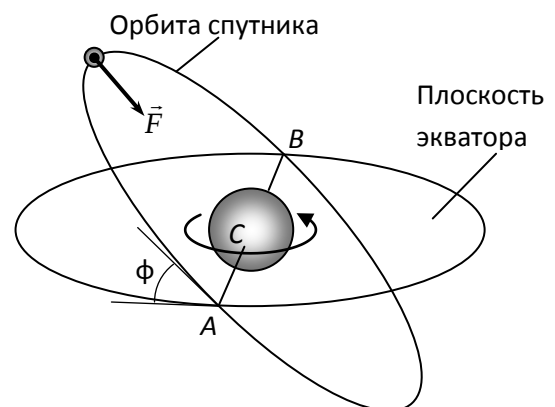
в гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 5,9 \cdot 10^4$ с. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3 , 7600 кг/м^3 , 12800 кг/м^3).

Гравитационную постоянную принять равной

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Решение.

Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B , лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB , проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$



обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB , должна оказаться на его противоположной половине. Для этого нужно время, равное $\frac{1}{2}T, \frac{3}{2}T, \frac{5}{2}T$ и т. д., то есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n + 1)T$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G \frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G \frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите

$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в

уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n + 1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем:

$R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3,14 \cdot 3,4^3}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot (5,9 \cdot 10^4)^2} \approx 1600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

$$\text{Ответ: } \rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \approx 1600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Вариант 2.8

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол $\phi = 15^\circ$. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей такой орбиты к радиусу планеты $\frac{R}{R_0} = 16$. Планета делает один оборот вокруг своей оси

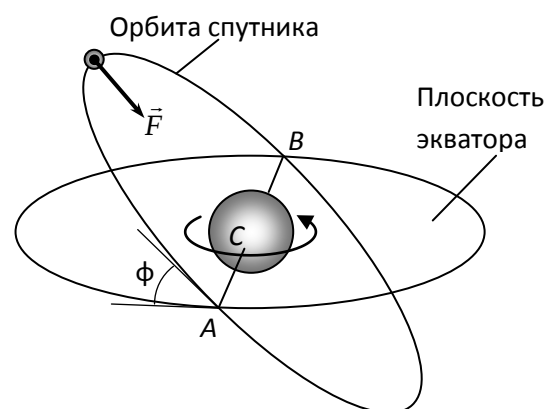
в гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 5,5 \cdot 10^5$ с. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3 , 7600 кг/м^3 , 12800 кг/м^3).

Гравитационную постоянную принять равной

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Решение.

Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B , лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB , проведенного в



плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB , должна оказаться на его противоположной половине. Для этого нужно время, равное $\frac{1}{2}T, \frac{3}{2}T, \frac{5}{2}T$ и т. д., то есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n + 1)T$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G \frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G \frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите

$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в

уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n + 1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем:

$R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3,14 \cdot 16^3}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot (5,5 \cdot 10^5)^2} \approx 1900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

$$\text{Ответ: } \rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \approx 1900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Задание 3

Вариант 3.1

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра $SABC$. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину A основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях SAB и SAC составляют соответственно углы 43° и 52° с боковым ребром SA . Чему равен угол с вершиной A между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной A , плоскость проходит через вершину A и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые b, d параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки M, N лежат на прямых b, d и прямые AM и AN составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем $\beta < \gamma$. Пусть x – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin \beta}, AN = \frac{1}{\sin \gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

Пусть далее точка K лежит на прямой d , точка O лежит на при этом плоскость $МОК$ перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2 \cos \alpha = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, KN = \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow MN^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta - \gamma) - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \beta \sin \gamma.$$

Подставляя $\beta=43^\circ$, $\gamma=52^\circ$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos \frac{1}{3}$, получаем $\cos x = 0.629$.

Ответ: 51°

Вариант 3.2

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра $SABC$. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину A основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных

боковых гранях SAB и SAC составляют соответственно углы 41° и 42° с боковым ребром SA . Чему равен угол с вершиной A между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной A , плоскость проходит через вершину A и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые b, d параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки M, N лежат на прямых b, d и прямые AM и AN составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем $\beta < \gamma$. Пусть x – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin \beta}, AN = \frac{1}{\sin \gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

Пусть далее точка K лежит на прямой d , точка O лежит на при этом плоскость $МОК$ перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2 \cos \alpha = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, KN = \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow MN^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta - \gamma) - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \beta \sin \gamma.$$

Подставляя $\beta=41^\circ$, $\gamma=42^\circ$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos \frac{1}{3}$, получаем $\cos x = 0.707$.

Ответ: 45°

Вариант 3.3

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра $SABC$. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину A основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях SAB и SAC составляют соответственно углы 39° и 52° с боковым ребром SA . Чему равен угол с вершиной A между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной A , плоскость проходит через вершину A и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые b, d параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки M, N лежат на прямых b, d и прямые AM и AN составляют углы β и γ с ребром

двугранного угла, без ограничения общности считаем $\beta < \gamma$. Пусть x – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin \beta}, AN = \frac{1}{\sin \gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

Пусть далее точка K лежит на прямой d , точка O лежит на при этом плоскость $МОК$ перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2 \cos \alpha = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, KN = \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow MN^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta - \gamma) - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \beta \sin \gamma.$$

Подставляя $\beta=39^\circ$, $\gamma=52^\circ$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos \frac{1}{3}$, получаем $\cos x = 0.644$.

Ответ: 50°

Вариант 3.4

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра $SABC$. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину A основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях SAB и SAC составляют соответственно углы 46 и 56 градусов с боковым ребром SA . Чему равен угол с вершиной A между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной A , плоскость проходит через вершину A и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые b , d параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки M, N лежат на прямых b , d и прямые AM и AN составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем $\beta < \gamma$. Пусть x – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin \beta}, AN = \frac{1}{\sin \gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

Пусть далее точка K лежит на прямой d , точка O лежит на при этом плоскость $МОК$ перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2 \cos \alpha = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, KN = \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow MN^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4\sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta - \gamma) - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \beta \sin \gamma.$$

Подставляя $\beta=46^\circ$, $\gamma=56^\circ$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos \frac{1}{3}$, получаем $\cos x=0.587$.

Ответ: 54°

Вариант 3.5

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра $SABC$. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину A основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях SAB и SAC составляют соответственно углы 35° и 52° с боковым ребром SA . Чему равен угол с вершиной A между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной A , плоскость проходит через вершину A и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые b , d параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки M, N лежат на прямых b , d и прямые AM и AN составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем $\beta < \gamma$. Пусть x – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin \beta}, AN = \frac{1}{\sin \gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

Пусть далее точка K лежит на прямой d , точка O лежит на при этом плоскость $МОК$ перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2\cos \alpha = 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}, KN = \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow MN^2 = 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4\sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta - \gamma) - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \beta \sin \gamma.$$

Подставляя $\beta=35^\circ$, $\gamma=52^\circ$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos \frac{1}{3}$, получаем $\cos x=0.655$.

Ответ: 49°

Вариант 3.6

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра $SABC$. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину A основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях SAB и SAC составляют соответственно углы 31° и 46° с боковым ребром SA . Чему равен угол с вершиной A между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной A , плоскость проходит через вершину A и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые b , d параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки M, N лежат на прямых b , d и прямые AM и AN составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем $\beta < \gamma$. Пусть x – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin \beta}, AN = \frac{1}{\sin \gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

Пусть далее точка K лежит на прямой d , точка O лежит на при этом плоскость $МОК$ перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2 \cos \alpha = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, KN = \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow MN^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta - \gamma) - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \beta \sin \gamma.$$

Подставляя $\beta=31^\circ$, $\gamma=46^\circ$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos \frac{1}{3}$, получаем $\cos x = 0.719$.

Ответ: 44°

Вариант 3.7

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра $SABC$. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину A основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях SAB и SAC составляют соответственно углы 36° и 50° с боковым ребром SA . Чему равен угол с вершиной A между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной A , плоскость проходит через вершину A и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые b, d параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки M, N лежат на прямых b, d и прямые AM и AN составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем $\beta < \gamma$. Пусть x – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin \beta}, AN = \frac{1}{\sin \gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

Пусть далее точка K лежит на прямой d , точка O лежит на при этом плоскость $МОК$ перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2 \cos \alpha = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, KN = \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow MN^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta - \gamma) - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \beta \sin \gamma.$$

Подставляя $\beta=36^\circ$, $\gamma=52^\circ$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos \frac{1}{3}$, получаем $\cos x = 0.67$.

Ответ: 48°

Вариант 3.8

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра $SABC$. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину A основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях SAB и SAC составляют соответственно углы 29 и 41 градус с боковым ребром SA . Чему равен угол с вершиной A между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной A , плоскость проходит через вершину A и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые b, d параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки M, N лежат на прямых b, d и прямые AM и AN составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем $\beta < \gamma$. Пусть x – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin \beta}, AN = \frac{1}{\sin \gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos x}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

Пусть далее точка К лежит на прямой d , точка O лежит на при этом плоскость МОК перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, KN = \operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta \Rightarrow MN^2 = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta)^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta \cdot \sin\gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta - \gamma) - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\gamma.$$

Подставляя $\beta=29^\circ$, $\gamma=41^\circ$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos\frac{1}{3}$, получаем $\cos x=0.766$.

Ответ: 40°

Задание 4

Вариант 4.1

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 10^5 \text{ м}^3$ (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ и температуре $t = 0^\circ\text{C}$) и из него выделяется объем $V_0 = 50 \text{ м}^3$ жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 534 \text{ кг/м}^3$. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух отдельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_{\text{п}} = 44 \text{ г/моль}$, плотность жидкого пропана $\rho_{\text{п}} = 510 \text{ кг/м}^3$, плотность жидкого бутана $\rho_{\text{б}} = 580 \text{ кг/м}^3$, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$.

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_{\text{п}}$, а объем бутана в этой смеси равен $V_{\text{б}}$. Тогда масса этой смеси

$$m = \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \text{ а ее объем } V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \\ V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}} \end{cases}$$

относительно $V_{\text{п}}$ и $V_{\text{б}}$, получим, в частности,

$$V_{\text{п}} = \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_0 \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}},$$

а его количество молей

$$\nu_{\text{п}} = \frac{m_{\text{п}}}{M_{\text{п}}} = \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_{\text{п}}}{\nu},$$

где $\nu = \frac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

$$\text{Тогда } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} = \frac{8,31 \cdot 273}{10^5 \cdot 10^5} \cdot \frac{510 \cdot 50}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{580 - 534}{580 - 510} \approx 8,6 \, \%.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} \approx 8,6 \, \%$$

Вариант 4.2

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 10^5 \text{ м}^3$ (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ и температуре $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$) и из него выделяется объем $V_0 = 40 \text{ м}^3$ жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 530 \text{ кг/м}^3$. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух отдельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_{\text{п}} = 44 \text{ г/моль}$, плотность жидкого пропана $\rho_{\text{п}} = 510 \text{ кг/м}^3$, плотность жидкого бутана $\rho_{\text{б}} = 580 \text{ кг/м}^3$, универсальная газовая постоянная

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}.$$

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_{\text{п}}$, а объем бутана в этой смеси равен $V_{\text{б}}$. Тогда масса этой смеси

$$m = \rho V_0 = \rho_{\pi} V_{\pi} + \rho_{\delta} V_{\delta}, \text{ а ее объем } V_0 = V_{\pi} + V_{\delta}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_{\pi} V_{\pi} + \rho_{\delta} V_{\delta}, \\ V_0 = V_{\pi} + V_{\delta} \end{cases}$$

относительно V_{π} и V_{δ} , получим, в частности,

$$V_{\pi} = \frac{\rho_{\delta} - \rho}{\rho_{\delta} - \rho_{\pi}} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_{\pi} = \rho_{\pi} V_{\pi} = \rho_{\pi} V_0 \cdot \frac{\rho_{\delta} - \rho}{\rho_{\delta} - \rho_{\pi}},$$

а его количество молей

$$\nu_{\pi} = \frac{m_{\pi}}{M_{\pi}} = \frac{\rho_{\pi} V_0}{M_{\pi}} \cdot \frac{\rho_{\delta} - \rho}{\rho_{\delta} - \rho_{\pi}}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_{\pi}}{\nu},$$

где $\nu = \frac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

$$\text{Тогда } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\pi} V_0}{M_{\pi}} \cdot \frac{\rho_{\delta} - \rho}{\rho_{\delta} - \rho_{\pi}} = \frac{8,31 \cdot 273}{10^5 \cdot 10^5} \cdot \frac{510 \cdot 40}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{580 - 530}{580 - 510} \approx 7,5 \, \%.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\pi} V_0}{M_{\pi}} \cdot \frac{\rho_{\delta} - \rho}{\rho_{\delta} - \rho_{\pi}} \approx 7,5 \, \%$$

Вариант 4.3

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 10^5 \text{ м}^3$ (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ и температуре $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$) и из него выделяется объем $V_0 = 40 \text{ м}^3$ жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 540 \text{ кг/м}^3$. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух отдельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_{\pi} = 44 \text{ г/моль}$, плотность жидкого пропана $\rho_{\pi} = 510 \text{ кг/м}^3$, плотность жидкого бутана $\rho_{\delta} = 580 \text{ кг/м}^3$, универсальная газовая постоянная

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}.$$

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_{\text{п}}$, а объем бутана в этой смеси равен $V_{\text{б}}$. Тогда масса этой смеси

$$m = \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \text{ а ее объем } V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \\ V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}} \end{cases}$$

относительно $V_{\text{п}}$ и $V_{\text{б}}$, получим, в частности,

$$V_{\text{п}} = \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_0 \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}},$$

а его количество молей

$$\nu_{\text{п}} = \frac{m_{\text{п}}}{M_{\text{п}}} = \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_{\text{п}}}{\nu},$$

где $\nu = \frac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

$$\text{Тогда } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} = \frac{8,31 \cdot 273}{10^5 \cdot 10^5} \cdot \frac{510 \cdot 40}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{580 - 540}{580 - 510} \approx 6,0 \, \%.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} \approx 6,0 \, \%$$

Вариант 4.4

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 10^5 \text{ м}^3$ (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ и температуре $t = 0^\circ \text{C}$) и из него выделяется объем $V_0 = 40 \text{ м}^3$ жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 535 \text{ кг/м}^3$. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух отдельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_{\text{п}} = 44 \text{ г/моль}$, плотность жидкого пропана $\rho_{\text{п}} = 510 \text{ кг/м}^3$, плотность жидкого бутана $\rho_{\text{б}} = 580 \text{ кг/м}^3$, универсальная газовая постоянная

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}.$$

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_{\text{п}}$, а объем бутана в этой смеси равен $V_{\text{б}}$. Тогда масса этой смеси

$$m = \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \text{ а ее объем } V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \\ V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}} \end{cases}$$

относительно $V_{\text{п}}$ и $V_{\text{б}}$, получим, в частности,

$$V_{\text{п}} = \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_0 \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}},$$

а его количество молей

$$\nu_{\text{п}} = \frac{m_{\text{п}}}{M_{\text{п}}} = \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_{\text{п}}}{\nu},$$

где $\nu = \frac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

$$\text{Тогда } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} = \frac{8,31 \cdot 273}{10^5 \cdot 10^5} \cdot \frac{510 \cdot 40}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{580 - 535}{580 - 510} \approx 6,8 \, \%.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} \approx 6,8 \, \%$$

Вариант 4.5

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 2 \cdot 10^5 \text{ м}^3$ (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ и температуре $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$) и из него выделяется объем $V_0 = 60 \text{ м}^3$ жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 535 \text{ кг/м}^3$. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух отдельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_{\text{п}} = 44 \text{ г/моль}$, плотность жидкого пропана

$\rho_{\text{п}} = 510 \text{ кг/м}^3$, плотность жидкого бутана $\rho_{\text{б}} = 580 \text{ кг/м}^3$, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$.

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_{\text{п}}$, а объем бутана в этой смеси равен $V_{\text{б}}$. Тогда масса этой смеси

$$m = \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \text{ а ее объем } V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \\ V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}} \end{cases}$$

относительно $V_{\text{п}}$ и $V_{\text{б}}$, получим, в частности,

$$V_{\text{п}} = \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_0 \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}},$$

а его количество молей

$$\nu_{\text{п}} = \frac{m_{\text{п}}}{M_{\text{п}}} = \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_{\text{п}}}{\nu},$$

где $\nu = \frac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

$$\text{Тогда } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} = \frac{8,31 \cdot 273}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^5} \cdot \frac{510 \cdot 60}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{580 - 535}{580 - 510} \approx 5,1 \, \%.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} \approx 5,1 \, \%$$

Вариант 4.6

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 2 \cdot 10^5 \text{ м}^3$ (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ и температуре $t = 0^\circ \text{C}$) и из него выделяется объем $V_0 = 60 \text{ м}^3$ жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 530 \text{ кг/м}^3$. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух отдельных жидкостей – жидкого

пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_{\text{п}} = 44$ г/моль, плотность жидкого пропана $\rho_{\text{п}} = 510$ кг/м³, плотность жидкого бутана $\rho_{\text{б}} = 580$ кг/м³, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$.

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_{\text{п}}$, а объем бутана в этой смеси равен $V_{\text{б}}$. Тогда масса этой смеси

$$m = \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \text{ а ее объем } V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \\ V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}} \end{cases}$$

относительно $V_{\text{п}}$ и $V_{\text{б}}$, получим, в частности,

$$V_{\text{п}} = \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_0 \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}},$$

а его количество молей

$$\nu_{\text{п}} = \frac{m_{\text{п}}}{M_{\text{п}}} = \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_{\text{п}}}{\nu},$$

где $\nu = \frac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

$$\text{Тогда } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} = \frac{8,31 \cdot 273}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^5} \cdot \frac{510 \cdot 60}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{580 - 530}{580 - 510} \approx 5,6 \, \%.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} \approx 5,6 \, \%$$

Вариант 4.7

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 2 \cdot 10^5$ м³ (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ °С) и из него выделяется объем $V_0 = 60$ м³ жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 540$ кг/м³. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан

извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух отдельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_{\text{п}} = 44$ г/моль, плотность жидкого пропана $\rho_{\text{п}} = 510$ кг/м³, плотность жидкого бутана $\rho_{\text{б}} = 580$ кг/м³, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$.

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_{\text{п}}$, а объем бутана в этой смеси равен $V_{\text{б}}$. Тогда масса этой смеси

$$m = \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \text{ а ее объем } V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \\ V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}} \end{cases}$$

относительно $V_{\text{п}}$ и $V_{\text{б}}$, получим, в частности,

$$V_{\text{п}} = \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_0 \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}},$$

а его количество молей

$$\nu_{\text{п}} = \frac{m_{\text{п}}}{M_{\text{п}}} = \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_{\text{п}}}{\nu},$$

где $\nu = \frac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

$$\text{Тогда } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} = \frac{8,31 \cdot 273}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^5} \cdot \frac{510 \cdot 60}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{580 - 540}{580 - 510} \approx 4,5 \, \%.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} \approx 4,5 \, \%$$

Вариант 4.8

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 2 \cdot 10^5$ м³ (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ °С) и из него выделяется объем $V_0 = 85$ м³ жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 540$ кг/м³. Численный ответ запишите с точностью до

десятих долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух отдельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_{\text{п}} = 44$ г/моль, плотность жидкого пропана $\rho_{\text{п}} = 510$ кг/м³, плотность жидкого бутана $\rho_{\text{б}} = 580$ кг/м³, универсальная газовая постоянная

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}.$$

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_{\text{п}}$, а объем бутана в этой смеси равен $V_{\text{б}}$. Тогда масса этой смеси

$$m = \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \text{ а ее объем } V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} + \rho_{\text{б}} V_{\text{б}}, \\ V_0 = V_{\text{п}} + V_{\text{б}} \end{cases}$$

относительно $V_{\text{п}}$ и $V_{\text{б}}$, получим, в частности,

$$V_{\text{п}} = \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V_0 \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}},$$

а его количество молей

$$v_{\text{п}} = \frac{m_{\text{п}}}{M_{\text{п}}} = \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{v_{\text{п}}}{v},$$

где $v = \frac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

$$\text{Тогда } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} = \frac{8,31 \cdot 273}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^5} \cdot \frac{510 \cdot 85}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{580 - 540}{580 - 510} \approx 6,4 \, \%.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_{\text{п}} V_0}{M_{\text{п}}} \cdot \frac{\rho_{\text{б}} - \rho}{\rho_{\text{б}} - \rho_{\text{п}}} \approx 6,4 \, \%$$

Тестовые задания для разминки 2-го тура (10-11 классы):

Возраст Земли оценивается в:

46 млрд.лет

4,6 млрд.лет

4,6 млн.лет

Мельчайшие обломки минералов и горных пород, вылетающие в атмосферу при вулканических извержениях называются:

Пепел

Планктон

Аллювий

Процесс разрушения горных пород на поверхности Земли под воздействием физических, химических и биологических факторов получил название:

Абразия

Вымораживание

Выветривание

Источник горячей (80-100°C) воды в областях вулканической деятельности называют:

Ключ

Гейзер

Сель

Как называются невысокие серповидные в плане песчаные холмы по берегам морей, рек:

Останцы

Террасы

Дюны

Скопления полезного ископаемого различной формы:

Морена

Залежь

Карст

Округлая впадина на месте вулканического конуса называется

Кальдера

Атолл

Скважина

Речная долина с крутыми почти отвесными бортами получила название

Терраса

Бархан

Каньон

Мера массы драгоценных камней

Карат

Унция

Баррель

Растворение горных пород поверхностными или подземными водами с образованием сообщающихся пустот различного размера

Выветривание

Карст

Абразия

Открытая горная выработка значительных размеров, служащая главным образом для добычи полезных ископаемых

Карьер

Жила

Воронка

Твердое тело из закономерно расположенных атомов и ионов, способное принимать облик многогранника называется

Кристалл

Туф

Валун

Магма, вытекая на поверхность Земли, и потерявшая летучие компоненты получила название

Сель

Карст

Лава

Большие скопления льда в горных или полярных областях, нередко передвигающиеся называют

Ледники

Сталактиты

Конкреции

Как называется наружная твердая оболочка Земли, включающая земную кору и часть верхней мантии

Литосфера

Стратосфера

Геоид

Сложный по составу флюидно-силикатный расплав в недрах Земли называют

Карстом

Мантией

Магмой

**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2015-2016 учебный год**

*ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5-9 КЛАССОВ*

Задание 1.

На летней практике каждый студент первого курса обязан собрать образцы горных пород, число образцов у всех студентов одинаковое. Осенью те же студенты обработали каждый по 17 образцов. Всего осталось 37 образцов, оказавшихся негодными. Какое максимально возможное при данных условиях число образцов собрал каждый из студентов летом?

Решение.

Пусть n – число студентов, k – искомое число образцов для каждого студента. Тогда Всего собрано nk образцов. Тогда из условия следует соотношение $nk - 17n = 37, n, k \in \mathbb{N}$. Последнее соотношение представим как

$$n = \frac{37}{k-17} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k-17 \in \{1, 37\},$$

поскольку 37 – число простое. Отсюда следует

Ответ: 54.

Задание 2.

Длина экватора Земли примерно равна $L = 40000$ км. Ускорение свободного падения (иногда говорят: ускорение силы тяжести) на поверхности Земли примем равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Используя эти данные и значение гравитационной постоянной $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$, вычислите среднюю плотность веществ, образующих Землю, считая Землю шаром (ответ в кг/м^3 округлить до сотен, например: 2700 кг/м^3 , 3100 кг/м^3 и т.п.).

Решение.

На тело массой m на поверхности Земли действует сила тяжести величиной mg . Эта сила представляет собой силу тяготения, действующую на тело со стороны Земли. Согласно закону всемирного тяготения, её модуль $F = G \frac{Mm}{R^2}$, где R – радиус Земли, а M – её масса.

Таким образом, приходим к уравнению

$$mg = G \frac{Mm}{R^2},$$

откуда

$$M = \frac{gR^2}{G}.$$

Выразим в этом равенстве массу Земли через её среднюю плотность ρ и объём $V = \frac{4}{3}\pi R^3$:

$$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho = \frac{gR^2}{G},$$

откуда

$$\rho = \frac{3}{4} \cdot \frac{g}{\pi R G}.$$

Выразим теперь длину экватора через радиус Земли: $L = 2\pi R$, тогда окончательно

$$\rho = \frac{3}{2} \cdot \frac{g}{LG} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot 6,7 \cdot 10^{-11}} \approx 5,6 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = \frac{3}{2} \cdot \frac{g}{LG} \approx 5,6 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Задание 3.

В ходе учебной практики студенты первых двух курсов в течение месяца обрабатывают образцы горных пород. Каждый из студентов первого курса обрабатывает одинаковое число образцов, так же студенты второго курса имеют одинаковое задание, но норма второкурсника превышает норму студента первого курса. Итоги практики показали, что студенты первого курса обработали 5000, а студенты второго курса 4500 образцов. Какое максимально возможное при данных условиях студентов первого курса было на практике, если известно, что студентов второго курса было на 3 человека меньше?

Решение.

Пусть n – число студентов 2 –го курса, тогда $n+3$ – число студентов 1 –го курса. По условию каждый студент 2 –го курса обработал больше образцов, чем студент 1 –го курса:

$\frac{4500}{n} > \frac{5000}{n+3} \Leftrightarrow \frac{9}{n} > \frac{10}{n+3} \Leftrightarrow 9n+27 > 10n \Leftrightarrow n < 27$. Кроме того, число образцов – элемент натурального ряда, поэтому

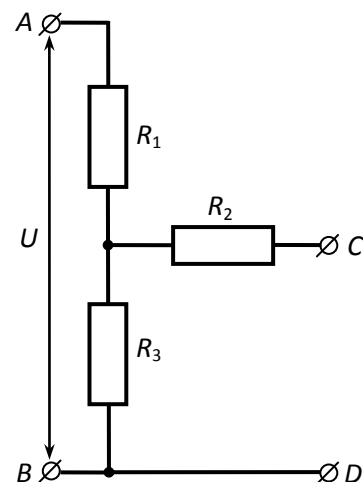
$$\frac{4500}{n} = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3}{n} \in N; \frac{5000}{n+3} = \frac{2^3 \cdot 5^4}{n+3} \in N$$

Отсюда следует, что максимальное $n < 27$, удовлетворяющее этим условиям, равно 5.

Ответ: 8.

Задание 4.

В геофизических исследованиях используются разнообразные электронные приборы. На рисунке представлена схема фрагмента такого прибора – делителя напряжения на резисторах. Если на вход AB делителя подать постоянное напряжение U , то напряжение на его выходе CD равно kU , где $k = 0,5$. Сопротивление резистора R_1 увеличили в x раз (x – целое



число). После этого при подаче на вход AB того же напряжения U напряжение на выходе делителя CD стало равно $\frac{kU}{n}$, где $n = 3$. Найдите x .

Решение.

Цепь резистора R_2 разомкнута, поэтому, когда к точкам A и B приложено напряжение U , ток через резистор R_2 не течёт ($I_2 = 0$), а через резисторы R_1 и R_3 течёт один и тот же ток

$$I = \frac{U}{R_1 + R_3}.$$

Обозначим через F точку соединения трех резисторов (см. рисунок). Напряжение на выходе делителя $U_{CD} = U_{CF} + U_{FD}$.

$$\text{Но } U_{CF} = I_2 R_2 = 0, \text{ а } U_{FD} = IR_3 = \frac{UR_3}{R_1 + R_3} = \frac{U}{1 + \frac{R_1}{R_3}}.$$

Поэтому

$$U_{CD} = \frac{U}{1 + \frac{R_1}{R_3}}.$$

По условию задачи, в первом случае $U_{CD} = \frac{U}{1 + \frac{R_1}{R_3}} = kU$, откуда

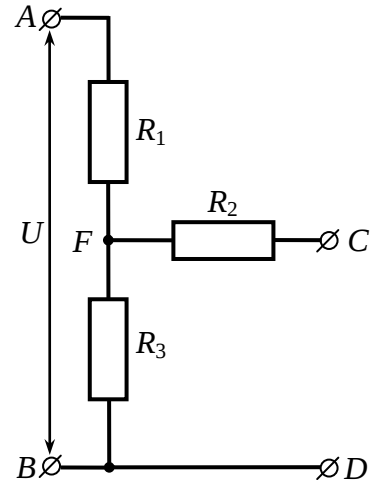
$$1 + \frac{R_1}{R_3} = \frac{1}{k}, \quad \frac{R_1}{R_3} = \frac{1-k}{k}, \quad R_1 = \frac{1-k}{k} \cdot R_3.$$

Во втором случае величину R_1 увеличили в x раз: $R_1 = \frac{1-k}{k} \cdot xR_3$. При этом $U_{CD} = \frac{kU}{n}$.

Приходим к уравнению: $\frac{kU}{n} = \frac{U}{1 + \frac{1-k}{k} \cdot x}$, или $n = k + (1-k)x$,

$$\text{откуда } x = \frac{n-k}{1-k} = \frac{3-0,5}{1-0,5} = 5.$$

Ответ: $x = \frac{n-k}{1-k} = 5$



Тестовые вопросы для 5-9 классов

Как называются мелкие живые организмы, живущие во взвешенном состоянии в толще морской воды?

Рыбы

Кораллы

Планктон

Как называется ископаемая смола деревьев?

Янтарь

Кварцит

Торф

Как называется обширная выровненная поверхность Земли (обычно не выше 200 м над уровнем моря)?

Балка

Равнина

Пойма

Как называется совокупность неровностей поверхности земли?

Терраса

Пустыня

Рельеф

Как называется узкая V-образная долина реки?

Каньон

Овраг

Терраса

В какой галактике расположена планета Земля?

Туманность Андромеды

Млечный путь

Солнечная галактика

Как называется выступающая из воды постройка из морских известковых организмов?

Валун

Вулкан

Риф

Как называется естественный выход подземных вод на поверхность?

Родник

Водопад

Пруд

Как называется источник горячей воды в областях активной вулканической деятельности?

Родник

Гейзер

Горячая точка

Как называется канал, через который выбрасывается лава?

Жерло

Шахта

Колодец

Как называется процесс разрушения и химического изменения горных пород вследствие перепадов температуры, химического и механического воздействия атмосферы, воды и организмов?

Выветривание

Сальтация

Литогенез

Как называется агрегат кристаллов, выросших на общем основании?

Конгломерат

Брекчия

Друза

Как называется форма рельефа в виде понижения, узкое по сравнению со своей длиной, в основном извилистое углубление в земной поверхности?

Бархан

Долина

Плато

Как называется углубление (воронка), возникающее в результате взрыва, который происходит при ударе крупного метеорита о твердую поверхность?

Метеоритный кратер

Метеоритный желоб

Метеоритный колодец

Как называется твердое тело, имеющее естественную форму правильного многогранника, атомы которого образуют трехмерно-периодическую пространственную укладку?

Горная порода

Диапир

Кристалл

Как называется оболочка Земли между земной корой и ядром Земли?

Мантия

Литосфера

Осадочный чехол

Как называется однородное по физическим свойствам и химическому составу природное тело, образующееся в результате физико-химических процессов в глубинах или на поверхности Земли?

Резервуар

Минерал

Коралл

Как называется скопление на суше или на дне морей мелких обломков, включающих в себя зерна или кристаллы в промышленных концентрациях?

Залежь

Карст

Россыпь

Как называется кусок природного металла (золота, платины, серебра, меди) достаточно больших размеров, найденный в россыпных или коренных месторождениях?

Самородок

Кристалл

Слиток

Как называется рыхлые отложения, состоящие из остроугольных неокатанных обломков горных пород размером от 1 до 10 мм?

Галька

Туф

Щебень

**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2015-2016 учебный год**

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (10-11 классы)

Вариант 1 - Решения

Задание 1. (25 баллов)

Исследуется процесс формирования структуры горной породы. Извлеченный из горной породы образец представляет собой четырехугольную пирамиду с основанием ABCD и вершиной S, удаленной от плоскости основания на $\sqrt{3}$. Противоположные боковые грани SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания. Стороны AD и AB основания ABCD равны 2 и $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ соответственно, угол BAD равен $\frac{\pi}{6}$, угол ABC равен $\frac{2\pi}{3}$, угол ADC равен $\frac{\pi}{3}$. На каком расстоянии от вершины S находится точка пересечения плоскостей SAD, SBC и ABCD?

Решение.

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxyz, вершина S лежит на оси z, $S(0,0,\sqrt{3})$. Поскольку грани SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания, углы BAD и ADC равны $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно, то оси x, y можно направить так, что проекции граней SAB и SCD будут лежать на осях x и y соответственно: AB лежит на оси x, CD лежит на оси y, проекция S на плоскость ABCD совпадает с началом координат O. Далее, в прямоугольном треугольнике AOD гипотенуза AD=2, точки A и D имеют координаты $(\sqrt{3},0,0)$ и $(0,1,0)$ соответственно. Пусть K - точка пересечения BC и AD, тогда в равнобедренном треугольнике ABK углы A и K равны $\frac{\pi}{6}$, угол B равен $\frac{2\pi}{3}$. Кроме того, в прямоугольном треугольнике BOC углы B и C равны соответственно $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$. В треугольнике ABK длина стороны AB по условию равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, откуда длина AK равна $\frac{9}{4}$, длина OB равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$, длина OC равна $\frac{3}{4}$, $CD=\frac{1}{4}$. Длина DK равна $\frac{1}{4}$, угол ADC равен $\frac{\pi}{3}$, откуда легко определяются координаты $K(-\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{9}{8}, 0)$, принадлежащей плоскостям SBC, SAD и плоскости основания ABCD. Расстояние от нее до вершины $S(0,0,\sqrt{3})$ равно $\sqrt{\frac{69}{16}} = \frac{\sqrt{69}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{69}}{4}$

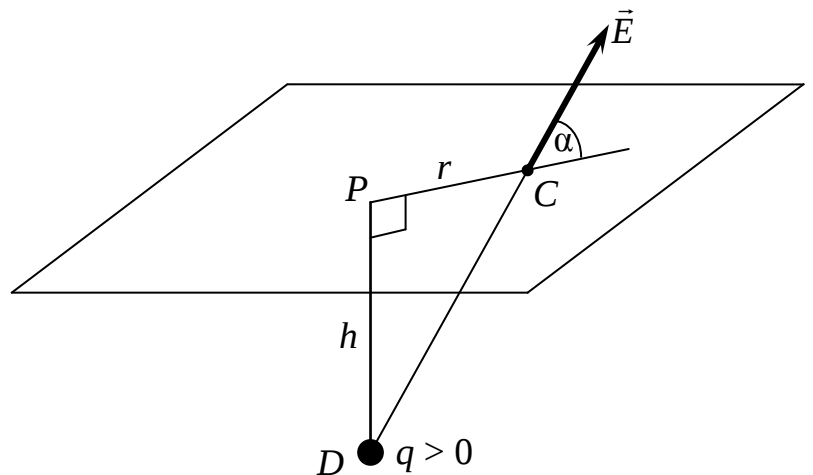
Задание 2. (15 баллов)

Залежи полезных ископаемых могут обладать аномальным электрическим зарядом. Исследование электрического поля этого заряда помогает определить местоположение и размеры залежи. Рассмотрим это исследование на макете в лаборатории.

В недоступной для наблюдения части пустого пространства под горизонтальной плоскостью на расстоянии $h = 1$ м от нее находится точечный электрический заряд. Для определения его положения исследуют поведение горизонтальной составляющей $E_{\text{гор}}$ напряженности электрического поля, создаваемого зарядом в различных точках этой плоскости. Оказалось, что величина $E_{\text{гор}}$ достигает минимального значения в некоторой точке O плоскости, а в точке A , принадлежащей плоскости и удаленной от точки O на расстояние $r_A = 0,5$ м, $E_{\text{гор}}(A) = 40$ В/м. Найдите величину горизонтальной составляющей $E_{\text{гор}}$ напряженности электрического поля, создаваемого зарядом в точке B , принадлежащей плоскости и удаленной от точки O на расстояние $r_B = 2$ м.

Решение.

Предположим, что точечный заряд величиной q расположен в некоторой точке D под горизонтальной плоскостью в пустом пространстве. Для определенности будем считать, что заряд q положительный. Пусть P – точка плоскости, под которой расположен заряд, так что отрезок DP перпендикулярен горизонтальной плоскости. В произвольной точке C горизонтальной плоскости, находящейся на расстоянии r от точки P , вектор напряженности электрического поля заряда q направлен вдоль прямой DC и лежит в плоскости, в которой лежат точки D , P и C (см. рис.). Как следует из закона Кулона, модуль вектора напряженности



этого поля в точке C равен $E = \frac{k|q|}{h^2 + r^2}$. Соответственно величина $E_{\text{гор}}$ горизонтальной составляющей вектора напряженности электрического поля вдоль горизонтальной плоскости составляет

$$E_{\text{гор}} = E \cos \alpha = \frac{k|q|}{h^2 + r^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{k|q|r}{(h^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

Точно такой же вид (1) имеет выражение для горизонтальной составляющей $E_{\text{гор}}$ в точке C и в случае отрицательного заряда q . Из (1) видно, что величина $E_{\text{гор}}(r)$ всегда неотрицательна, причем достигает минимального значения, равного нулю, лишь при $r = 0$, т.е. в точке горизонтальной плоскости, расположенной над точечным зарядом. Следовательно, точечный заряд, расположение которого исследуется в данной задаче, с необходимостью должен находиться под точкой O горизонтальной поверхности. Выписывая с учетом (1) выражения для горизонтальной составляющей напряженности электрического поля точечного заряда в точках A и B :

$$E_{\text{гор}}(A) = \frac{k|q|r_A}{(h^2 + r_A^2)^{3/2}},$$

$$E_{\text{гор}}(B) = \frac{k|q|r_B}{(h^2 + r_B^2)^{3/2}},$$

$$\text{получим: } \frac{E_{\text{гор}}(B)}{E_{\text{гор}}(A)} = \frac{r_B(h^2 + r_A^2)^{3/2}}{r_A(h^2 + r_B^2)^{3/2}} = \frac{2(1 + 0,25)^{3/2}}{0,5(1 + 4)^{3/2}} = \frac{4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}}{5^{3/2}} = \frac{4}{4^{3/2}} = 0,5.$$

Поэтому $E_{\text{гор}}(B) = 0,5E_{\text{гор}}(A) = 20 \text{ В/м}$.

Ответ: $E_{\text{гор}}(B) = 20 \text{ В/м}$

Задание 3. (15 баллов)

Геофизика является одним из разделов современной геологии. При проведении геофизических исследований Земной коры часто используются волновые поля различной физической природы (упругие, электромагнитные и др.). Для правильного геологического истолкования результатов подобных исследований важно владеть математическим аппаратом для анализа волновых процессов. В предлагаемой задаче рассматриваются два волновых процесса, характеристики которых в некоторых точках геологической среды совпадают.

Первая волна задается зависимостью сигнала y от времени t как $y = 3\cos t + 4\sin t$, вторая волна определяется из равенства $y = 1 + 6\sin 2t$. В какие моменты времени

$t, t \in \left[\frac{\pi}{12}; 2,9 - \frac{\pi}{2}\right]$, значения сигналов совпадают?

Решение.

Задача предполагает решение уравнения

$$6\sin 2t - 3\cos t - 4\sin t + 1 = 0 \Leftrightarrow 12\sin t \cos t - 3\cos t - 4\sin t + 1 = 0,$$

из которого следует, что $\begin{cases} \sin t = \frac{1}{4}, \\ \cos t = \frac{1}{3} \end{cases}$. В первом случае, т.е. $\sin t = 1/4$, корень

$t = \arcsin(1/4)$ не находится на указанном в условии отрезке, поскольку

$$\arcsin(1/4) < \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow 1/4 < \sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \sqrt{2-\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3} < 1.75. \text{ Во втором}$$

случае, т.е. $\cos t = 1/3$, получаем $t = \arccos(1/3)$, поскольку

$$\arccos(1/3) < 2.9 - \pi/2 \Leftrightarrow 1/3 > \cos(2.9 - \pi/2) = \sin 2.9 = \sin(\pi - 2.9). \text{ Последнее}$$

неравенство справедливо в силу соотношения

$$\sin(\pi - 2.9) < \pi - 2.9 < 1/3 \Leftrightarrow \pi < 3.2333\dots$$

Ответ: $t \in \{\arccos(1/3)\}$

Задание 4. (15 баллов)

В полевых условиях иногда приходится проводить измерения необходимых величин, используя подручные средства вместо привычных устройств и приборов.

Для измерения плотности жидкости цилиндрическую стеклянную трубку с открытыми концами и внутренним диаметром около 0,5 см опускают вертикально в жидкость, так что нижний конец трубки оказывается на глубине H . Верхний конец трубки плотно затыкают пальцем и медленно вытаскивают трубку из жидкости целиком, сохраняя вертикальное положение трубки. Часть жидкости при этом выливается, и в трубке остается столбик жидкости высотой $h = 20$ см. Плотность жидкости оказалась равной $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Какова была величина H , если длина трубки $L = 70$ см? Величина атмосферного давления $p_0 = 10^5$ Па. Температуру воздуха в трубке считать постоянной.

Решение.

Когда первоначально трубка погружена в жидкость, и ее верхний конец открыт, воздух в трубке находится под давлением p_0 и занимает объем $(L - H)S$, где S – площадь поперечного сечения отверстия в трубке. После вытаскивания трубки из жидкости и вытекания части жидкости давление воздуха в трубке равно p , а его объем равен $(L - h)S$. Поскольку при этом температура воздуха в трубке не изменилась, то согласно закону Бойля – Мариотта

$$p_0(L - H)S = p(L - h)S,$$

$$p = p_0 \cdot \frac{L - H}{L - h}. \quad (1)$$

С другой стороны, давления p и p_0 в верхнем и в нижнем сечении столбика жидкости в вынутой трубке связаны между собой соотношением

$$p_0 = p + \rho gh, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости. Исключая из соотношения (2) давление p с помощью формулы (1), получим:

$$H = h \left[1 + \frac{\rho g (L - h)}{p_0} \right] = 0,2 \cdot \left[1 + \frac{1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot (0,7 - 0,2)}{10^5} \right] = 0,2 \cdot (1 + 0,05) = 0,21 \text{ м.}$$

Ответ: $H = 21 \text{ см.}$

Задание 5. (15 баллов)

Дайте развернутый ответ на вопрос: «Зачем геологи изучают вулканы и вулканические извержения?»

Ответ:

Раздел геологии, изучающий вулканы и вулканические извержения называется вулканологией. Современных целей у вулканологии можно выделить три.

1) Разработка методов предсказания извержений. Вулкан – опасный объект. Начиная с конца 17 века вулканические извержения унесли более 200 тыс. жизней. Вдобавок происходят и другие неприятности - выделяются газы и вулканический пепел (что может привести, например, к запретам полетов на самолетах), нагревается грунт, происходит деформация поверхности, происходят сейсмические события. Поэтому важно разработать надежные комплексные подходы к раннему предсказанию извержений. Сейчас можно выделить:

- Сейсмические методы – основаны на наблюдениях за землетрясениями – предшественниками извержений;
- Геохимические методы – наблюдения за выделением газов;
- Геодезические методы – наблюдения за изменением поверхности;
- Физические методы – наблюдения за изменением температуры источников, почвы, воды в озерах и т.д.

2) «Научно-познавательная вулканология». Изучение продуктов извержения имеющих, в основном глубинное происхождение, дает дополнительный фактический материал для понимания геохимических процессов, проходящих в глубинных геосферах. Так, при бурении Кольской сверхглубокой скважины были отобраны образцы с глубины чуть более 12 километров. А в продуктах извержения вулканов можно найти фрагменты пород и зёрна минералов с глубины до 500-600 километров.

3) Практическая – разработка способов использования вулканического тепла горячих вод и пара для нужд экономики, а также выявление закономерностей образования полезных ископаемых вулканогенного происхождения. К таким можно отнести туф – сцементированные рыхлые породы вулканических извержений и пемза - пористая, легкая вулканическая горная порода, образующаяся в результате вспучивания и быстрого застывания лавы. Туф, обладающий прочностью, легкостью и низкой теплопроводностью,

применяется как стеновой строительный материал. Из разрезанных туфовых блоков возводят многоэтажные дома, хозяйственные постройки. Пемза широко используется в химической и стекольной промышленности, а также при изготовлении абразивных материалов и служит наполнителем в бетонах.

Задание 6. (15 баллов)

В результате каких геологических процессов могли образоваться такие причудливые формы?

Ответ обоснуйте.



Ответ:

Такие причудливые формы рельефа могут образовываться только в результате геологической деятельности моря. Геологическая деятельность моря бывает нескольких типов: разрушительная (абразия), которая заключается в разрушении берегов и дна, перенос и аккумулятивная, которая заключается в накоплении разрушенного материала. В нашем случае наблюдается абразия, причем избирательная. Абразия осуществляется в результате: ударов волн; ударов многочисленными обломками горных пород, захватываемыми сильными волнами; химического действия воды. Химическое воздействие морской воды осуществляется при помощи содержащихся в ней солей и других активных веществ. Очевидно, что различная податливость абразии пород, образовавших берег, ведёт к образованию ниш, отвесных обрывов (клифов) их обваливанию. В том случае, если воздействию подвергаются участки суши, сильно вдающиеся в море (мысы и т д), то образуются арки, гроты, которые некоторое время сохраняются, а затем обрушиваются. На их месте остаются абразионные останцы в виде

отдельных подводных и надводных скал (которые мы наблюдаем на фотографии), указывающих на прежнее положение береговой линии. Подобные арки известны у берегов Франции, Испании, России (в Крыму) и в других местах. Интересно отметить, что в районах, прилежащих к морю и испытывающих длительное поднятие, такие арки и абразионные останцы могут находиться даже выше уровня моря (например, в Норвегии).

Не стоит забывать и о том, что надводная часть таких арок и скал постоянно подвергается также геологической деятельности ветра: выдуванию (или дефляции) и обтачиванию (или корразии). Это приводит к изменению их внешнего экзотического вида.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (10-11 классы)

Вариант 2 - Решения

Задание 1. (25 баллов)

Исследуется процесс формирования структуры горной породы. Извлеченный из горной породы образец представляет собой четырехугольную пирамиду с основанием ABCD и вершиной S, удаленной от плоскости основания на $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Противоположные боковые грани SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания. Стороны AD и AB основания ABCD равны 4 и $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ соответственно, угол BAD равен $\frac{\pi}{6}$, угол ABC равен $\frac{2\pi}{3}$, угол ADC равен $\frac{\pi}{3}$. На каком расстоянии от вершины S находится точка пересечения плоскостей SAD, SBC и ABCD?

Решение.

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxyz, вершина S лежит на оси z, $S(0,0, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Поскольку грани SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания, углы BAD и ADC равны $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно, то оси x, y можно направить так, что проекции граней SAB и SCD будут лежать на осях x и y соответственно: AB лежит на оси x, CD лежит на оси y, проекция S на плоскость ABCD совпадает с началом координат O. Далее, в прямоугольном треугольнике AOD гипотенуза AD=4, точки A и D имеют координаты $(2\sqrt{3}, 0, 0)$ и $(0, 2, 0)$ соответственно. Пусть K - точка пересечения BC и AD, тогда в равнобедренном треугольнике ABK углы A и K равны $\frac{\pi}{6}$, угол B равен $\frac{2\pi}{3}$. Кроме того, в прямоугольном треугольнике BOC углы B и C равны соответственно $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$. В треугольнике ABK длина стороны AB по условию равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, откуда длина AK равна $\frac{9}{2}$, длина OB равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, длина OC равна $\frac{3}{2}$, $CD = \frac{1}{2}$. Длина DK равна $\frac{1}{2}$, угол ADC равен $\frac{\pi}{3}$, откуда легко определяются координаты $K(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{9}{4}, 0)$, принадлежащей

плоскостям SBC, SAD и плоскости основания ABCD. Расстояние от нее до вершины $S(0,0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ равно $\sqrt{6}$.

Ответ: $\sqrt{6}$

Задание 2. (15 баллов)

Залежи полезных ископаемых могут обладать аномальным электрическим зарядом. Исследование электрического поля этого заряда помогает определить местоположение и размеры залежи. Рассмотрим это исследование на макете в лаборатории.

В недоступной для наблюдения части пустого пространства под горизонтальной плоскостью на расстоянии $h = 1,5$ м от нее находится точечный электрический заряд. Для определения его положения исследуют поведение горизонтальной составляющей $E_{\text{гор}}$ напряженности электрического поля, создаваемого зарядом в различных точках этой плоскости. Оказалось, что величина $E_{\text{гор}}$ достигает минимального значения в некоторой точке O плоскости, а в точке A , принадлежащей плоскости и удаленной от точки O на расстояние $r_A = 0,5$ м, $E_{\text{гор}}(A) = 81$ В/м. Найдите величину горизонтальной составляющей $E_{\text{гор}}$ напряженности электрического поля, создаваемого зарядом в точке B , принадлежащей плоскости и удаленной от точки O на расстояние $r_B = 4,5$ м.

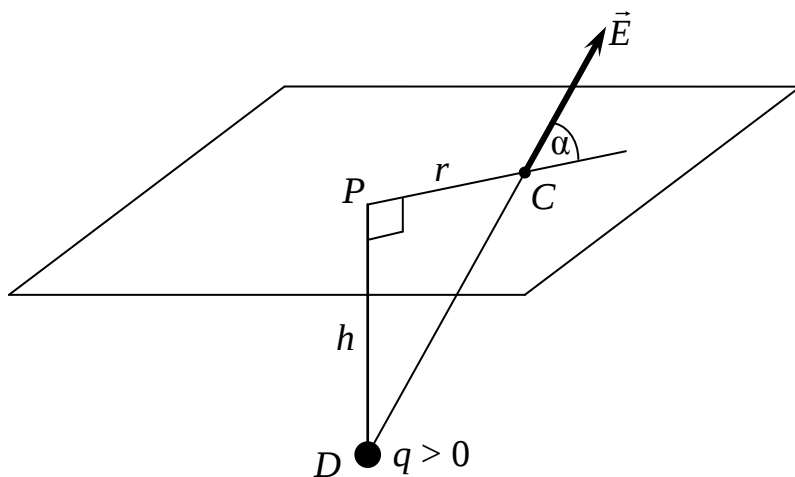
Решение.

Предположим, что точечный заряд величиной q расположен в некоторой точке D под горизонтальной плоскостью в пустом пространстве. Для

определенности будем считать, что заряд q положительный. Пусть P – точка плоскости, под которой расположен заряд, так что отрезок DP перпендикулярен

горизонтальной плоскости. В произвольной точке C горизонтальной плоскости, находящейся на расстоянии r от точки P , вектор напряженности электрического поля заряда q направлен вдоль прямой DC и лежит в плоскости, в которой лежат точки D , P и C (см. рис.). Как следует из закона Кулона, модуль вектора напряженности этого поля в

точке C равен $E = \frac{k|q|}{h^2 + r^2}$. Соответственно величина $E_{\text{гор}}$ горизонтальной составляющей вектора напряженности электрического поля вдоль горизонтальной плоскости составляет



$$E_{\text{гор}} = E \cos \alpha = \frac{k|q|}{h^2 + r^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{k|q|r}{(h^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

Точно такой же вид (1) имеет выражение для горизонтальной составляющей $E_{\text{гор}}$ в точке C и в случае отрицательного заряда q . Из (1) видно, что величина $E_{\text{гор}}(r)$ всегда неотрицательна, причем достигает минимального значения, равного нулю, лишь при $r = 0$, т.е. в точке горизонтальной плоскости, расположенной над точечным зарядом. Следовательно, точечный заряд, расположение которого исследуется в данной задаче, с необходимостью должен находиться под точкой O горизонтальной поверхности. Выписывая с учетом (1) выражения для горизонтальной составляющей напряженности электрического поля точечного заряда в точках A и B :

$$E_{\text{гор}}(A) = \frac{k|q|r_A}{(h^2 + r_A^2)^{3/2}},$$

$$E_{\text{гор}}(B) = \frac{k|q|r_B}{(h^2 + r_B^2)^{3/2}},$$

$$\frac{E_{\text{гор}}(B)}{E_{\text{гор}}(A)} = \frac{r_B(h^2 + r_A^2)^{3/2}}{r_A(h^2 + r_B^2)^{3/2}} = \frac{4,5(2,25 + 0,25)^{3/2}}{0,5(2,25 + 20,25)^{3/2}} = \frac{9 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{3/2}}{\left(\frac{45}{2}\right)^{3/2}} = \frac{9}{9^{3/2}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Поэтому } E_{\text{гор}}(B) = \frac{1}{3} E_{\text{гор}}(A) = 27 \text{ В/м.}$$

Ответ: $E_{\text{гор}}(B) = 27 \text{ В/м}$

Задание 3. (15 баллов)

Геофизика является одним из разделов современной геологии. При проведении геофизических исследований Земной коры часто используются волновые поля различной физической природы (упругие, электромагнитные и др.). Для правильного геологического истолкования результатов подобных исследований важно владеть математическим аппаратом для анализа волновых процессов. В предлагаемой задаче рассматриваются два волновых процесса, характеристики которых в некоторых точках геологической среды совпадают.

Первая волна задается зависимостью сигнала y от времени t как $y = 4\cos t + 4\sin t$, вторая волна определяется из равенства $y = 1 + 8\sin 2t$. В какие моменты времени

$t, t \in \left[\frac{\pi}{8}; 2,9 - \frac{\pi}{2}\right]$, значения сигналов совпадают?

Решение.

Задача предполагает решение уравнения

$$8\sin 2t - 4\cos t - 4\sin t + 1 = 0 \Leftrightarrow 16\sin t \cos t - 4\cos t - 4\sin t + 1 = 0,$$

из которого следует, что $\begin{cases} \sin t = \frac{1}{4}, \\ \cos t = \frac{1}{4} \end{cases}$. В первом случае, т.е. $\sin t = 1/4$, корень

$t = \arcsin(1/4)$ не находится на указанном в условии отрезке, поскольку

$$\arcsin(1/4) < \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow 1/4 < \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} < 1.75. \text{ Во втором случае, т.е.}$$

$\cos t = 1/4$, получаем $t = \arccos(1/4)$, поскольку

$\arccos(1/4) < 2.9 - \pi/2 \Leftrightarrow 1/4 > \cos(2.9 - \pi/2) = \sin(\pi - 2.9)$. Последнее неравенство справедливо в силу соотношения $\sin(\pi - 2.9) < \pi - 2.9 < 1/4$.

Ответ: $t \in \{\arccos(1/4)\}$

Задание 4. (15 баллов)

В полевых условиях иногда приходится проводить измерения необходимых величин, используя подручные средства вместо привычных устройств и приборов.

Для измерения плотности жидкости цилиндрическую стеклянную трубку с открытыми концами и внутренним диаметром около 0,5 см опускают вертикально в жидкость, так что нижний конец трубки оказывается на глубине $H = 26$ см. Верхний конец трубки плотно затыкают пальцем и медленно вытаскивают трубку из жидкости целиком, сохраняя вертикальное положение трубки. Часть жидкости при этом выливается, и в трубке остается столбик жидкости высотой $h = 25$ см. Плотность жидкости оказалась равной $\rho = 0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Какова длина трубки L ? Величина атмосферного давления $p_0 = 10^5$ Па. Температуру воздуха в трубке считать постоянной.

Решение.

Когда первоначально трубка погружена в жидкость, и ее верхний конец открыт, воздух в трубке находится под давлением p_0 и занимает объем $(L - H)S$, где S – площадь поперечного сечения отверстия в трубке. После вытаскивания трубки из жидкости и вытекания части жидкости давление воздуха в трубке равно p , а его объем равен $(L - h)S$. Поскольку при этом температура воздуха в трубке не изменилась, то согласно закону Бойля – Мариотта

$$p_0(L - H)S = p(L - h)S,$$

$$p = p_0 \cdot \frac{L - H}{L - h}. \quad (1)$$

С другой стороны, давления p и p_0 в верхнем и в нижнем сечении столбика жидкости в вынутой трубке связаны между собой соотношением

$$p_0 = p + \rho gh, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости. Исключая из соотношения (2) давление p с помощью формулы (1), получим:

$$L = h + \frac{p_0}{\rho gh} \cdot (H - h) = 0,25 + \frac{10^5 \cdot (0,26 - 0,25)}{0,8 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0,25} = 0,25 + \frac{1}{2} = 0,75 \text{ м.}$$

Ответ: $L = 75\text{ см.}$

Задание 5. (15 баллов)

Дайте развернутый ответ на вопрос: *«Зачем геологи изучают метеориты и метеоритные кратеры?»*

Ответ:

Для геологов изучение метеоритов — это один из немногих способов реконструировать вещественный состав глубинных частей нашей планеты, недоступных для изучения другими методами. Так, при бурении Кольской сверхглубокой скважины были отобраны образцы с глубины чуть более 12 километров. В продуктах извержения вулканов и кимберлитовых трубках изредка можно найти фрагменты пород и зёрна минералов с глубины до 500-600 километров. Радиус же Земли — почти 6400 километров! В поисках ответа на вопрос «что же там, ещё глубже под поверхностью?» геологи обратили внимание на метеориты, представляющие собой остатки вещества, из которого четыре с половиной миллиарда лет назад сформировались планеты Солнечной системы. Таким образом, изучая метеориты и используя имеющиеся знания о процессах планетообразования, можно достаточно точно реконструировать состав и структуру самых глубинных оболочек Земли. Полученные в результате модели хорошо согласуются с данными геофизиков, «просвечивающих» её сейсмическими волнами.

Изучение метеоритных кратеров позволяет получить и другую информацию. Большинство распространённых минералов при высоком давлении создают новые модификации с плотной кристаллической структурой. Однако, согласно расчётам, эти модификации должны были образовываться на больших глубинах и вероятность найти их в природных образцах на поверхности равны нулю. Тем не менее, начиная с 60-х гг. появились находки минералов высокого давления в метеоритных (импактных) кратерах. Дело в том, что падение метеоритов порождает по-настоящему высокие ударные давления. Наиболее известные находки — модификации кремнезема SiO_2 высокого давления — коэсит и стишовит.

Задание 6. (15 баллов)

В результате каких геологических процессов могли образоваться такие причудливые формы?

Ответ обоснуйте.



Ответ:

Такие причудливые формы рельефа могут образовываться только в результате процессов избирательного выветривания. Выветривание – следует понимать шире, чем следует из названия. Это не просто работа ветра, это совокупность многих физических и химических факторов разрушения горных пород. Но ветер также активно работал над этим участком – изображенные причудливые «столбы» могли образоваться именно в результате разрушительной деятельности именно ветра: выдувания собственно ветром (или дефляции) и обтачивания горных пород при помощи переносимого ветром частиц, например, песка. Такой процесс обтачивания называют корразией. Струи воздуха проникают в трещины и щели твердых горных пород и выдувают из них рыхлые продукты выветривания. Наличие зияющих трещин способствует дальнейшему развитию процессов физического выветривания и последующему выносу ветром новых порций получаемого обломочного материала. Трещины со временем значительно расширяются в итоге образуются обточенные скалы причудливых форм в виде башен, колонн, обелисков и т.п.

Почему же столбы? Дело в том, что характер выветривания тут был избирательный. Не все горные породы и даже не все части одной породы разрушаются равномерно. В трещиноватых участках пород выветривание происходит значительно легче, вдоль трещин образуются карманы продуктов выветривания. Одни компоненты породы разрушаются легче, другие трудней. Одни слои более подвержены выветриванию, другие менее, в результате местами возникают останцы более устойчивых слоев (в виде столбов, башен) на фоне продуктов выветривания разрушенных слоев, что мы и видим на фотографии. Такие формы рельефа встречаются в Крыму, Восточном Казахстане и многих других местах. Особенно известны склоны горы Демерджи в Крыму, где многим таким башням даны даже собственные имена.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Ответы на задания заключительного этапа (10-11 классы)

Номер задания	Ответ	
	Вариант 1.	Вариант 2.
Задание 1.	$\frac{\sqrt{69}}{4}$	$\sqrt{6}$
Задание 2.	20 В/м	27 В/м
Задание 3.	$t \in \{\arccos(1/3)\}$	$t \in \{\arccos(1/4)\}$
Задание 4.	21 см	75 см

Задание 5.**Вариант 1**

Ответ на вопрос должен включать три основных причины:

- 1) научное направление (состав лавы и газов, образование редких минералов, состав внутренних оболочек Земли, тектоника плит, сейсмичность и их связь с вулканизмом, геологическая история Земли и т.п.);
- 2) с целью предотвращения вредного воздействия на человека и его хозяйственную деятельность вулканических извержений в различной форме (катастрофические взрывы, потоки лавы, загрязнение окружающей среды, выбросы пепла в атмосферу и т.п.). Приветствуется описание возможных способов защиты от вредного воздействия и предсказание извержений;
- 3) полезные для человечества последствия вулканизма (образование вулканогенных месторождений полезных ископаемых, в том числе сами вулканические породы, газы, геотермальная энергия и т.п.).

Балл снижался за отсутствие в ответе одной или нескольких этих причин (в той или иной форме).

Вариант 2

Ответ на вопрос должен включать три основных причины:

- 1) научное направление (состав метеоритного вещества, изучение минералов и пород, сформированных при сверхвысоких температурах и давлениях (импактный метаморфизм), источники метеоритного вещества, метеоритная версия зарождения жизни на Земле, гибели динозавров и т.п.);
- 2) с целью предотвращения вредного воздействия на человека и его хозяйственную деятельность падений метеоритов (катастрофические взрывы, разрушения, экологические

загрязнения. Приветствуется описание возможных способов защиты и предсказание падений;

3) полезные для человечества последствия падений метеоритов (метеориты – источник ценных компонентов, импактные алмазы, метеоритные гипотезы происхождения некоторых месторождений и т.п.).

Балл снижался за отсутствие в ответе одной или нескольких этих причин (в той или иной форме).

Задание 6.

Данные останцы образованы более прочными и устойчивыми породами по отношению к окружающим. В ответе на вопрос должны быть указаны процессы выветривания (разрушение пород под действием физических, химических и биологических факторов), геологической работы ветра (выдувание частиц и обтачивание). Дополнительные баллы начислялись за упоминание любого возможного третьего геологического процесса (морская абразия, речная эрозия, гравитационные обвалы и осыпи).

Критерии оценки решений

Критерии оценки	Баллы					
	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5	Задание 6
Задание выполнено правильно: ответ верен, в работе есть полное обоснование полученного ответа (для заданий 1-4); в работе дан исчерпывающий ответ на поставленное геологическое задание (для заданий 5 и 6)	25	15	15	15	15	15
Задание выполнено с небольшими недочетами: - арифметическая ошибка на завершающем этапе при полностью правильном алгоритме решения, что повлекло за собой неверный ответ; - правильный ответ при недостаточно полном обосновании, как он получен; - недостаточно полное обоснование ответов на геологические задания.	15	10	10	10	10	10

Задание выполнено с существенными недочетами: - решение было начато правильно, но не доведено до ответа из-за принципиальной ошибки в рассуждениях; - ответы на геологические задания даны крайне поверхностно и неполно.	5	5	5	5	5	5
Задание не выполнено: - решение с самого начала велось неверным путем; - отсутствие выполненного задания в работе.	0	0	0	0	0	0

Для задания 1 предусмотрена возможность выставления оценки 20 баллов за недостаточно полное обоснование решения при правильном ответе или небрежном оформлении работы.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (5-9 классы)

Решения

Задание 1. (25 баллов)

Территория геологических исследований представляет собой правильный треугольник ABC. На сторонах AB, BC и AC выбраны точки M, N и E соответственно так, что треугольники AME и CNE правильные, $\frac{CE}{AE} = \frac{3}{5}$. Для точки Q – проекции на сторону AC точки пересечения прямых AN и CM, найдите величину $\frac{CQ}{AQ}$.

Решение. Пусть сторона треугольника равна a , $CE = ka$, $AE = (1-k)a$. В данном случае $k=3/8$. Далее, пусть точки P и R соответственно проекции M и N. Пусть K – точка пересечения AN и CM. Из подобия треугольников CPM и CQK, а так же ARN и AQK следуют равенства $MP:KQ=CP:CQ$ и $NR:KQ=AR:AQ$, при этом

$$MP = (1-k) \frac{a\sqrt{3}}{2}, NR = k \frac{a\sqrt{3}}{2}, AP = (1-k) \frac{a}{2}, CR = k \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AR = a - k \frac{a}{2} = a(1 - \frac{k}{2}), CP = a - (1-k) \frac{a}{2} = a(\frac{1}{2} + \frac{k}{2})$$

Из данных соотношений получим равенства

$$\frac{k \frac{a\sqrt{3}}{2}}{KQ} = \frac{a(1 - \frac{k}{2})}{AQ}, \frac{(1-k) \frac{a\sqrt{3}}{2}}{KQ} = \frac{a(\frac{1}{2} + \frac{k}{2})}{CQ},$$

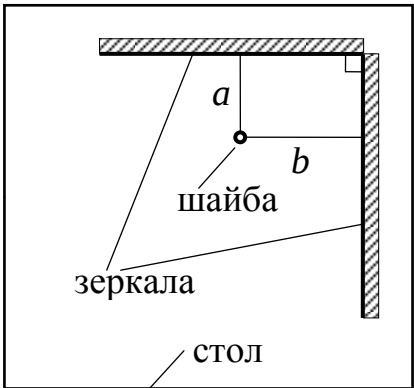
откуда $CQ:AQ=33:65$.

Ответ: $\frac{33}{65}$

Задание 2. (25 баллов)

Характерный блеск ограненных особым образом драгоценных камней (бриллиантов, рубинов, сапфиров и т.п.) обусловлен многократным отражением света на их гранях. Предлагаемая задача иллюстрирует применимость законов геометрической оптики в геммологии – науке о драгоценных камнях.

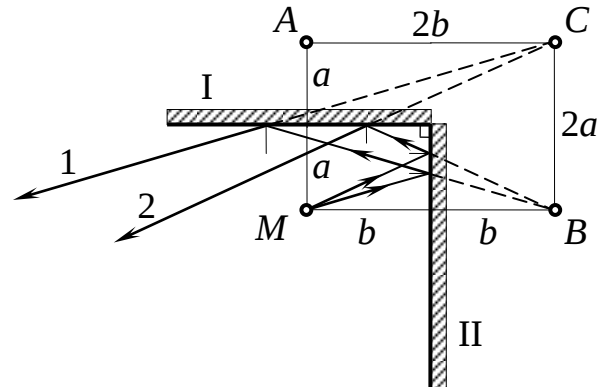
На горизонтальном столе вертикально установлены два квадратных зеркала размером



1 м × 1 м. Одной стороной зеркала соприкасаются друг с другом. Угол между зеркалами равен 90°. На столе между зеркалами лежит маленькая шайба. Расстояние от шайбы до одного зеркала $a = 30$ см, до другого зеркала $b = 40$ см (см. рисунок, вид сверху). Каково расстояние l от шайбы до ее самого дальнего изображения в системе зеркал?

Решение.

Шайба находится в точке M . Лучи, идущие от шайбы, отразившись только от зеркала I, дают изображение шайбы в точке A . Из закона отражения света (угол падения равен углу отражения) следует, что изображение предмета в плоском зеркале расположено за зеркалом на продолжении перпендикуляра, опущенного на зеркало из точки, где находится предмет. Расстояние от изображения до зеркала равно расстоянию от предмета до зеркала. Поэтому $AM = 2a$. Лучи от шайбы, отразившиеся только от зеркала II, дают изображение шайбы в точке B , причем $BM = 2b$.



Рассмотрим лучи 1 и 2, идущие от шайбы и отразившиеся от обоих зеркал. После отражения от зеркала II они идут так, словно вышли из точки B . Поэтому, отразившись затем от зеркала I, они создают изображение точки B в зеркале I – точку C . Это изображение расположено относительно точки B точно так же, как точка A расположена относительно точки M . Таким образом, система зеркал дает три изображения A , B и C шайбы M . Шайба M и ее изображения A , B и C лежат в вершинах прямоугольника $ACBM$. Самой дальней от точки M является точка C , причем

$$CM = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} = \sqrt{(0,6)^2 + (0,8)^2} = 1 \text{ м.}$$

Ответ: $l = 1$ м.

Задание 3. (25 баллов)

Дайте развернутый ответ на вопрос: «Где на Земле расположены вулканы? Какие особенности геологического строения имеет данная территория?»

Ответ:

Большинство вулканов (действующих и потухших) приурочены к границам литосферных плит. Эти участки называют сейсмическими областями, т.к. помимо сосредоточения большинства действующих вулканов Земли, здесь происходит 95% землетрясений. С точки зрения геологического строения и тектоники выделяют вулканизм срединно-океанических хребтов (зоны спрединга), островных дуг (зоны субдукции), зон коллизии. Необходимо описать (или нарисовать с комментариями) строение этих участков. Особым случаем внутриплитного вулканизма являются «горячие точки».

Задание 4. (25 баллов)

Перед Вами репродукция картины Антона Винтерлина «Швейцарские Альпы».

Опишите геологические процессы, проявленные на данной территории.



Ответ:

На фотографии представлены довольно высокие горы с отвесными скалами, местами покрытыми ледниковыми «языками».

Для ответа на поставленный вопрос необходимо охарактеризовать геологическую работу ледников (разрушение пород, шлифовка, перенос материала) и разнообразные гравитационные процессы (обвалы, осыпи, сели, лавины и т.п.). Наиболее полный ответ может включать также описание процессов выветривания (физического, химического, биологического), геологической работы ветра (выдувание и обтачивание пород, не содержащих растительности), а также временных и постоянных водных потоков, образующихся при таянии ледника (у подножия можно разглядеть озеро).

Процесс формирования (воздымания) гор мы непосредственно не наблюдаем и не фиксируем.

Критерии оценки решений

Критерии оценки	Баллы			
	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4
Задание выполнено правильно: ответ верен, в работе есть полное обоснование полученного ответа (для заданий 1-2); в работе дан исчерпывающий ответ на поставленное геологическое задание (для заданий 3 и 4)	25	25	25	25

Задание выполнено с небольшими недочетами: - арифметическая ошибка на завершающем этапе при полностью правильном алгоритме решения, что повлекло за собой неверный ответ; - правильный ответ при недостаточно полном обосновании, как он получен; - недостаточно полное обоснование ответов на геологические задания.	15	15	15	15
Задание выполнено с существенными недочетами: решение было начато правильно, но не доведено до ответа из-за принципиальной ошибки в рассуждениях.	5	5	5	5
Задание не выполнено: - решение с самого начала велось неверным путем; - отсутствие решения в работе.	0	0	0	0