МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ» по математике

2015/2016 учебный год

http://olymp.msu.ru

1) Отборочный этап 10-11 класс первый отборочный тур:

::1.1:: Какое наибольшее количество подарков для детей можно собрать из 198 пряников, 462 конфет и 132 шоколадок, чтобы в каждом подарке было одинаковое количество пряников, одинаковое количество конфет и одинаковое количество шоколадок и все пряники, конфеты и шоколадки были использованы?

Ответ: 66. **Решение.** Так как $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$, $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$ и $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, то наибольшее количество подарков равно $\text{НОД}\,(132,\ 198,\ 462) = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$ (подарков).

::1.2:: Какое наибольшее количество подарков для детей можно собрать из 462 пряников, 539 конфет и 308 шоколадок, чтобы в каждом подарке было одинаковое количество пряников, одинаковое количество конфет и одинаковое количество шоколадок и все пряники, конфеты и шоколадки были использованы?

Ответ: 77.

::1.3:: Какое наибольшее количество подарков для детей можно собрать из 234 пряников, 273 конфет и 156 шоколадок, чтобы в каждом подарке было одинаковое количество пряников, одинаковое количество конфет и одинаковое количество шоколадок и все пряники, конфеты и шоколадки были использованы?

Ответ: 39.

::1.4:: Какое наибольшее количество подарков для детей можно собрать из 273 пряников, 637 конфет и 182 шоколадок, чтобы в каждом подарке было одинаковое количество пряников, одинаковое количество конфет и одинаковое количество шоколадок и все пряники, конфеты и шоколадки были использованы?

Ответ: 91.

::1.5:: Какое наибольшее количество подарков для детей можно собрать из 234 пряников, 546 конфет и 156 шоколадок, чтобы в каждом подарке было одинаковое количество пряников, одинаковое количество конфет и одинаковое количество шоколадок и все пряники, конфеты и шоколадки были использованы?

Ответ: 78.

::2.1:: Найдите значение выражения

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)^{-1}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$, если $a=\pi$, а b и c – корни уравнения $2015x^2-2015x+2=0$.

Ответ: 503,75. **Решение.** Вычисляем по очереди: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)^{-1}$

$=\frac{a+b+c}{a(b+c)}:\frac{b+c-a}{a(b+c)}=\frac{a+b+c}{b+c-a}$; $1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$.

Поэтому при всех допустимых значениях переменных выражение равно:

$\frac{(a+b+c)^2(b+c-a)}{2bc(b+c-a)(a+b+c)^2}=\frac{1}{2bc}$. Так как по теореме Виета $bc=\frac{2}{2015}$, то получаем ответ:

$\frac{2015}{4}=503,75$.

::2.2:: Найдите значение выражения

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)^{-1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{-1}\frac{(a+b+c)^2}{2}$, если $a=2\pi$, а b и c – корни уравнения $2x^2-2015x+2015=0$.

Ответ: 1007,5.

::2.3:: Найдите значение выражения

$\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b+c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)^{-1}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$, если $a=3\pi$, а b и c – корни уравнения $2015x^2-2016x+2=0$.

Ответ: 1007,5.

::2.4:: Найдите значение выражения

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)^{-1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{-1}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$, если $a=4\pi$, а b и c – корни уравнения $2x^2-2016x+2015=0$.

Ответ: 503,75.

::3.1:: На окружности пытаются разместить 20 черных и 50 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 680. **Решение.** Треугольник прямоугольный, если его сторона проходит через центр окружности. Чтобы получить максимум треугольников, нужно чтобы все 70 вершин разбились на пары диаметрально противоположных. Пусть среди них оказалось m пар разноцветных вершин, тогда $m = 2x$ — четно (если оно есть $m = 2x - 1$, то увеличим его на 1, отчего число искомых треугольников только увеличится) и разобьем все остальные вершины на пары одноцветных: $(20-2x)/2 = 10 - x$ черных и $(50-2x)/2 = 25 - x$ белых. Третьей вершиной может быть любая из оставшихся черных, поэтому число искомых треугольников будет равно:
$2x \cdot (20-1) + (10-x) \cdot (20-2) + (25-x) \cdot 20 = 680$.

::3.2:: На окружности пытаются разместить 20 черных и 40 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 580.

::3.3:: На окружности пытаются разместить 30 черных и 20 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 720.

::3.4:: На окружности пытаются разместить 40 черных и 10 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 960.

::3.5:: На окружности пытаются разместить 21 черную и 15 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 357.

::3.6:: На окружности пытаются разместить 11 черных и 45 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 297.

::3.7:: На окружности пытаются разместить 15 черных и 41 белую точку так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 405.

::3.8:: На окружности пытаются разместить 25 черных и 21 белую точку так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 550.

::4.1:: Найдите все четырёхзначные числа, которые уменьшаются в 16 раз после отбрасывания первой цифры. В ответе укажите сумму всех таких чисел.

Ответ: 19200. **Решение.** Обозначим первую цифру данного четырёхзначного числа через x, а остающееся после отбрасывания этой цифры трёхзначное число – через y. Тогда по условию: $1000x+y=16y$, или $200x=3y$. Поэтому возможны варианты: $x=3$, $y=200$; $x=6$, $y=400$; $x=9$, $y=600$. Получающиеся числа: 3200, 6400, 9600.

::4.2:: Найдите все четырёхзначные числа, которые уменьшаются в 13 раз после отбрасывания первой цифры. В ответе укажите сумму всех таких чисел.

Ответ: 19500.

::4.3:: Найдите все четырёхзначные числа, которые уменьшаются в 11 раз после отбрасывания первой цифры. В ответе укажите сумму всех таких чисел.

Ответ: 49500.

::4.4:: Найдите все четырёхзначные числа, которые уменьшаются в 17 раз после отбрасывания первой цифры. В ответе укажите сумму всех таких чисел.

Ответ: 21250.

::5.1:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 6$ на основании *AC* выбрана точка *N* так, что $AN : NC = 2:1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников *ABN* и *CBN*. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,09. **Решение**. а) Из теоремы синусов для треугольников *ABN* и *CBN* следует, что радиусы указанных описанных окружностей равны. Обозначим центры этих окружностей соответственно через O_1 и O_2, а их радиусы через *R*.

б) Четырехугольник O_1BO_2N – ромб со стороной *R* и углом при вершине *B*, равным углу при вершине исходного равнобедренного треугольника ($\angle BO_1O_2$ – половина центрального угла и равен углу $\angle A$, а $\angle BO_2O_1$ – половина центрального угла и равен углу $\angle C$). Треугольники *ABC* и O_1BO_2 подобны.

в) Отрезок *BN* находится из теоремы косинусов для треугольника *ABN* $\left(\cos\angle A = \dfrac{3}{5}\right)$: $BN = \sqrt{17}$. Из подобия треугольников или с использованием тригонометрических функций $\left(\operatorname{ctg}\angle A = \dfrac{3}{4}\right)$ получаем ответ $O_1O_2 = BN \cdot \operatorname{ctg}\angle A = \dfrac{3\sqrt{17}}{4}$ $\approx 3,09$.

::5.2:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = \sqrt{13}$, $AC = 6$ на основании *AC* выбрана точка *N* так, что $AN : NC = 2:1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников *ABN* и *CBN*. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,35.

::5.3:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = 3\sqrt{2}$, $AC = 6$ на основании *AC* выбрана точка *N* так, что $AN : NC = 2:1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,16.

::5.4:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = \sqrt{10}$, $AC = 6$ на основании AC выбрана точка N так, что $AN : NC = 2:1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 4,24.

::5.5:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 8$ на основании AC выбрана точка N так, что $AN : NC = 3:1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 4,81.

::5.6:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = \sqrt{17}$, $AC = 8$ на основании AC выбрана точка N так, что $AN : NC = 3:1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 8,94.

::5.7:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = \sqrt{5}$, $AC = 4$ на основании AC выбрана точка N так, что $AN : NC = 3:2$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 2,15.

::5.8:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = \sqrt{29}$, $AC = 10$ на основании AC выбрана точка N так, что $AN : NC = 3:2$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 5,59.

::6.1:: Найдите наибольшее значение величины $\sqrt{\frac{x+y}{2}}-\sqrt{xy}$, если известно, что $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$.

Ответ: 0,5. **Решение.** $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge y \ge 0, \\ x+y-2\sqrt{xy}=2xy+\frac{1}{2}. \end{cases}$ Уравнение $x+y-2\sqrt{xy}=2xy+\frac{1}{2}$ равносильно $\frac{x+y}{2}=xy+\sqrt{xy}+\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2}=\left(\sqrt{xy}+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$ $\sqrt{\frac{x+y}{2}}=\sqrt{xy}+\frac{1}{2}$, поэтому $\sqrt{\frac{x+y}{2}}-\sqrt{xy}=\frac{1}{2}$.

::6.2:: Найдите наименьшее значение величины $\sqrt{2(x+y)}-2\sqrt{xy}$, если известно, что $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$.

Ответ: 1.

::6.3:: Найдите наибольшее значение величины $\sqrt{2(x+y)}-2\sqrt{xy}$, если известно, что $\sqrt{y}-\sqrt{x}=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$.

Ответ: 1.

::6.4:: Найдите наименьшее значение величины $\sqrt{\frac{x+y}{2}}-\sqrt{xy}$, если известно, что $\sqrt{y}-\sqrt{x}=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$.

Ответ: 0,5.

::6.5:: Найдите наибольшее значение величины $\sqrt{\frac{x+y}{2}}-\sqrt{xy}$, если известно, что $\sqrt{y}-\sqrt{x}=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$.

Ответ: 0,5.

::7.1:: Решите уравнение $5\sin\left(2x+\arcsin\frac{4}{5}\right)+\sqrt{10}\cos\left(x-\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=7$. В ответе укажите сумму всех решений, принадлежащих промежутку $\left(\frac{3\pi}{2};\frac{13\pi}{6}\right)$, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 6,28. **Решение:** Так как $\sin\left(2x+\arcsin\frac{4}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x-\arccos\frac{3}{5}\right)$ $=\cos\left(2\left(x-\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right)$, то, обозначив $\alpha=x-\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$, получим $5\cos 2\alpha+\sqrt{10}\cos\alpha=7$, или $10\cos^2\alpha+\sqrt{10}\cos\alpha-12=0$. Отсюда $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ или $\cos\alpha=-\frac{4\sqrt{10}}{10}$ (что невозможно, так как $-\frac{4\sqrt{10}}{10}<-1$). Поэтому $\cos\left(x-\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, откуда получаются решения: $x=2\pi n$, $2\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}+2\pi n$. При этом в указанный в условии промежуток попадает только 2π, так как $2\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}>\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sin\left(2\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$.

::7.2:: Решите уравнение $\sqrt{10}\sin\left(x-\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}\right)-5\sin\left(2x-\arccos\frac{3}{5}\right)=7$. В ответе укажите сумму всех решений, принадлежащих промежутку $\left(-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: $-3{,}14$.

::7.3:: Решите уравнение $5\sin\left(2x+\arccos\frac{4}{5}\right)+8\sqrt{5}\sin\left(x-\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=11$. В ответе укажите сумму всех решений, принадлежащих промежутку $\left(\frac{7\pi}{3};\frac{7\pi}{2}\right)$, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 9,42.

::7.4:: Решите уравнение $8\sqrt{5}\cos\left(x-\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-5\sin\left(2x-\arcsin\frac{3}{5}\right)=11$. В ответе укажите сумму всех решений, принадлежащих промежутку $\left(-\frac{5\pi}{2};-\frac{4\pi}{3}\right)$, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: $-6,28$.

::8.1:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a=12\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной AC и SD, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 12 (или 16). **Решение.** Рёбра оснований равны $12\sqrt{2}$, диагональ основания равна $AC = BD = 24$, поэтому $BQ=12$ и боковые рёбра равны 18.

1) Рассмотрим серию указанных сечений, пересекающих ребра AD и DC (см. рис. 1). Все эти сечения – треугольники, подобные треугольнику AEC, причем $QE \parallel BS$, QE – средняя линия в ΔBSD, поэтому $QE=9$, $AE=\sqrt{QE^2+AQ^2}$ = $\sqrt{81+144}=15$.

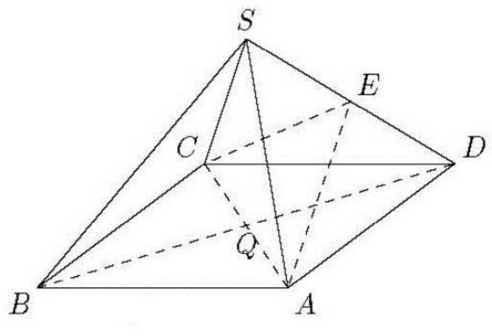


Рис. 1

Радиус вписанной в ΔAEC окружности равен отношению площади этого треугольника к его полупериметру: $r=\frac{12\cdot 9}{12+15}=4$. Значит, возможные значения радиусов окружностей, вписанных в треугольные сечения: $0<r<4$. Отметим, что само значение

$r = 4$ здесь исключено, так как сечение AEC проходит через AC, а не параллельно AC, как требуется по условию. (*См. примечание в конце решения*).

2). Рассмотрим теперь серию указанных сечений, пересекающих ребра AB и BC (см. рис. 2). Все эти сечения – пятиугольники. Пусть сечение проходит через точку T, лежащую на BQ, и $BT = x$ $(0 < x < 12)$. Тогда $FR \parallel GH \parallel SB$ и, так как $AC \perp SB$, то $FR \perp GF$.

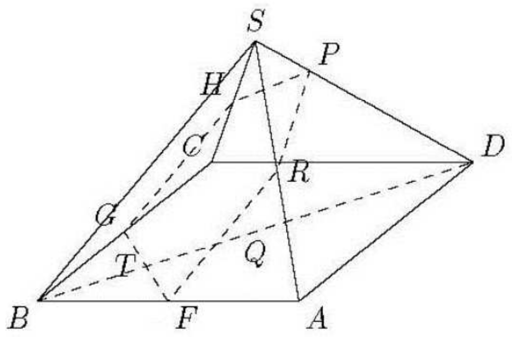


Рис. 2

Таким образом, каждый такой пятиугольник $GFRPH$ представляет собой прямоугольник $GFRH$ с равнобедренной треугольной «крышкой» RPH (рис. 3).

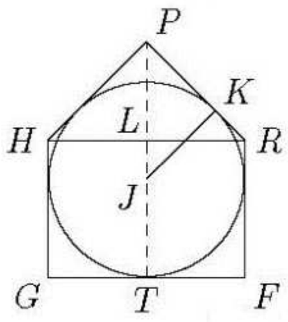


Рис. 3

Из ΔABS: $\dfrac{FR}{BS} = \dfrac{AF}{AB}$, $\dfrac{FR}{18} = \dfrac{(12-x)\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = 1 - \dfrac{x}{12} \Rightarrow FR = 18 - \dfrac{3x}{2}$.

Из подобия ΔSBD и ΔPTD: $\dfrac{TP}{SB} = \dfrac{TD}{BD}$, $\dfrac{TP}{18} = \dfrac{24-x}{24} \Rightarrow TP = 18 - \dfrac{3x}{4}$.

Поэтому $LP = \dfrac{3x}{4}$ и, так как $HR = GF = 2x$, то $PR = \dfrac{5x}{4}$ и $\sin\angle LPR = \dfrac{4}{5}$.

Из ΔPKJ : $\sin\angle LPR = \dfrac{JK}{JP} = \dfrac{x}{18-\dfrac{3x}{4}-x} = \dfrac{4x}{72-7x} = \dfrac{4}{5}$, откуда $x=6$ и $r=6$.

Таким образом, $r \in (0;4) \cup 6$, и сумма целых значений: $1+2+3+6=12$.

Замечание. Отметим, что в ряде книг параллельность прямой и плоскости трактуется не так, как в основных школьных учебниках. В частности, плоскость AEC в соответствии с этой трактовкой тоже является параллельной прямой AC. Поэтому было принято решение засчитывать как правильные также те ответы, в которые был включён и радиус $r=4$. Таким образом, в данной задаче засчитывался как ответ 12, так и ответ 16.

::8.2:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a=6\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\dfrac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной AC и SB , причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 4 (или 6).

::8.3:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a=18\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\dfrac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной SA и BD, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 24 (или 30).

::8.4:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a=24\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\dfrac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной SC и BD, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 40 (или 48).

::8.5:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a = 6\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной SC и BD, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 4 (или 6).

::8.6:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a = 12\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной SA и BD, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 12 (или 16).

::8.7:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a = 18\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной AC и SD, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 24 (или 30).

::8.8:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a = 24\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной AC и SB , причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 40 (или 48).

::9.1:: Найдите максимальное число, принадлежащее множеству значений функции $f(x) = 14115\sin^2 x + 10\cos^2 x + 24180\sin 2x - 6048\cos x - 8064\sin x + 8050$.

Ответ: 50380. **Решение.** Если сделать замену $t = 3\cos x + 4\sin x \in [-5; 5]$ и учесть, что $t^2 = 7\sin^2 x + 12\sin 2x + 9$, то задача сводится к исследованию множества значений функции $g(t) = 2015 \cdot t^2 - 2016 \cdot t - 5 \cdot 2015$ при $t \in [-5; 5]$. Минимум функции $g(t)$ достигается в точке $t_0 = \dfrac{1008}{2015} \in [-5;5]$, а максимум – в точке $t = -5$. Значит, $f_{\max} = g(-5) = 50380$.

::9.2:: Найдите максимальное число, принадлежащее множеству значений функции $f(x) = 14125\sin^2 x + 20\cos^2 x + 24180\sin 2x - 6048\cos x - 8064\sin x + 6025$.

Ответ: 48365.

::9.3:: Найдите максимальное число, принадлежащее множеству значений функции $f(x) = 14135\sin^2 x + 30\cos^2 x + 24180\sin 2x - 6048\cos x - 8064\sin x + 4000$.

Ответ: 46350.

::9.4:: Найдите минимальное число, принадлежащее множеству значений функции $f(x) = 14100\cos^2 x - 5\sin^2 x - 24180\sin 2x + 6048\cos x + 8064\sin x - 16115$.

Ответ: -44335.

::9.5:: Найдите минимальное число, принадлежащее множеству значений функции $f(x) = 14095\cos^2 x - 10\sin^2 x - 24180\sin 2x + 6048\cos x + 8064\sin x - 14095$.

Ответ: -42320.

::9.6:: Найдите минимальное число, принадлежащее множеству значений функции $f(x) = 14090\cos^2 x - 15\sin^2 x - 24180\sin 2x + 6048\cos x + 8064\sin x - 12075$.

Ответ: -40305.

::10.1:: Найдите все значения *y*, при каждом из которых ровно два целых значения *x* удовлетворяют неравенству $\sqrt{y^2 - x^4} > x - y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений *y*.

Ответ: -104. **Решение.** Неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y > x, \\ |y| \ge x^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y \le x, \\ 2xy > x^4 + x^2. \end{cases}$$

Первая из них равносильна совокупности $\begin{cases} y > x, \\ y \ge x^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} y > x, \\ y \le -x^2. \end{cases}$

Введём функцию $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^3 + x\right)$, тогда вторая система приводит к совокупности:

$\begin{cases} y \le x, \\ x > 0, \\ y > f(x) \end{cases}$ или $\begin{cases} y \le x, \\ x < 0, \\ y < f(x). \end{cases}$ При этом функция $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^3 + x\right)$ нечётная, возрастает на всей числовой прямой и $x^2 < f(x) < x$ при $x \in (0;1)$; $f(x) > x^2$ при $x > 1$.

Все эти совокупности для наглядности можно изобразить на плоскости Oxy. При этом получается, что при $y > 1$ неравенство имеет, по крайней мере, 3 целочисленных решения: $x = -1; 0; 1$; при $y = 1$ – целочисленных решений ровно два: $x = -1; 0$; при $y \in (0;1)$ – целочисленное решение ровно одно: $x = 0$; при $y \in [-1;0]$ – целых решений нет. При $y < -1$ – целочисленные решения с ростом $|y|$ появляются «по очереди»: $x = -1$, $x = -2$, … Подставляя эти значения в исходное неравенство, получим, что $x = -1$ является корнем при $y < -1$, $x = -2$ – при $y < -5$, $x = -3$ – при $y < -15$. Таким образом, ровно два целочисленных решения будет при $y \in [-15; -5) \cup \{1\}$. Искомая сумма равна $-15 - 14 - 13 - \ldots - 7 - 6 + 1 = -104$.

::10.2:: Найдите все значения *y*, при каждом из которых ровно два целых значения *x* удовлетворяют неравенству $\sqrt{y^2 - x^6} > x - y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений *y*.

Ответ: -7472.

::10.3:: Найдите все значения *y*, при каждом из которых ровно одно целое значение *x* удовлетворяет неравенству $\sqrt{y^2 - x^6} > x + y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений *y*.

Ответ: 152.

::10.4:: Найдите все значения y, при каждом из которых ровно одно целое значение x удовлетворяет неравенству $\sqrt{y^2-4x^6}>2x+y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений y.

Ответ: 591.

::10.5:: Найдите все значения y, при каждом из которых ровно два целых значения x удовлетворяют неравенству $\sqrt{y^2-4x^4}>2x+y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений y.

Ответ: 408.

::10.6:: Найдите все значения y, при каждом из которых ровно одно целое значение x удовлетворяет неравенству $\sqrt{y^2-4x^4}>2x-y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений y.

Ответ: -51.

2) Отборочный этап 10-11 класс второй отборочный тур:

Задания для разминки

::1:: Решите уравнение $(1-x)x=(x+1)(3-x)$. В ответе запишите сумму всех его корней.

Ответ: -3.

::2:: В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 5, а длина проведённой к основанию высоты равна 3. Найдите длину основания.

Ответ: 8.

Основное задание

::1.1:: В слове ЛОМОНОСОВ замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наибольшее возможное число, кратное 90.

Ответ: 987858180. **Решение.** Для делимости на 90 необходимо и достаточно, чтобы число оканчивалось на ноль (В=0), а сумма всех цифр числа делилась на 9. Начинаем слева: Л=9, О=8, М=7, доходим до буквы Н. Если Н=6, то решений не оказывается. Если Н=5, то получаем ответ: 987858180.

::1.2:: В слове ЛОМОНОСОВ замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наибольшее возможное число, кратное 60.

Ответ: 987868380.

::1.3:: В слове ЛОМОНОСОВ замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наименьшее возможное девятизначное число, кратное 60.

Ответ: 123242520.

::1.4:: В слове ЛОМОНОСОВ замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наименьшее возможное девятизначное число, кратное 90.

Ответ: 123262920.

::2.1:: Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 0? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,63. **Решение.** На первых двух позициях цифра 0 встречается в 00–09, 10, 20 часов — всего 12 раз, при любом числе минут, а в течение каждого из 12 оставшихся часов на последних двух позициях цифра 0 встречается в 00–09, 10, 20,…, 50 минут — всего 15 раз. Поэтому среди всех (равновероятных) показаний часов цифра 0 встретится с вероятностью $\frac{12\cdot 60+15\cdot 12}{24\cdot 60}=\frac{5}{8}=0,625\approx 0,63$.

::2.2:: Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 1? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,63.

::2.3:: Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 2? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,44.

::2.4:: Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 3? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,34.

::2.5:: Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 4? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,31.

::2.6:: Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 5? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,31.

::3.1:: Решите неравенство $\sqrt{7+8\cos^2\left(\frac{\pi x}{18}\right)} > 4\sin^2\frac{\pi x}{18}$. В ответ впишите сумму всех целых решений, принадлежащих отрезку $[-18; 31]$.

Ответ: 136. **Решение.** Сделаем замену $t=\sin^2\frac{\pi x}{18}$. Тогда $\sqrt{7+8-8t} > 4t \Leftrightarrow$ $\begin{cases} t\in[0;1], \\ 15-8t>16t^2 \end{cases} \Leftrightarrow t\in\left[0;\frac{3}{4}\right)$. Поэтому $\sin\frac{\pi x}{18}\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi x}{18}\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in\mathrm{Z} \Leftrightarrow x\in(-6+18k; 6+18k)=[-5+18k; 5+18k]$, $k\in\mathrm{Z}$. Решения на отрезке $[-18;18]$ симметричны, и их сумма равна нулю. В ответ войдет сумма
$19+20+21+22+23+31=136$.

::3.2:: Решите неравенство $\sqrt{7+8\sin^2\left(\frac{\pi x}{18}\right)} > 4\cos^2\frac{\pi x}{18}$. В ответ впишите сумму всех целых решений, принадлежащих отрезку $[-18; 35]$.

Ответ: 297.

::3.3:: Решите неравенство $\sqrt{7+8\sin^2\left(\frac{\pi x}{12}\right)} > 4\cos^2\frac{\pi x}{12}$. В ответ впишите сумму всех целых решений, принадлежащих отрезку $[-12; 25]$.

Ответ: 126.

::3.4:: Решите неравенство $\sqrt{7+8\cos^2\left(\frac{\pi x}{12}\right)} > 4\sin^2\frac{\pi x}{12}$. В ответ впишите сумму всех целых решений, принадлежащих отрезку $[-12; 21]$.

Ответ: 63.

::4.1:: Первый член и знаменатель геометрической прогрессии одинаковы и равняются 2^{k-2015}. Найдите все целые значения *k*, при которых сумма первых нескольких членов этой прогрессии может равняться 2016. В ответе укажите сумму всех таких значений *k*. Если таких значений *k* нет, то в ответе укажите 0.

Ответ: 2015. **Решение.** Обозначим $k-2015=p$. При положительных p рассмотрим уравнение $\frac{2^p\left(2^{pn}-1\right)}{2^p-1}=2016=2^5\cdot 63$. При $p\in[1;4]$ получим $2^{pn}-1=2^{5-p}\cdot 63\cdot\left(2^p-1\right)$ – левая часть уравнения нечетная, правая – четная. При $p=5$ получаем $2^{5n}=63\cdot 31+1=1954$ – целых решений нет. При $p\geq 6$ получим $2^{p-5}\left(2^{pn}-1\right)=63\cdot\left(2^p-1\right)$ – левая часть уравнения четная, правая – нечетная.

При $p\leq -1$ сумма прогрессии не превышает $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots<1$. И только при $p=0$ (то есть при $k=2015$) все члены прогрессии равны 1, и сумма первых 2016 членов равна 2016.

::4.2:: Первый член и знаменатель геометрической прогрессии одинаковы и равняются 2^{k-2014}. Найдите все целые значения *k*, при которых сумма первых нескольких членов этой прогрессии может равняться 2016. В ответе укажите сумму всех таких значений *k*. Если таких значений *k* нет, то в ответе укажите 0.

Ответ: 2014.

::4.3:: Первый член и знаменатель геометрической прогрессии одинаковы и равняются 2^{k-2016}. Найдите все целые значения *k*, при которых сумма первых нескольких членов этой прогрессии может равняться 2016. В ответе укажите сумму всех таких значений *k*. Если таких значений *k* нет, то в ответе укажите 0.

Ответ: 2016.

::4.4:: Первый член и знаменатель геометрической прогрессии одинаковы и равняются 2^{k-2017}. Найдите все целые значения *k*, при которых сумма первых нескольких членов этой прогрессии может равняться 2016. В ответе укажите сумму всех таких значений *k*. Если таких значений *k* нет, то в ответе укажите 0.

Ответ: 2017.

::5.1:: Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x;\ y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $13x+48=13y+3xy$.

Ответ: 48. **Решение.** $13x+48=13y+3xy \Leftrightarrow x(13-3y)=13y-48 \Leftrightarrow$ $x=-\dfrac{13y-48}{3y-13}=-\dfrac{13}{3}-\dfrac{25}{3(3y-13)}$, поэтому $3x=-13-\dfrac{25}{3y-13}$. Значит, $(3y-13)$ должно быть делителем числа 25. Составим таблицу:

$3y-13$	1	5	25	-1	-5	-25
$3y$	14	18	38	12	8	-12
y	-	6	-	4	-	-4
$3x$	-	-18	-	12	-	-12
x	-	-6	-	4	-	-4

Таким образом, решения уравнения: $(-4;-4)$; $(-6;6)$; $(4;4)$. Обозначим вершины получившегося треугольника: A $(-4;-4)$; B $(-6;6)$; C $(4;4)$. Так как точки A и C лежат на биссектрисе первого и третьего координатного углов, а точка B – на биссектрисе второго координатного угла, то $BO \perp AC$. Очевидно, что $AO = OC$. Поэтому ΔABC – равнобедренный, и его площадь равна $\frac{AC \cdot BO}{2} = 4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 48$.

::5.2:: Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x;\ y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $13y + 48 = 13x + 3xy$.

Ответ: 48.

::5.3:: Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x;\ y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $25y + 72 = 25x + 8xy$.

Ответ: 24.

::5.4:: Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x;\ y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $25x + 72 = 25y + 8xy$.

Ответ: 24.

::5.5:: Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x;\ y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $17x + 45 = 17y + 5xy$.

Ответ: 30.

::5.6:: Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x;\ y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $17y + 45 = 17x + 5xy$.

Ответ: 30.

::6.1:: Даны 2015 уравнений: $x_1 + x_2 = -1007$, $x_2 + x_3 = -1006$, …, $x_{1007} + x_{1008} = -1$, $x_{1008} + x_{1009} = 0$, $x_{1009} + x_{1010} = 1$, $x_{1010} + x_{1011} = 2$, …, $x_{2014} + x_{2015} = 1006$, $x_{2015} + x_1 = 1007$.

Найдите x_{2014}.

Ответ: -1. **Решение.** Сложив все уравнения, получим $2\left(x_1+x_2+\ldots+x_{2014}+x_{2015}\right)=0$, откуда $x_1+x_2+\ldots+x_{2014}+x_{2015}=0$.

Сложив 1-ое, 3-е, 5-ое, …, 2013-ое уравнения, получим $x_1+x_2+\ldots+x_{2014}$ $=-1007-1005-\ldots+1003+1005=-1007$. Следовательно, $x_{2015}=1007$. Тогда из уравнения $x_{2014}+x_{2015}=1006$ находим, что $x_{2014}=-1$.

::6.2:: Даны 2017 уравнений: $x_1+x_2=-2016$, $x_2+x_3=-2014$, …, $x_{1008}+x_{1009}=-2$, $x_{1009}+x_{1010}=0$, $x_{1010}+x_{1011}=2$, $x_{1011}+x_{1012}=4$, …, $x_{2016}+x_{2017}=2014$, $x_{2017}+x_1=2016$.

Найдите x_{2017}.

Ответ: 2016.

::6.3:: Даны 2015 уравнений: $x_1+x_2=-1007$, $x_2+x_3=-1006$, …, $x_{1007}+x_{1008}=-1$, $x_{1008}+x_{1009}=0$, $x_{1009}+x_{1010}=1$, $x_{1010}+x_{1011}=2$, …, $x_{2014}+x_{2015}=1006$, $x_{2015}+x_1=1007$.

Найдите x_{2015}.

Ответ: 1007.

::6.4:: Даны 2017 уравнений: $x_1+x_2=-2016$, $x_2+x_3=-2014$, …, $x_{1008}+x_{1009}=-2$, $x_{1009}+x_{1010}=0$, $x_{1010}+x_{1011}=2$, $x_{1011}+x_{1012}=4$, …, $x_{2016}+x_{2017}=2014$, $x_{2017}+x_1=2016$.

Найдите x_{2016}.

Ответ: -2.

::6.5:: Даны 2015 уравнений: $x_1+x_2=-1007$, $x_2+x_3=-1006$, …, $x_{1007}+x_{1008}=-1$, $x_{1008}+x_{1009}=0$, $x_{1009}+x_{1010}=1$, $x_{1010}+x_{1011}=2$, …, $x_{2014}+x_{2015}=1006$, $x_{2015}+x_1=1007$.

Найдите x_2.

Ответ: -1007.

::6.6:: Даны 2017 уравнений: $x_1 + x_2 = -2016$, $x_2 + x_3 = -2014$, …, $x_{1008} + x_{1009} = -2$, $x_{1009} + x_{1010} = 0$, $x_{1010} + x_{1011} = 2$, $x_{1011} + x_{1012} = 4$, …, $x_{2016} + x_{2017} = 2014$, $x_{2017} + x_1 = 2016$.

Найдите x_2.

Ответ: -2016.

::7.1:: На каждой из двух параллельных прямых, расстояние между которыми равно 2 см, отмечено по 10 точек с интервалом между соседними точками по 1 см. Из этих 20 точек нужно выбрать 9 так, чтобы каждые две из них отстояли друг от друга не менее чем на 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 420. **Решение.** Пусть $N = 10$ – количество отмеченных точек на одной прямой. В силу требования задачи на одной прямой нельзя выбрать более чем *n* точек, где $n = N/2$, если *N* четно, и $n = (N+1)/2$, если *N* нечетно (в данном варианте $n = 5$). Так как всего выбирается 9 точек, то на одной прямой будет 5 точек, а на другой – 4.

Выясним, сколькими способами можно выбрать *k* точек из отмеченных *N* на одной прямой. Описанный способ выбора, по сути, означает разбиение отрезка длины $N-1$ на $k+1$ отрезков целочисленной длины, среди которых $k-1$ средних должны быть не короче 2 см. Иными словами, надо найти количество решений уравнения $x_1 + x_2 \ldots + x_k + x_{k+1} = N-1$ в целых числах, причем $x_1, x_{k+1} \geq 0$ $x_2, ..., x_k \geq 2$.

Положим $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2 - 1$, …, $y_k = x_k - 1$, $y_{k+1} = x_{k+1} + 1$. Тогда задача сводится к нахождению количества решений уравнения $y_1 + y_2 \ldots + y_k + y_{k+1} = N - k + 1$ в натуральных числах. Эта задача равносильна, например, выставлению *k* перегородок между $N-k+1$ лежащими на одной прямой шарами – число решений равно C_{N-k+1}^{k}.

В задаче этого варианта число решений равно $2C_7^4 \cdot C_6^5 = 2 \cdot 35 \cdot 6 = 420$.

::7.2:: На каждой из двух параллельных прямых, расстояние между которыми равно 2 см, отмечено по 12 точек с интервалом между соседними точками по 1 см. Из этих 24 точек нужно выбрать 11 так, чтобы каждые две из них отстояли друг от друга не менее чем на 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 784.

::7.3:: На каждой из двух параллельных прямых, расстояние между которыми равно 2 см, отмечено по 9 точек с интервалом между соседними точками по 1 см. Из этих 18 точек нужно выбрать 8 так, чтобы каждые две из них отстояли друг от друга не менее чем на 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 295.

::7.4:: На каждой из двух параллельных прямых, расстояние между которыми равно 2 см, отмечено по 11 точек с интервалом между соседними точками по 1 см. Из этих 22 точек нужно выбрать 10 так, чтобы каждые две из них отстояли друг от друга не менее чем на 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 581.

::8.1:: В треугольник ABC площади 25 вписана окружность с центром O, касающаяся сторон AB, BC и AC в точках L, M и N соответственно. При этом $AN : NC = 3 : 7$. Найдите площадь треугольника AND, где D – точка пересечения прямых AO и NM. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,75. **Решение.** 1) Пусть EF – средняя линия треугольника ABC (E лежит на AB, F – на BC). Пусть P – точка пересечения NM и этой средней линии. Обозначим $CM = CN = x$, $AL = AN = y$, $BL = BM = z$. Тогда $FP = FM$ (из подобия треугольников MFP и MCN) $= \dfrac{z+x}{2} - z = \dfrac{x-z}{2}$. Значит, $EP = EF - FP = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-z}{2} = \dfrac{y+z}{2} = \dfrac{AB}{2}$.

2) Поэтому $\angle EPA = \angle EAP$ (углы в равнобедренном треугольнике EAP); $\angle EPA = \angle PAN$ (параллельность EP и AC). Значит, AP – биссектриса, т. е. AO и NM пересекаются в точке P, лежащей на средней линии.

3) Таким образом, высота треугольника AND равна половине высоты треугольника ABC. Значит, его площадь относится к площади ABC как $\dfrac{3}{3+7} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{20}$.

::8.2:: В треугольник ABC площади 24 вписана окружность с центром O, касающаяся сторон AB, BC и AC в точках L, M и N соответственно. При этом $AN : NC = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника AND, где D – точка пересечения прямых AO и NM. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 3.

::8.3:: В треугольник ABC вписана окружность с центром O, касающаяся сторон AB, BC и AC в точках L, M и N соответственно. Прямые AO и NM пересекаются в точке D. При этом $AN : NC = 1 : 2$, а площадь треугольника AND равна 2. Найдите площадь треугольника ABC. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 12.

::8.4:: В треугольник ABC вписана окружность с центром O, касающаяся сторон AB, BC и AC в точках L, M и N соответственно. Прямые AO и NM пересекаются в точке D. При этом $AN : NC = 1 : 3$, а площадь треугольника AND равна 3. Найдите площадь треугольника ABC. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 24.

::8.5:: В треугольник ABC вписана окружность с центром O, касающаяся сторон AB, BC и AC в точках L, M и N соответственно. Прямые AO и NM пересекаются в точке D. При этом $AN : NC = 2 : 3$, а площадь треугольника AND равна 4. Найдите площадь треугольника ABC. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 20.

::9.1:: Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственное число, одновременно удовлетворяющее неравенствам $(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0$ и $ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0$. Выберите среди этих значений a наибольшее и наименьшее и в ответе укажите расстояние между ними (если такое значение единственно, в ответе укажите 0), при необходимости округлив его до сотых.

Ответ: 2,08. **Решение.** Множество решений каждого из этих двух неравенств может представлять собой отрезок, объединение двух замкнутых непересекающихся лучей, замкнутый луч, прямую, точку или пустое множество. Значит, по условию задачи возможны две ситуации.

1) Решение одного из неравенств единственное, и оно удовлетворяет второму неравенству. Здесь, в свою очередь, возможны два случая:

а) $a^2-(a-1)(a+4)=0 \iff a=\dfrac{4}{3}$. Тогда $x=-4$. При этом значении a второе неравенство имеет решения (два непересекающихся луча), и $x=-4$ входит в это решение;

б) $(a+1)^2 - a(a+1) = 0 \iff a = -1$. Тогда $x = 0$, но первое неравенство не выполнено.

2) Множества решений обоих неравенств имеют общую граничную точку, то есть система $\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4=0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1=0\end{cases}$ имеет решения. Вычитая почленно из второго уравнения первое, получаем $x^2+2x-3=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-3. \end{array}\right.$

Если $x=-3$, то $9a-2(a+1)3+a+1=0$, то есть $a=\dfrac{5}{4}$. При этом значении a решения системы $-7 \le x \le -3$.

Если $x=1$, то $a+2(a+1)+a+1=0$, то есть $a=-\dfrac{3}{4}$. При этом значении a система имеет единственное решение $x=1$.

3) Можно еще отдельно проверить $a=0$ и $a=1$, они условию не удовлетворяют.

Окончательно получаем: $a=-\dfrac{3}{4}$ и $a=\dfrac{4}{3}$. Искомая величина: $\dfrac{4}{3}-\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{25}{12}\approx 2,08$

.

::9.2:: Найдите все значения *a*, при каждом из которых существует единственное число, одновременно удовлетворяющее неравенствам $(a-2)x^2+2ax+a+8\le 0$ и $ax^2+2(a+2)x+a+2\ge 0$. Выберите среди этих значений *a* наибольшее и наименьшее и в ответе укажите расстояние между ними (если такое значение единственно, в ответе укажите 0), при необходимости округлив его до сотых.

Ответ: 4,17.

::9.3:: Найдите все значения *a*, при каждом из которых существует единственное число, одновременно удовлетворяющее неравенствам $(a+2)x^2+2ax+a-8\ge 0$ и $ax^2+2(a-2)x+a-2\le 0$. Выберите среди этих значений *a* наибольшее и наименьшее и в ответе укажите расстояние между ними (если такое значение единственно, в ответе укажите 0), при необходимости округлив его до сотых.

Ответ: 4,17.

::9.4:: Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственное число, одновременно удовлетворяющее неравенствам $(2a-1)x^2+4ax+2a+4\le 0$ и $2ax^2+2(2a+1)x+2a+1\ge 0$. Выберите среди этих значений a наибольшее и наименьшее и в ответе укажите расстояние между ними (если такое значение единственно, в ответе укажите 0), при необходимости округлив его до сотых.

Ответ: 1,04.

::10.1:: В усеченной треугольной пирамиде $A_1B_1C_1ABC$ ребро AA_1 перпендикулярно плоскости большего основания ABC, $AB=AC=5$, $BC=6$ и $DD_1=\dfrac{20}{7}$, где D и D_1 – середины отрезков BC и B_1C_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 1,21. **Решение.** Продлим ребра усечённой пирамиды до пирамиды $SABC$ (см. рис. 1).

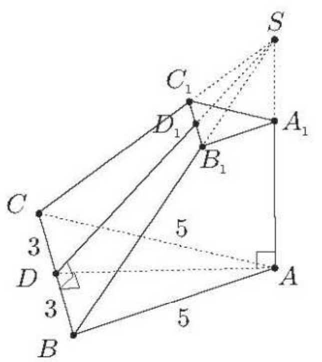


Рис. 1

Обозначим $h = SA$. Тогда шар, вписанный в усечённую пирамиду, также вписан и в пирамиду $SABC$. Поэтому $V = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} r \cdot S_{полн.пов.}$. (1)

Поскольку $S_{\Delta ABC} = 12$, то $S_{полн.\ пов.} = S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SAC} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta ABC} = 5h + 3 \cdot \sqrt{4^2 + h^2} + 12$.

Значит, равенство (1) равносильно $12h = r \cdot \left(5h + 3 \cdot \sqrt{4^2 + h^2} + 12\right)$. (2)

Из точки D_1 опустим перпендикуляр D_1E на плоскость основания ABC (рис. 2).

Обозначим $\alpha = \angle D_1DA$. Из ΔSDA следует, что $\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4^2}}$. Тогда из ΔD_1ED находим $D_1E = 2r = \frac{20}{7}\sin\alpha = \frac{20h}{7\sqrt{h^2 + 4^2}}$.

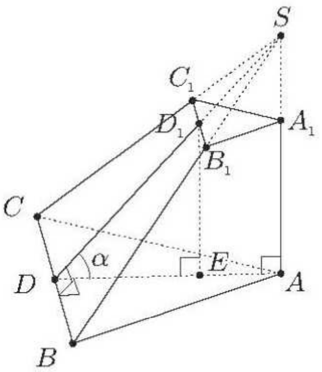


Рис. 2

Подставляя в (2) значение для r, получаем: $12h = \frac{10h}{7\sqrt{h^2 + 4^2}} \cdot \left(5h + 3 \cdot \sqrt{4^2 + h^2} + 12\right)$

$\Leftrightarrow\ 6 = \frac{5}{7\sqrt{h^2 + 4^2}} \cdot \left(5h + 3 \cdot \sqrt{4^2 + h^2} + 12\right) \Leftrightarrow\ 42\sqrt{h^2 + 4^2} = 25h + 15 \cdot \sqrt{4^2 + h^2} + 60 \Leftrightarrow$

$27\sqrt{h^2 + 4^2} = 25h + 60 \Leftrightarrow\ 104h^2 - 3000h + 8064 = 0 \Leftrightarrow\ h = 3$ или $h = \frac{336}{13}$.

Используя равенство $r = \frac{10h}{7\sqrt{h^2 + 4^2}}$, находим: $r_1 = 6/7$ или $r_2 = 24/17$.

Искомое произведение равно $r_1 \cdot r_2 = \dfrac{144}{119} \approx 1,21$.

::10.2:: В усеченной треугольной пирамиде $A_1B_1C_1ABC$ ребро AA_1 перпендикулярно плоскости большего основания ABC, $AB = AC = 10$, $BC = 12$ и $DD_1 = \dfrac{40}{7}$, где D и D_1 – середины отрезков BC и B_1C_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 4,84.

::10.3:: В усеченной треугольной пирамиде $K_1L_1M_1KLM$ ребро KK_1 перпендикулярно плоскости большего основания KLM, $KL = KM = 15$, $LM = 18$ и $PP_1 = \dfrac{60}{7}$, где P и P_1 – середины отрезков LM и L_1M_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 10,89.

::10.4:: В усеченной треугольной пирамиде $A_1B_1C_1ABC$ ребро AA_1 перпендикулярно плоскости большего основания ABC, $AB = AC = 35$, $BC = 42$ и $DD_1 = 20$, где D и D_1 – середины отрезков BC и B_1C_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 59,29.

::10.5:: В усеченной треугольной пирамиде $K_1L_1M_1KLM$ ребро KK_1 перпендикулярно плоскости большего основания KLM, $KL = KM = 25$, $LM = 30$ и $PP_1 = \dfrac{100}{7}$, где P и P_1 – середины отрезков LM и L_1M_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 30,25.

::10.6:: В усеченной треугольной пирамиде $A_1B_1C_1ABC$ ребро AA_1 перпендикулярно плоскости большего основания ABC, $AB = AC = 70$, $BC = 84$ и $DD_1 = 40$, где D и D_1 – середины отрезков BC и B_1C_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 237,18.

3) Отборочный этап младшие классы:

9 класс

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

Отборочный этап 2015/2016 учебного года

Ответы и решения

9 Класс

1. В слове «ЛОМОНОСОВ» замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными, так, чтобы при этом получилось наибольшее возможное число, кратное 90.

   Ответ: 987858180.

2. Число $\underbrace{99\ldots9}_{999\text{ цифр}}$ разложили на простые сомножители. Найдите количество сомножителей, равных 3, в этом разложении.

   Ответ: 3^5.

   Решение: Обозначим $I(n) = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}$. Легко показать, что если $I(n)$ кратно 3^k, то $I(3n)$ кратно 3^{k+1}. Тогда $I(111)\vdots 3$, $I(333)\vdots 3^2$, $I(999)\vdots 3^3$. Число из условия задачи равно $9I(999)$, поэтому оно кратно 3^5.

3. Пусть $P(n) = n(n+1)(2n+1)(3n+1)(4n+1)$. Найдите наибольший общий делитель чисел $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(2015)$.

   Ответ: 30.

   Решение: $P(1) = 5! = 120$, следовательно НОД должен быть делителем 120. Заметим, что $P(2)$ кратно 2, но не кратно 4, поэтому в НОД не может входить больше одной двойки. Следовательно, НОД — делитель 30.

   Покажем, что все $P(n)$ делится на 30. Действительно, $n(n+1)$ всегда кратно 2. Если n не кратно 3, то числа $n+1$, $2n+1$ и $3n+1$ дают различные остатки при делении на 3, следовательно, какое-то делится нацело на 3. Аналогично, либо n кратно 5, либо одно из чисел $n+1$, $2n+1$, $3n+1$, $4n+1$ делится на 5.

4. В одном интернет-сообществе каждый из участников имеет ровно 22 друга (дружба обоюдная). При этом если два члена сети дружат, то у них нет общих друзей, а если не дружат, то у них ровно 6 общих друзей. Сколько человек в этом интернет-сообществе?

   Ответ: 100.

   Решение: Пусть в сообществе N людей. Подсчитаем число упорядоченных троек a—b—c, в которых b дружит с a и с c. Зафиксируем b (это можно сделать N способами). Тогда для него получится $22 \cdot 21 = 462$ таких троек. Итого получается $462N$. С другой стороны можно сначала выбрать a — N способов, потом c — $N - 23$ способа (надо вычесть его друзей и его самого). Тогда b можно выбрать 6 способами, итого $6N(N-23)$.

   Получим уравнение $462N = 6N(N-23)$, откуда $N = 100$.

5. Сколькими различными способами можно разменять 1000 рублей, используя только рублевые, 5-рублевые и 10-рублевые монеты?

Ответ: 10201.

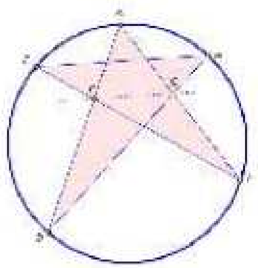
Решение: Задача сводится к нахождению числа решений неравенства $10x + 5y \leqslant 1000$ в неотрицательных целых числах $x, y \geqslant 0$. Преобразовав к виду $y \leqslant 200 - 2x$, получим, что при $x = 0$ решений 201, при $x = 1$ решений 199,... , при $x = 100$ — решение единственно. Всего получится $1 + 3 + ... + 201 = (1 + 201) * 101/2 = 101^2 = 10201$.

6. Числа x, y и z таковы, что $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$ и $x \cdot y \cdot z \neq 0$. Какие значения может принимать выражение $\frac{(x+y+z)^3}{xyz}$?

Ответ: 27.

Решение: Несложно показать, что при $a + b + c = 0$ выполнено равенство $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Подставим $a = \sqrt[3]{x}, b = \sqrt[3]{y}, c = \sqrt[3]{z}$, и возводя в куб, получим $\frac{(x+y+z)^3}{xyz} = 27$.

7. В окружность вписана пятиконечная звезда $ABCDE$ так, как показано на рисунке. При этом дуги AB и AE имеют одинаковую градусную меру. Пусть, F — точка пересечения AD и CE, а G — точка пересечения AC и BD. Найдите угол между прямыми BE и FG.



Решение: Обозначим L и M — точки пересечения EB с AD и AC, соответственно. Тогда $\triangle CAF \propto \triangle DAG$, т.к. у них общий угол A и равны углы, опирающиеся на равные дуги. Следовательно, $AF : AC = AG : AD$, поэтому и $\triangle AFG \propto \triangle ACD$.

С другой стороны $\angle ACD$ равен половине дуги AD, т.е. равен полусумме дуг AB и ED, следовательно равен углу между хордами AD и BE.

В итоге получим $\angle ALB = \angle ACD = \angle AFG$, откуда и вытекает $BE \parallel FG$.

8. Даны две параллельные прямые, расстояние между которыми равно 2 см, на каждой отмечено по 10 точек, идущих через 1 см. Нужно из этих 20 точек выбрать 9 таких точек, чтобы расстояние между любыми двумя из них было не менее 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

   Ответ: 420.

   Решение: Очевидно, что нельзя выбрать более 5 точек на одной прямой. Значит на одной прямой будет 5 точек, а на другой — 4. Выбрать 4 точки на прямой означает разбить отрезок длины 9 на 5 отрезков, причем средние по условию должны быть не менее 2. Т.е. надо найти количество решений уравнения $x_1 + \ldots + x_5 = 9$ в неотрицательных целых числах, причем $x_2, x_4, x_5 \geqslant 2$. Обозначим $y_1 = x_1+1, y_5 = x_5+1$, $y_2 = x_2-1$, $y_3 = x_3-1$, $y_4 = x_4-1$. Тогда задача сводится к количеству решений уравнения $y_1 + \ldots + y_5 = 8$ в натуральных числах. Это — известная задача о шарах и перегородках, число решений равно $C_7^4 = 35$. Аналогично можно показать, что для 5 точек число вариантов равно $C_6^5 = 6$. В итоге число вариантов $2C_7^4 \cdot C_6^5 = 420$.

9. При каких натуральных n существуют положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3; \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 3. \end{cases}$$

   Укажите эти числа.

   Ответ: Ответ: $n = 2$, $x_1 = (3 \pm \sqrt{5})/2$, $x_2 = 3 - x_1$; или $n = 3$, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

   Решение: Основная идея: $x + 1/x \geq 2$, следовательно, сложим два равенства, получим $n \leq 3$. Далее надо отдельно рассмотреть случаи $n = 2$ и $n = 3$ (при $n = 1$, очевидно, решений нет).

7-8 класс

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

Отборочный этап 2015/2016 учебного года

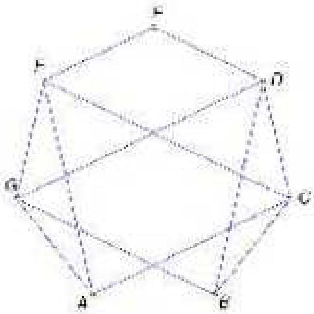
Ответы и решения

7-8 Классы

1. В слове «ЛОМОНОСОВ» замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными, так, чтобы при этом получилось наибольшее возможное число, кратное 90.

   Ответ: 987858180.

2. В правильном 7-угольнике провели диагонали AC, AF, BD, BG, CF, DF и DG как показано на рисунке. а) Раскрасьте вершины 7-угольника в красный, синий и зеленый цвета, так, чтобы любые две вершины, соединенные отрезком, были раскрашены в разные цвета. б) Найдите количество вариантов такой раскраски.



   Ответ: 6.

   Решение: Точки A, C и F красим в три различных цвета, тогда цвета всех других точек определяются однозначно.

3. В последовательности, которая начинается с чисел 2013, 2014, 2015, сумма любых семи последовательных членов составляет 2016. Какое число стоит на 2017 месте?

   Ответ: 2013.

   Решение: Несложно заметить, что последовательность будет периодичной с периодом 7.

4. Круг разбили на 4 равных сектора по 90°. Сколькими способами можно его раскрасить, если есть 7 цветов и каждый сектор можно красить в любой цвет? Раскраски, которые совпадают при повороте круга, считать одинаковыми.

   Ответ: 616.

   Решение: Есть 7 раскрасок в 1 цвет (которые мы считаем по одному разу), 7x6 $= 42$ «шахматные» раскраски в два цвета (которые мы считаем по два раза). Если их отбросить, то останутся $7^4 - 7 - 42 = 2352$ раскраски, которые мы посчитали по 4 раза. Значит всего $2352/4 + 42/2 + 7 = 616$ различных раскрасок.

5. Длины всех сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, при этом длина одного из катетов выражается простым числом, большим 3. Какие остатки при делении на 12 может давать число, выражающее длину другого катета?

   Ответ: 0.

   Решение: Один из катетов должен быть кратен трем и один четырем, а простое число — не кратно.

6. Число $\underbrace{99\ldots9}_{999\text{ цифр}}$ разложили на простые сомножители. Найдите количество сомножителей, равных 3, в этом разложении.

   Ответ: 3^5.

   Решение: Обозначим $I(n) = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}$. Легко показать, что если $I(n)$ кратно 3^k, то $I(3n)$ кратно 3^{k+1}. Тогда $I(111) \vdots 3$, $I(333) \vdots 3^2$, $I(999) \vdots 3^3$. Число из условия задачи равно $9I(999)$, поэтому оно кратно 3^5.

7. В одном интернет-сообществе каждый из участников имеет ровно 22 друга (дружба обоюдная). При этом если два члена сети дружат, то у них нет общих друзей, а если не дружат, то у них ровно 6 общих друзей. Сколько человек в этом интернет-сообществе?

   Ответ: 100.

   Решение: Пусть в сообществе N людей. Подсчитаем число упорядоченных троек $a - b - c$, в которых b дружит с a и с c. Зафиксируем b (это можно сделать N способами). Тогда для него получится $22 \cdot 21 = 462$ таких троек. Итого получается $462N$. С другой стороны можно сначала выбрать a — N способов, потом c — $N - 23$ способа (надо вычесть его друзей и его самого). Тогда b можно выбрать 6 способами, итого $6N(N - 23)$.

   Получим уравнение $462N = 6N(N - 23)$, откуда $N = 100$.

8. Сколькими различными способами можно разменять 1000 рублей, используя только рублевые, 5-рублевые и 10-рублевые монеты?

Ответ: 10201.

Решение: Задача сводится к нахождению числа решений неравенства $10x + 5y \leqslant 1000$ в неотрицательных целых числах $x, y \geqslant 0$. Преобразовав к виду $y \leqslant 200 - 2x$, получим, что при $x = 0$ решений 201, при $x = 1$ решений 199,... , при $x = 100$ — решение единственно. Всего получится $1 + 3 + ... + 201 = (1 + 201) * 101/2 = 101^2 = 10201$.

5-6 класс

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

Отборочный этап 2015/2016 учебного года

Ответы и решения

5-6 Классы

1. В слове «ЛОМОНОСОВ» замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными, так, чтобы при этом получилось наибольшее возможное число, кратное 90.

   Ответ: 987858180.

2. В тачку Максима Петровича помещается 9 деревянных брусков или 2 бетонных блока, или бетонный блок и 4 бруска, или полный кузов песка. Однажды он перевез за 10 ходок 30 брусков, 9 бетонных блоков и несколько тачек с песком. Сколько тачек с песком он перевез?

   Решение: Если он перевез m тачек первого типа и n — третьего, то $9m + 4n = 30$. Это может быть только при $m = 2, n = 3$. Т.е. он перевез еще 3 тачки второго типа. Остается 2 тачки с песком.

3. Петя и Вася живут в одном доме. Однажды Петя вышел из дома и пошел в школу, а Вася в тот же момент времени вышел из школы и пошел домой. Когда они встретились, Петя прошел 2/5 расстояния от дома до школы, а когда Вася пришел домой, Пете оставалось пройти 150 метров до школы. Найдите расстояние от дома до школы.

   Ответ: 450м.

   Решение: Скорости Пети и Васи относятся как 2:3, значит, когда Вася пришел домой, Петя прошел 2/3, следовательно, ему осталось пройти 1/3.

4. В правильном 7-угольнике провели диагонали AC, AF, BD, BG, CF, DF и DG как показано на рисунке. а) Раскрасьте вершины 7-угольника в красный, синий и зеленый цвета, так, чтобы любые две вершины, соединенные отрезком, были раскрашены в разные цвета. б) Найдите количество вариантов такой раскраски.

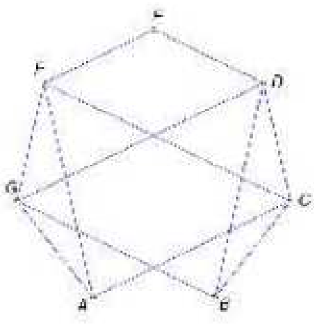
   Ответ: 6.

   Решение: Точки A, C и F красим в три различных цвета, тогда цвета всех других точек определяются однозначно.

5. В последовательности, которая начинается с чисел 2013, 2014, 2015, сумма любых семи последовательных членов составляет 2016. Какое число стоит на 2017 месте?

   Ответ: 2013.

   Решение: Несложно заметить, что последовательность будет периодичной с периодом 7.



6. Длины всех сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, при этом длина одного из катетов выражается простым числом, большим 3. Какие остатки при делении на 12 может давать число, выражающее длину другого катета?

Ответ: 0.

Решение: Один из катетов должен быть кратен трем и один четырем, а простое число — не кратно.

7. Число $\underbrace{99\ldots9}_{999\text{ цифр}}$ разложили на простые сомножители. Найдите количество сомножителей, равных 3, в этом разложении.

Ответ: 3^5.

Решение: Обозначим $I(n) = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}$. Легко показать, что если $I(n)$ кратно 3^k, то $I(3n)$ кратно 3^{k+1}. Тогда $I(111) \vdots 3$, $I(333) \vdots 3^2$, $I(999) \vdots 3^3$. Число из условия задачи равно $9I(999)$, поэтому оно кратно 3^5.

4) Заключительный этап 10-11 классы.

Олимпиада «Ломоносов – 2016».

Решения и ответы варианта 2016-1; ответы ко всем вариантам

1. Незнайка прыгал от своего дома к дому Знайки. Три четверти пути он пропрыгал прыжками, длина которых равна двум его обычным шагам, а остальную четверть пути – прыжками, длина которых равна трем его обычным шагам. Оказалось, что прыжков в два шага оказалось на 350 больше, чем прыжков в три шага. Сколько обычных шагов от дома Знайки до дома Незнайки? Считаем, что все шаги у Незнайки одинаковые.

Решение. Пусть искомое расстояние равно S шагов, тогда количество прыжков в два и три шага равно $\frac{3S}{4\cdot 2}$ и $\frac{S}{4\cdot 3}$ соответственно. Получаем соотношение $\frac{3S}{8}-\frac{S}{12}=350 \Leftrightarrow \frac{7S}{24}=350 \Leftrightarrow$ $S=1200$ (шагов).

Ответ варианта 1: 1200. **Ответ варианта 2:** 1800.

Ответ варианта 3: 2040. **Ответ варианта 4:** 900.

Критерии оценивания: *15 баллов* – верное решение и верный ответ; *10 баллов* – арифметическая ошибка при идейно верном решении.

2. Найдите все решения уравнения $\operatorname{arcctg}^2 x = 3\operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi^2}{36}$.

Решение. Положим $t = \operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2 = 3t^2 + \frac{\pi^2}{36} \Leftrightarrow 2t^2 + \pi t - \frac{2\pi^2}{9} = 0$ $\Leftrightarrow t_1 = -\frac{2\pi}{3},\ t_2 = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ варианта 1: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **Ответ варианта 2:** $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ варианта 3: $x = -1$. **Ответ варианта 4:** $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Критерии оценивания: *15 баллов* – верное решение и верный ответ; *10 баллов* – используется верное соотношение между тригонометрическими функциями, верно получено значение t, но неверно вычислена обратная тригонометрическая функция. Если дополнительно к верному получен посторонний корень, то за задачу выставляется оценка «0 баллов».

3. Том Сойер, Сид Сойер и Гек Финн красили забор. Вначале Том красил один в течение времени, за которое Сид и Гек, работая вместе, могли бы покрасить половину забора. Затем красил один Сид в течение времени, за которое Том и Гек, работая вместе, могли бы покрасить $5/4$ всего забора. Потом красил один Гек в течение времени, за которое Том и Сид, работая вместе, могли бы покрасить четверть всего забора. В результате весь забор был покрашен. Во сколько раз быстрее они окончили бы работу, если бы с самого начала все время работали вместе? (Предполагается, что скорость работы каждого мальчика постоянна.)

Решение. Обозначим через 1 всю работу по окраске забора, через x, y и z производительность Тома, Сида и Гека соответственно, а через t_1, t_2, t_3 – промежутки времени, в которые Том, Сид и Гек соответственно работали по одному. Тогда, по условию, $(y+z)t_1=\frac{1}{2}$, $(x+z)t_2=\frac{5}{4}$, $(x+y)t_3=\frac{1}{4}$, $xt_1+yt_2+zt_3=1$.

При этом найти нужно величину $(t_1+t_2+t_3):\frac{1}{x+y+z}=(x+y+z)(t_1+t_2+t_3)$. Раскрывая скобки, получим $xt_1+(y+z)t_1+yt_2+(x+z)t_2+zt_3+(x+y)t_3=1+\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=3$.

Ответ варианта 1: в 3 раза. **Ответ варианта 2:** в 4 раза.

Ответ варианта 3: в 2,5 раза. **Ответ варианта 4:** в 1,5 раза.

Критерии оценивания: *15 баллов* – верное решение и верный ответ; *10 баллов* – арифметическая ошибка при идейно правильном решении.

4. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3\cdot\overline{AA_1}+4\cdot\overline{BB_1}+5\cdot\overline{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2;1)$.

Решение. Поскольку $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=(0;0)$, то $\overline{BB_1}+2\cdot\overline{CC_1}=(2;1)$.

Так как $\overline{CB_1}=\overline{CO}+\overline{OB_1}$ (здесь O – точка пересечения медиан треугольника), то $\frac{1}{2}\cdot\overline{CA}=\frac{2}{3}\cdot\overline{CC_1}+\frac{1}{3}\cdot\overline{BB_1}=\frac{1}{3}\cdot(2;1)$. Значит, $\overline{CA}=\frac{2}{3}\cdot(2;1)$, и $\left|\overline{CA}\right|=\frac{2\sqrt{2^2+1^2}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Ответ варианта 1: $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **Ответ варианта 2:** $\frac{2\sqrt{13}}{3}$.

Ответ варианта 3: $\frac{2\sqrt{10}}{3}$. **Ответ варианта 4:** $\frac{2\sqrt{17}}{3}$.

Критерии оценивания: *15 баллов* – верное решение и верный ответ; *10 баллов* – арифметическая ошибка при идейно правильном решении.

5. Найдите все решения неравенства

$$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x-5)-\log_{\frac{\pi}{6}}(7-2x)\right)\left(\cos\left(x+\frac{7}{4}\right)-\cos(2x-1)\right)(|x-4|-|2x-5|)\ge 0.$$

Решение. Область определения входящих в неравенство функций: $x\in\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$. При этих значениях x, во-первых, модули раскрываются однозначно, во-вторых, входящие в неравенство косинусы – монотонно возрастающие функции, так как их аргументы находятся в интервале $(\pi;\,2\pi)$: $\pi<\frac{17}{4}=\frac{5}{2}+\frac{7}{4}<x+\frac{7}{4}<\frac{7}{2}+\frac{7}{4}=\frac{21}{4}<2\pi$, $\pi<4=5-1<2x-1<7-1=6<2\pi$.

Кроме того, $\log_{\frac{\pi}{6}}t$ монотонно убывает. Поэтому исходное неравенство на области определения равносильно: $(2x-5-7+2x)(-1)\left(x+\frac{7}{4}-2x+1\right)(4-x-2x+5)\ge 0 \Leftrightarrow (x-3)^2\left(x-\frac{11}{4}\right)\le 0$.

Ответ варианта 1: $\left(\frac{5}{2};\frac{11}{4}\right]\cup\{3\}$. **Ответ варианта 2:** $\left(\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]\cup\{2\}$.

Ответ варианта 3: $\left[-\frac{11}{4};-\frac{5}{2}\right)\cup\{-3\}$. **Ответ варианта 4:** $\left(\frac{7}{2};\frac{15}{4}\right]\cup\{4\}$.

Критерии оценивания: ***15 баллов*** – верное решение и верный ответ; ***10 баллов*** – идейно верное решение, но ответ отличается от правильного на одну точку.

6. Найдите произведение всех значений x, при каждом из которых $\left(\sqrt{4-\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$, $2^{x^2-9x+11}$, $\left(\sqrt{4+\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$ — арифметическая прогрессия.

Решение. Так как это арифметическая прогрессия, то получаем:
$\sqrt{4-\sqrt{11}}^{\,x^2-9x+11}+\sqrt{4+\sqrt{11}}^{\,x^2-9x+11}=2\cdot 2^{x^2-9x+11}$. Это уравнение, если обозначить $f(t)=t^{\frac{x^2-9x+11}{2}}$, равносильно соотношению $\frac{f(t_1)+f(t_2)}{2}=f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$. Но функция t^{α} при $\alpha\ne 0$ и $\alpha\ne 1$ либо строго выпукла вверх, либо строго выпукла вниз (любая ненулевая хорда лежит либо выше, либо ниже дуги графика, которую она стягивает). Поэтому либо $x^2-9x+11=0$, либо $x^2-9x+11=2$. Оба уравнения очевидно имеют корни. По теореме Виета произведение корней равно $11\cdot 9=99$.

Ответ варианта 1: 99.

Ответ варианта 2: 120.

Ответ варианта 3: 143.

Ответ варианта 4: 80.

Критерии оценивания: *15 баллов* – верное решение и верный ответ; *10 баллов* – получен верный ответ, но обоснование имеет некоторые недостатки.

7. Найдите наибольшее значение объёма треугольной пирамиды, у которой противоположные ребра попарно равны, а сумма длин всех ребер равна $36\sqrt{2}$.

Решение. Если провести через каждое ребро пирамиды плоскость, параллельную противоположному ребру, то получится три пары параллельных плоскостей. При их пересечении образуется параллелепипед, называемый описанным (или сопровождающим пирамиду). При этом из условия задачи следует, что в каждой грани диагонали равны между собой, то есть грани – прямоугольники. Значит, этот параллелепипед прямоугольный (рис. 1).

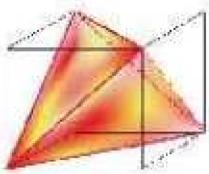


Рис. 1

Пусть ребра сопровождающего параллелепипеда равны a, b и c. Объем пирамиды составляет третью часть от объема этого параллелепипеда, то есть $V = \frac{abc}{3}$.

Так как $x^2 + y^2 \geq 2xy$ и $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ (при этом равенство в каждом из этих неравенств достигается тогда и только тогда, когда $x = y$ и $x = y = z$ соответственно), то:

$$18\sqrt{2} = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq 3\sqrt{2}\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}}{3} \geq 3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3V}.$$

Отсюда $V \leq \frac{6^3}{3} = 72$, причем это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = b = c$.

Ответ варианта 1: 72.

Ответ варианта 2: $18\sqrt{2}$.

Ответ варианта 3: 9.

Ответ варианта 4: $36\sqrt{2}$.

Критерии оценивания: ***15 баллов*** – верное решение и верный ответ; ***10 баллов*** – получен верный ответ, но отсутствует доказательство обращения неравенства в равенство; ***10 баллов*** – получен верный ответ, но имеются недостатки в обосновании.

8. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечётных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

Решение. Выберем все нечётные числа от 673 до 2015, их количество равно

$\frac{2015-671}{2}=672$. Ни одно из этих чисел не делится на другое, так как при делении должно было бы получиться нечётное число, которое не меньше 3, но $673\cdot 3>2015$.

Покажем, что больше 672 чисел, удовлетворяющих условию задачи, выбрать нельзя. В самом деле, разобьём все нечётные числа от 17 до 2015 на 672 кучки, порождённые выбранными выше числами и включающие порождающее число и все его делители, при делении на которые получаются степени тройки: {2015}, {2013, 671}, {2011}, {2009}, {2007, 669, 223}, …, {675, 225, 75, 25}, {673}. Если выбрать больше, чем 672 числа, то по принципу Дирихле хотя бы два из них окажутся в одной кучке, а значит, одно из них будет делиться на другое.

Заметим, что выбранный набор из 672 чисел не единственный. Например, если в нём заменить число $2013=671\cdot 3$ на 671, то новый набор тоже будет удовлетворять условию задачи.

Ответ варианта 1: 672. Подходит, например, набор 673, … , 2015.

Ответ варианта 2: 667. Подходит, например, набор 669, … , 1999.

Ответ варианта 3: 673. Подходит, например, набор 673, … , 2017.

Ответ варианта 4: 670. Подходит, например, набор 671, … , 2009.

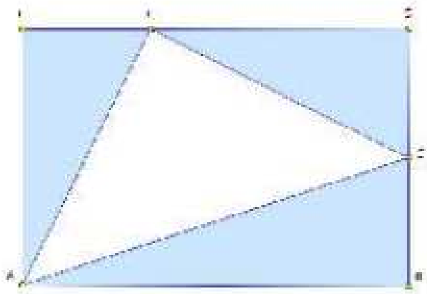
Критерии оценивания: ***15 баллов*** – верное решение и верный ответ; ***10 баллов*** – получен верный ответ и приведен верный пример, но нет доказательства того, что нельзя выбрать больше чисел.

5) Заключительный этап младшие классы.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике. 9 класс

Ответы и решения

1. В прямоугольнике $ABDF$ на сторонах $BD = 2$ и $DF = 3$ выбрали точки C и E соответственно, так, что треугольник AFE равен треугольнику EDC. Потом от прямоугольника $ABDF$ отрезали треугольники ABC, CDE и AFE. Найдите углы оставшегося треугольника.



Ответ: $45°$, $45°$, $90°$. **Решение.** Так как треугольники AFE и EDC равны, то $\angle FAE = \angle DEC$, $\angle FEA = \angle DCE$, $AE = EC$. При этом, так как $\angle FEA + \angle FAE = 90°$, то $\angle FEA + \angle DEC = 90°$. Значит, $\angle AEC = 90°$ и треугольник AEC равнобедренный. Поэтому его углы: $45°$, $45°$, $90°$.

2. Можно ли нанести на грани двух кубиков неотрицательные целые числа так, чтобы при случайном бросании сумма выпавших очков могла быть равна любому целому числу от 1 до 36? Если это возможно, то в ответе укажите сумму всех 12 чисел на гранях; если невозможно – в ответе запишите 0.

Ответ: Сумма равна 111. **Решение.** Можно на гранях одного кубика разместить, например, числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6, а на гранях другого – 0, 6, 12, 18, 24, 30. Тогда сумма выпавших очков может быть равна любому из целых чисел от 1 до 36. Сумма чисел на всех гранях равна 111. Эта сумма не зависит от того, как размечать кости. Поскольку сумма от 1 до 36 равна 666, то среднее (мат. ожидание) равно $666/36 = 18{,}5$. С другой стороны, можно посчитать среднее для каждой кости отдельно, получится, а значит, $S_1 + S_2 = 111$.

3. Найдите все такие трёхзначные числа $\overline{LOM}$, состоящие из различных цифр L, O и M, для которых выполняется равенство:

$$\overline{LOM} = (L+O+M)^2 + L+O+M.$$

Ответ: 156. **Указания.** Обозначим $x = L+O+M$. Тогда $\overline{LOM} = x(x+1)$. При этом $x \geq 10$ (иначе $x(x+1) < 100$) и $x \leq 24$ (сумма цифр не превышает $9+8+7=24$). Поэтому $x \in [10;\, 24]$. Из соотношения $100 \cdot L + 10 \cdot O + M = x^2 + L + O + M$ следует, что $x^2 = 99 \cdot L + 9 \cdot O$, то есть x делится на 3. Осталось подставить значения 12, 15, 18, 21 и 24 в $x(x+1)$ и подсчитать сумму цифр получившегося числа. Она совпадает с x только при $x = 12$.

4. Пете на день рождения подарили новый электролобзик, с функцией подсчета длины сделанных пропилов. Чтобы опробовать подарок, Петя взял квадратный кусок фанеры со стороной 50 см и распилил его на квадраты со стороной 10 см и квадраты со стороной 20 см. Сколько всего квадратов получилось, если электролобзик показывает общую длину пропилов 2 м 80 см?

Ответ: 16. **Решение.** Каждый пропил входит в периметры двух фигур, кроме того, надо учесть периметр исходного квадрата, откуда получаем, что суммарный периметр получившихся квадратиков равен $280 \cdot 2 + 200 = 760$. Теперь можно либо обозначить количество квадратиков через x и y соответственно и решить систему $\begin{cases} 10^2 \cdot x + 20^2 \cdot y = 50^2, \\ 4 \cdot 10 \cdot x + 4 \cdot 20 \cdot y = 760, \end{cases}$ либо привести следующее рассуждение. Если бы все квадратики имели сторону 10, то их было бы 25 штук, тогда суммарный периметр был бы равен $25 \cdot 40 = 1000$. Если заменить четыре маленьких квадрата 10х10 на квадрат 20х20, то периметр уменьшится на $160 - 80 = 80$ см. Чтобы из 1000 получить 760, надо это сделать 3 раза. Значит, будет 3 квадрата 20х20 и 13 квадратов 10х10 – всего 16 квадратов.

5. Сколько существует четырехзначных чисел, обладающих следующими свойствами: все цифры числа чётные; число кратно четырём; если зачеркнуть последнюю цифру, то полученное трёхзначное число не кратно четырём?

Ответ: 120. **Решение.** Последняя цифра числа должна делиться на 4 (то есть это может быть 0, 4 или 8), а предпоследняя – нет (2 или 6). Кроме того, первая цифра не ноль. Значит, получается $4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 120$ вариантов.

6. Найдите величину $f\left(\frac{1}{2016}\right)+f\left(\frac{2}{2016}\right)+\ldots+f\left(\frac{2016}{2016}\right)$, если $f(x)=\frac{x^3+9x-2}{x^2-x+2}$.

Ответ: 3026,5. **Решение.** $f(x)=\frac{x^3+9x-2}{x^2-x+2}=x+1+\frac{8x-4}{x^2-x+2}=\frac{3}{2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{8\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$ $=\frac{3}{2}+g(x)$. При этом, функция $g(x)$ обладает свойством то $g\left(\frac{1}{2}+t\right)=-g\left(\frac{1}{2}-t\right)$. Поэтому $g\left(\frac{1}{2016}\right)=-g\left(\frac{2015}{2016}\right)$, $g\left(\frac{2}{2016}\right)=-g\left(\frac{2014}{2016}\right)$, …, $g\left(\frac{1007}{2016}\right)=-g\left(\frac{1009}{2016}\right)$, и $g\left(\frac{1}{2016}\right)+g\left(\frac{2}{2016}\right)+\ldots+g\left(\frac{2016}{2016}\right)=g\left(\frac{1008}{2016}\right)+g\left(\frac{2016}{2016}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)+g(1)=0+\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$.

Значит, $f\left(\frac{1}{2016}\right)+f\left(\frac{2}{2016}\right)+\ldots+f\left(\frac{2016}{2016}\right)=\frac{3}{2}\cdot 2016+\frac{5}{2}=3026,5$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике. 7 – 8 классы

Ответы и решения

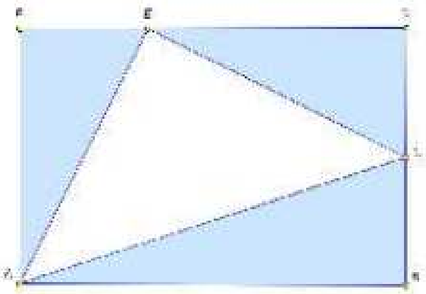
1. На сколько недель может накладываться год? Считаем, что год накладывается на неделю, если хотя бы один день этой недели приходится на данный год.

Ответ: На 53 или 54 недели. **Решение.** Если в году 365 дней (год невисокосный), то, так как $365 = 52 \cdot 7 + 1$, то в году не менее 53 недель. Если год високосный, то есть в году 366 дней ($366 = 52 \cdot 7 + 2$), то возможна ситуация, когда год начинается с последнего дня недели, затем идут 52 полных недели, а затем первый день следующей недели – всего 54 разных недели. Если недель 55 (или более), то полных недель не менее 53, что невозможно, так как $53 \cdot 7 = 371 > 366$.

2. В коробке лежат синие, красные и зелёные карандаши – всего 20 штук. Синих карандашей в 6 раз меньше, чем зелёных. Красных карандашей тоже меньше, чем зелёных. Сколько карандашей нужно вытащить из коробки, чтобы вероятность того, что среди вытащенных карандашей есть хотя бы один красный, была равна 1?

Ответ: 15. **Решение.** Если синий карандаш 1, то зеленых 6, но тогда красных будет больше, чем зеленых. Если синих карандашей 3 (или больше), то зеленых не меньше 18, что в сумме дает больше 20 карандашей. Значит, в коробке 2 синих карандаша, а поэтому 12 зеленых и 6 красных. Если из коробки вытащить 14 карандашей, то это могут быть 2 синих и 12 зеленых, а красных не будет. Если же вытащить 15, то хотя бы один красный среди них обязательно будет.

3. В прямоугольнике $ABDF$ на сторонах $BD = 2$ и $DF = 3$ выбрали точки C и E соответственно, так, что треугольник AFE равен треугольнику EDC. Потом от прямоугольника $ABDF$ отрезали треугольники ABC, CDE и AFE. Найдите углы оставшегося треугольника.



Ответ: $45°$, $45°$, $90°$. **Решение.** Так как треугольники AFE и EDC равны, то $\angle FAE = \angle DEC$, $\angle FEA = \angle DCE$, $AE = EC$. При этом, так как $\angle FEA + \angle FAE = 90°$, то $\angle FEA + \angle DEC = 90°$. Значит, $\angle AEC = 90°$ и треугольник AEC равнобедренный. Поэтому его углы: $45°$, $45°$, $90°$.

4. Сколько чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат ни одной из цифр 6, 7, 8, 9 или 0.

Ответ: 31. **Решение.** По условию эти числа состоят только из цифр 1, 2, 3, 4 и 5. На 4 из таких чисел делится одно однозначное число: 4 и пять двузначных: 12, 24, 32, 44, 52. Если ко всем этим двузначным числам спереди приписать 1, 2, 3, 4 или 5, то они тоже будут делиться на 4. Других делящихся на 4 трехзначных чисел не будет (признак делимости на 4). Значит, всего таких чисел: $1+5\cdot 6=31$.

5. Расставьте знаки $\times$ и $:$ вместо квадратиков в выражении

$$1 \square 3 \square 3^2 \square 3^4 \square 3^8 \square 3^{16} \square 3^{32} \square 3^{64} = 3^{99}$$

таким образом, чтобы значение выражения стало равно 3^{99}.

Ответ: $1\times 3:3^2:3^4:3^8\times 3^{16}\times 3^{32}\times 3^{64}=3^{99}$. **Решение.** Задача сводится к выбору между знаками «плюс» и «минус» в тождестве $0\pm 1\pm 2\pm 4\pm 8\pm 16\pm 32\pm 64=99$. Это можно сделать просто подбором. Но также можно обозначить сумму чисел «с плюсом» через x, а сумму модулей чисел «с минусом» через y. Тогда, так как сумма $1+2+3+...+64=127$, то из системы $\begin{cases} x+y=127, \\ x-y=99 \end{cases}$ находим $x=113$, $y=14$. Так как $y=14=2+4+8$, то минус будет стоять перед 2, 4, 8.

6. Пете на день рождения подарили новый электролобзик, с функцией подсчета длины сделанных пропилов. Чтобы опробовать подарок, Петя взял квадратный кусок фанеры со стороной 50 см и распилил его на квадраты со стороной 10 см и квадраты со стороной 20 см. Сколько всего квадратов получилось, если электролобзик показывает общую длину пропилов 2 м 80 см?

Ответ: 16. **Решение.** Каждый пропил входит в периметры двух фигур, кроме того, надо учесть периметр исходного квадрата, откуда получаем, что суммарный периметр получившихся квадратиков равен $280\cdot 2+200=760$. Теперь можно либо обозначить количество квадратиков через x и y соответственно и решить систему $\begin{cases} 10^2\cdot x+20^2\cdot y=50^2, \\ 4\cdot 10\cdot x+4\cdot 20\cdot y=760, \end{cases}$ либо привести следующее рассуждение. Если бы все квадратики имели сторону 10, то их было бы 25 штук, тогда суммарный периметр был бы равен $25\cdot 40=1000$. Если заменить четыре маленьких квадрата 10x10 на квадрат 20x20, то периметр уменьшится на $160-80=80$ см. Чтобы из 1000 получить 760, надо это сделать 3 раза. Значит, будет 3 квадрата 20x20 и 13 квадратов 10x10 – всего 16 квадратов.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике. 5 – 6 классы

Ответы и решения

1. Сумма пяти положительных целых чисел равна 11. В левой части этого равенства одинаковые числа закрыли табличками с одинаковыми буквами, а разные числа – табличками с разными буквами.

Получилось равенство: $$\mathbf{С + У + М + М + А = 11}.$$

Можете ли вы сказать, какое число скрывается за буквой М?

Ответ: 1. **Решение.** Если $M=1$, то сумма $C+У+A=9$, что возможно только при наборе чисел 2, 3, 4 (в любом порядке). Если $M=2$, то сумма $C+У+A=7$, что невозможно, так как эта сумма не меньше, чем $1+3+4=8$. Если $M>2$, это тем более невозможно.

2. На сколько недель может накладываться год? Считаем, что год накладывается на неделю, если хотя бы один день этой недели приходится на данный год.

Ответ: На 53 или 54 недели. **Решение.** Если в году 365 дней (год невисокосный), то, так как $365=52\cdot7+1$, то в году не менее 53 недель. Если год високосный, то есть в году 366 дней $(366=52\cdot7+2)$, то возможна ситуация, когда год начинается с последнего дня недели, затем идут 52 полных недели, а затем первый день следующей недели – всего 54 разных недели. Если недель 55 (или более), то полных недель не менее 53, что невозможно, так как $53\cdot7=371>366$.

3. В коробке лежат синие, красные и зелёные карандаши – всего 20 штук. Синих карандашей в 6 раз меньше, чем зелёных. Красных карандашей тоже меньше, чем зелёных. Сколько карандашей нужно вытащить из коробки, чтобы вероятность того, что среди вытащенных карандашей есть хотя бы один красный, была равна 1?

Ответ: 15. **Решение.** Если синий карандаш 1, то зеленых 6, но тогда красных будет больше, чем зеленых. Если синих карандашей 3 (или больше), то зеленых не меньше 18, что в сумме дает больше 20 карандашей. Значит, в коробке 2 синих карандаша, а поэтому 12 зеленых и 6 красных. Если из коробки вытащить 14 карандашей, то это могут быть 2 синих и 12 зеленых, а красных не будет. Если же вытащить 15, то хотя бы один красный среди них обязательно будет.

4. Сколько чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат ни одной из цифр 6, 7, 8, 9 или 0.

Ответ: 31. **Решение.** По условию эти числа состоят только из цифр 1, 2, 3, 4 и 5. На 4 из таких чисел делится одно однозначное число: 4 и пять двузначных: 12, 24, 32, 44, 52. Если ко всем этим двузначным числам спереди приписать 1, 2, 3, 4 или 5, то они тоже будут делиться на 4. Других делящихся на 4 трехзначных чисел не будет (признак делимости на 4). Значит, всего таких чисел: $1+5\cdot6=31$.

5. Расставьте знаки $\times$ и $:$ вместо квадратиков в выражении

$$1 \square 3 \square 3^2 \square 3^4 \square 3^8 \square 3^{16} \square 3^{32} \square 3^{64} = 3^{99}$$

таким образом, чтобы значение выражения стало равно 3^{99}.

Ответ: $1 \times 3 : 3^2 : 3^4 : 3^8 \times 3^{16} \times 3^{32} \times 3^{64} = 3^{99}$. **Решение.** Задача сводится к выбору между знаками «плюс» и «минус» в тождестве $0 \pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm 8 \pm 16 \pm 32 \pm 64 = 99$. Это можно сделать просто подбором. Но также можно обозначить сумму чисел «с плюсом» через x, а сумму модулей чисел «с минусом» через y. Тогда, так как сумма $1+2+3+...+64=127$, то из системы $\begin{cases} x+y=127, \\ x-y=99 \end{cases}$ находим $x=113$, $y=14$. Так как $y=14=2+4+8$, то минус будет стоять перед 2, 4, 8.

6. Пете на день рождения подарили новый электролобзик, с функцией подсчета длины сделанных пропилов. Чтобы опробовать подарок, Петя взял квадратный кусок фанеры со стороной 50 см и распилил его на квадраты со стороной 10 см и квадраты со стороной 20 см. Сколько всего квадратов получилось, если электролобзик показывает общую длину пропилов 2 м 80 см?

Ответ: 16. **Решение.** Каждый пропил входит в периметры двух фигур, кроме того, надо учесть периметр исходного квадрата, откуда получаем, что суммарный периметр получившихся квадратиков равен $280 \cdot 2 + 200 = 760$. Теперь можно либо обозначить количество квадратиков через x и y соответственно и решить систему $\begin{cases} 10^2 \cdot x + 20^2 \cdot y = 50^2, \\ 4 \cdot 10 \cdot x + 4 \cdot 20 \cdot y = 760, \end{cases}$ либо привести следующее рассуждение. Если бы все квадратики имели сторону 10, то их было бы 25 штук, тогда суммарный периметр был бы равен $25 \cdot 40 = 1000$. Если заменить четыре маленьких квадрата 10х10 на квадрат 20х20, то периметр уменьшится на $160 - 80 = 80$ см. Чтобы из 1000 получить 760, надо это сделать 3 раза. Значит, будет 3 квадрата 20х20 и 13 квадратов 10х10 – всего 16 квадратов.