МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ» по механике и математическому моделированию

2015/2016 учебный год

http://olymp.msu.ru

Олимпиада школьников «Ломоносов» 2015/2016 учебного года по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ
Отборочный этап 1
10-11 класс

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::1.1:: Два туриста — один на мотоцикле параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани A, доехали до пристани B, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Мотоциклист двигался со скоростью $V = 12$ м/с, скорость течения реки $U = 2,5$ м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.
{=12,5}

::1.2:: Два туриста — один на велосипеде параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани A, доехали до пристани B, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Велосипедист двигался со скоростью $V = 7,5$ м/с, скорость течения реки $U = 2$ м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.
{=8}

::1.3:: Два туриста — один на велосипеде параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани A, доехали до пристани B, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Велосипедист двигался со скоростью $V = 6$ м/с, скорость течения реки $U = 1,25$ м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.
{=6,25}

::1.4:: Два туриста — один на велосипеде параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани A, доехали до пристани B, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Велосипедист двигался со скоростью $V = 3,75$ м/с, скорость течения реки $U = 1$ м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.
{=4}

::1.5:: Два туриста — один на велосипеде параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани A, доехали до пристани B, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Велосипедист двигался со скоростью $V = 6$ м/с, скорость течения реки $U = 0,875$ м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.
{=6,13}

::1.6:: Два туриста — один на мотоцикле параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани А, доехали до пристани В, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Мотоциклист двигался со скоростью $V = 10$ м/с, скорость течения реки $U = 1,125$ м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.

{=10,13}

::1.7:: Два туриста — один на велосипеде параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани А, доехали до пристани В, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Велосипедист двигался со скоростью $V = 4$ м/с, скорость течения реки $U = 1,5$ м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.

{=4,5}

::1.8:: Два туриста — один на мотоцикле параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани А, доехали до пристани В, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Мотоциклист двигался со скоростью $V = 8$ м/с, скорость течения реки $U = 3$ м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.

{=9}

::2.1:: Насос начинает набирать воду в 105-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 15 ведер воды, а в течение каждого четного часа из бочки на огород выкачивает 10 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

{=43}

::2.2:: Насос начинает набирать воду в 120-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 21 ведро воды, а в течение каждого четного часа из бочки на огород выкачивает 16 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

{=47}

::2.3:: Насос начинает набирать воду в 145-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 15 ведер воды, а в течение каждого четного часа из бочки на огород выкачивает 8 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

{=43}

::2.4:: Насос начинает набирать воду в 140-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 19 ведер воды, а в течение каждого четного часа из бочки на огород выкачивает 13 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

{=47}

::2.5:: Насос начинает набирать воду в 115-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 16 ведер воды, а в течение каждого четного часа из бочки на огород выкачивает 10 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

{=39}

::2.6:: Насос начинает набирать воду в 100-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 19 ведер воды, а в течение каждого четного часа из бочки на огород выкачивает 14 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

{=39}

::3.1:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на $3/4$ своего объема, а в другой — на $1/2$ своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,38}

::3.2:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на $3/5$ своего объема, а в другой — на $9/10$ своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,25}

::3.3:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на $2/3$ своего объема, а в другой — на $4/9$ своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,44}

::3.4:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на $1/4$ своего объема, а в другой — на $1/2$ своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,63}

::3.5:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на $3/10$ своего объема, а в другой — на $1/5$ своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,75}

::3.6:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на $3/5$ своего объема, а в другой — на $1/2$ своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,45}

::3.7:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на $3/4$ своего объема, а в другой — на $3/8$ своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,44}

::3.8:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на $3/8$ своего объема, а в другой — на $1/2$ своего объема.

Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,56}

::4.1:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с большей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 1:4, считая от тела большей массы.

{=19,5}

::4.2:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с меньшей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 1:4, считая от тела большей массы.

{=80,5}

::4.3:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с большей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 1:4, считая от тела меньшей массы.

{=18}

::4.4:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с меньшей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 1:4, считая от тела меньшей массы.

{=82}

::4.5:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с большей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 2:3, считая от тела большей массы.

{=19}

::4.6:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с меньшей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 2:3, считая от тела большей массы.

{=81}

::4.7:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с большей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 2:3, считая от тела меньшей массы.

{=18,5}

::4.8:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с меньшей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 2:3, считая от тела меньшей массы.

{=81,5}

::5.1:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 10 см и 15 см и углом 60 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого большого из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

{=9,92}

::5.2:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 10 см и 15 см и углом 60 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого маленького из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

{=4,41}

::5.3:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 8 см и 12 см и углом 120 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого большого из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

{=13,08}

::5.4:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 8 см и 12 см и углом 120 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого маленького из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

{=2,75}

::5.5:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 8 см и 12 см и углом 60 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого большого из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

{=7,94}

::5.6:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 8 см и 12 см и углом 60 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого маленького из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

{=3,53}

::5.7:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 10 см и 15 см и углом 120 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого большого из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

{=16,35}

::5.8:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 10 см и 15 см и углом 120 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого маленького из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

{=3,44}

::6.1:: Исследователи приблизились к незнакомой планете и спустились в ее атмосферу на стратостате, остановившись на высоте 100 км. Эксперименты показали, что атмосфера однородна, а сила сопротивления, действующая на движущееся в атмосфере тело, пропорциональна квадрату его скорости и площади поперечного сечения. Исследователи отпустили небольшое тело вертикально вниз без начальной скорости и заметили, что оно отдалилось от стратостата на 1 метр за 0.5 сек, и достигло поверхности планеты за 30 минут. Оцените, за какое время достигнет поверхности планеты тело той же формы, сделанное из того же материала, все линейные размеры которого в 4 раза меньше. Ответ укажите в минутах.

{=60}

::6.2:: Метеорологи одной далекой планеты начали изучать окружающую их атмосферу. Они поднялись на стратостате на высоту 80 км и остановились. Выяснилось, что атмосфера однородна, а сила сопротивления, действующая на движущееся в атмосфере тело, пропорциональна квадрату его скорости и площади поперечного сечения. Ученые отпустили небольшое тело вертикально вниз без начальной скорости и заметили, что оно отдалилось от стратостата на 1 метр за 0.3 сек, и достигло поверхности планеты за 30 минут. Оцените, за какое время достигнет поверхности планеты тело той же формы, сделанное из того же материала, все линейные размеры которого в 4 раза меньше. Ответ укажите в минутах.

{=60}

::6.3:: Исследователи приблизились к незнакомой планете и спустились в ее атмосферу на стратостате, остановившись на высоте 150 км. Эксперименты показали, что атмосфера однородна, а сила сопротивления, действующая на движущееся в атмосфере тело, пропорциональна квадрату его скорости и площади поперечного сечения. Исследователи отпустили небольшое тело вертикально вниз без начальной скорости и заметили, что оно отдалилось от стратостата на 1 метр за 1 сек, и достигло поверхности планеты за 1 час. Оцените, за какое время достигнет поверхности планеты тело той же формы, сделанное из того же материала, все линейные размеры которого в 4 раза меньше. Ответ укажите в минутах.

{=120}

::6.4:: Метеорологи одной далекой планеты начали изучать окружающую их атмосферу. Они поднялись на стратостате на высоту 160 км и остановились. Выяснилось, что атмосфера однородна, а сила сопротивления, действующая на движущееся в атмосфере тело, пропорциональна квадрату его скорости и площади поперечного сечения. Ученые отпустили небольшое тело вертикально вниз без начальной скорости и заметили, что оно отдалилось от стратостата на 1 метр за 0.6 сек, и достигло поверхности планеты за 1 час. Оцените, за какое время достигнет поверхности планеты тело той же формы, сделанное из того же материала, все линейные размеры которого в 4 раза меньше. Ответ укажите в минутах.

{=120}

Решение.

1. От длины маршрута S результат не зависит. Велосипедист затратит время $2S/V$, а турист в лодке — $S/(W-U)+S/(W+U)$. Приравниваем, сокращаем S и получаем квадратное уравнение для определения W: $W^2-VW-U^2=0$. Положительный корень этого уравнения определяется формулой: $W=\dfrac{V+\sqrt{V^2+(2U)^2}}{2}$. Данные подобраны так, что корень извлекается. Ответ: $12,5$

2. Условия плавания бруска в первой и второй жидкости из условия задачи будут выглядеть следующим образом:

$$V\rho_0=\frac{3}{4}V\rho_1=\frac{1}{2}V\rho_2$$

Здесь ρ_0, ρ_1, ρ_2 — плотности бруска, первой и второй жидкостей соответственно; V — объем бруска. При смешивании равных масс двух жидкостей плотность смеси ρ равна среднему гармоническому плотностей компонент смеси:

$$\rho=\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$$

Тогда из условия плавания бруска в смеси $V\rho_0=V'\rho$, выражая плотности из предыдущей формулы, для объема погруженной части бруска V' получим $V'=\frac{5}{8}V$. Ответ: $\frac{3}{8}$

3. Количество воды в бочке после k-го часа зависит от того, четное или нечетное K, и равно $V_{2n-1}=10+4(n-1)$, $V_{2n}=4n$. Так как первое переполнение может возникнуть только на нечетном часе, то условие $V>49$ дает: $10+4(n-1)>49$, то есть $n>\frac{43}{11}$. Значит $n=11$ и $2n-1=21$. Ответ: 21 час.

4. Можно потянуть за малое тело или за большое — будет два разных ответа. Потянем за большое. Общая масса равна 10 кг, значит ускорение будет равно $a=10$ м/с^2. Мысленно разрежем стержень по указанному сечению. Тогда пятая часть стержня вместе с большой массой будет двигаться с тем же ускорением, но под действием двух сил: $F=100$ Н, приложенной к тяжелому телу, и искомой силы T, приложенной к стержню: $F-T=(M+m_0/5)a$. Отсюда следует ответ $19,5$ Н. Второй ответ: $80,5$ Н

5. Если пересечь пару мячей с радиусами R_1 и R_2 вертикальной плоскостью проходящей через центры этих окружностей, то в плоскости их пересечения образуется трапеция, у которой основания — радиусы мячей, одна боковая сторона — сумма радиусов, другая, как раз и есть одна из сторон указанного в условии прямоугольного равнобедренного треугольника (пусть ее длина равна c). Из рассмотрения этой прямоугольной трапеции получим: $c=2\sqrt{R_1R_2}$. Таким образом, радиусы можно найти из решения системы:

$\begin{cases} 2\sqrt{R_1R_2}=\frac{225}{2}, \\ 2\sqrt{R_2R_3}=\frac{225}{2}, \\ 2\sqrt{R_1R_3}=225. \end{cases}$ Отсюда получим: $R_2=7,5$, $R_1=15$, $R_3=30$. Ответ $7,5$ см

6. Видно, что средняя скорость на большом расстоянии составляет 200 км/ч≈ 56 м/с, что много больше средней скорости на первом метре 2 м/с. Предположим, что при прохождении первого метра сила сопротивления не вносила существенного вклада. Тогда найдем ускорение свободного падения $g=2*h_1/\tau_1^2=8$ м/с^2. При равноускоренном движении с таким ускорением средняя скорость всего спуска будет достигнута за 7 секунд, то есть почти все время спуска точка двигалась с практически неизменной скоростью. Она находится по формуле $V=\sqrt{mg/(kR^2)}$, где m —масса тела, а сила сопротивления выражается $F(v)=kR^2v^2$.

Итак, можно считать, что маленькое тело пройдет первый метр за то же, что и большое, а установившуюся скорость найдем по формуле

$$V_2 = \sqrt{\frac{mg/4^3}{k \cdot R^2/4^2}} = \frac{V}{2}.$$

Таким образом, время спуска маленького тела составит 1 час.

Ответ 1 час

Олимпиада школьников «Ломоносов» 2015/2016 учебного года по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап 2

10-11 класс

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления. При вычислениях (в случае необходимости) считать:

ускорение свободного падения равно 10 м/с^2

абсолютный нуль температур равен -273°C.

Вводные задачи

1. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из населенных пунктов, расстояние между которыми 14 км. Скорости пешеходов постоянны на всем пути и равны соответственно 3 км/ч и 4 км/ч. Через сколько часов после начала движения пешеходы встретятся?

{=2}

2. Два школьника вышли одновременно из двух соседних школ и направились навстречу друг другу. Через десять минут расстояние между школьниками равнялось 600 м, а еще через пять минут они встретились. Найдите расстояние между школами (в метрах).

{=1800}

::1.1:: Гиря массой 200 г стоит на столе. Ее перевернули и поставили на стол другой гранью, площадь которой меньше на 15 кв. см. При этом давление на стол увеличилось на 1200 Па. Найдите площадь грани, на которой гиря стояла первоначально. Ответ дайте в кв. см., при необходимости округлите его до двух знаков после запятой.

Решение. После перевода в СИ получается: $\frac{2}{S-1{,}5\cdot10^{-3}}-\frac{2}{S}=1200$,

где S — площадь исходной грани.

Отсюда получается квадратное уравнение: $4\cdot10^5S^2-600S-1=0$

После замены переменных $y=200S$ уравнение примет вид: $10y^2-3y-1=0$, решение которого легко находится $y=1/2$.

Таким образом, площадь искомой грани равна $S=\frac{1}{400}$ м$^2=25$ см^2

Ответ:25

{=25}

::1.2:: Гиря массой 200 г стоит на столе. Ее перевернули и поставили на стол другой гранью, площадь которой меньше на 30 кв. см. При этом давление на стол увеличилось на 1500 Па. Найдите площадь грани, на которой гиря стояла первоначально. Ответ дайте в кв. см., при необходимости округлите его до двух знаков после запятой.

{=40}

::1.3:: Гиря массой 650 г стоит на столе. Ее перевернули и поставили на стол другой гранью, площадь которой меньше на 40 кв. см. При этом давление на стол увеличилось на 1600 Па. Найдите площадь грани, на которой гиря стояла первоначально. Ответ дайте в кв. см., при необходимости округлите его до двух знаков после запятой.

{=65}

::1.4:: Гиря массой 150 г стоит на столе. Ее перевернули и поставили на стол другой гранью, площадь которой меньше на 15 кв. см. При этом давление на стол увеличилось на 900 Па. Найдите площадь грани, на которой гиря стояла первоначально. Ответ дайте в кв. см., при необходимости округлите его до двух знаков после запятой.

{=25}

::2.1:: Из города Кошкино до города Мышкино, расстояние между которыми равно 192 км, с постоянной скоростью V выезжает автомобиль. Прибыв в Мышкино, автомобиль переходит на равнозамедленное движение, при этом его скорость за каждый час уменьшается на 16 км/час., и движется так до полной остановки. Остановившись, он мгновенно поворачивает обратно и возвращается в Кошкино с постоянной скоростью V. Найдите значение V, при котором автомобиль затратит на весь маршрут наименьшее время. Ответ дайте в километрах в час.

Решение. На каждом участке пути выполняются следующие условия:

На пути от Кошкино до Мышкино $S_1 = Vt_1$, $S_1 = 192$,

на пути от Мышкино до остановки $S_2 = Vt_2 - at_2^2/2$, $0 = V - at_2$, $a = 16$,

на обратном пути $S_1 + S_2 = Vt_3$

Из этой системы уравнения, выражая промежутки времени t_1, t_2, t_3:

$t_1 = \frac{S_1}{V}$, $t_2 = \frac{V}{a}$, $S_2 = \frac{V^2}{2a}$, $S_3 = S_1 + \frac{v^2}{2a}$, $t_3 = \frac{S_1}{V} + \frac{V}{2a}$

получим выражение для искомой функции скорости:

$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{2S_1}{V} + \frac{3V}{2a} \geqslant 2\sqrt{\frac{3S_1}{a}} = 2\sqrt{3 \cdot /16} = 12$

Скорость при этом определяется из соотношения: $\frac{2S_1}{V} = \frac{3V}{2a} \Rightarrow V = 64$

{=64}

::2.2:: Из города Черново до города Белово, расстояние между которыми равно 192 км, с постоянной скоростью V выезжает автомобиль. Прибыв в Белово, автомобиль переходит на равнозамедленное движение, при этом его скорость за каждый час уменьшается на 16 км/час., и движется так до полной остановки. Остановившись, он мгновенно поворачивает обратно и возвращается в Черново с постоянной скоростью V. Какое наименьшее время может понадобиться автомобилю на весь этот маршрут? Ответ дайте в часах.

{=12}

::2.3:: Из города Кошкино до города Мышкино, расстояние между которыми равно 162 км, с постоянной скоростью V выезжает автомобиль. Прибыв в Мышкино, автомобиль переходит на равнозамедленное движение, при этом его скорость за каждый час уменьшается на 24 км/час., и движется так до полной остановки. Остановившись, он мгновенно поворачивает обратно и возвращается в Кошкино с постоянной скоростью V. Найдите значение V, при котором автомобиль затратит на весь маршрут наименьшее время. Ответ дайте в километрах в час.

{=72}

::2.4:: Из города Черново до города Белово, расстояние между которыми равно 162 км, с постоянной скоростью V выезжает автомобиль. Прибыв в Белово, автомобиль переходит на равнозамедленное движение, при этом его скорость за каждый час уменьшается на 24 км/час., и движется так до полной остановки. Остановившись, он мгновенно поворачивает обратно и возвращается в Черново с постоянной скоростью V. Какое наименьшее время может понадобиться автомобилю на весь этот маршрут? Ответ дайте в часах.

{=9}

::2.5:: Из города Кошкино до города Мышкино, расстояние между которыми равно 252 км, с постоянной скоростью V выезжает автомобиль. Прибыв в Мышкино, автомобиль переходит на равнозамедленное движение, при этом его скорость за каждый час уменьшается на 21 км/час., и движется так до полной остановки. Остановившись, он мгновенно поворачивает обратно и возвращается в Кошкино с постоянной скоростью V. Найдите значение V, при котором автомобиль затратит на весь маршрут наименьшее время. Ответ дайте в километрах в час.

{=84}

::2.6:: Из города Черново до города Белово, расстояние между которыми равно 252 км, с постоянной скоростью V выезжает автомобиль. Прибыв в Белово, автомобиль переходит на равнозамедленное движение, при этом его скорость за каждый час уменьшается на 21 км/час., и движется так до полной остановки. Остановившись, он мгновенно поворачивает обратно и возвращается в Черново с постоянной скоростью V. Какое наименьшее время может понадобиться автомобилю на весь этот маршрут? Ответ дайте в часах.

{=12}

::3.1:: Шар, сделанный из сплава A двух веществ, в котором 1-го вещества в 2 раза больше 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую 1/2 от действующей на него силы тяжести. Шар, сделанный из сплава B этих же веществ, в котором 1-го вещества в 5 раз меньше, чем 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую 1/3 от действующей на него силы тяжести. Найдите отношение плотности 1-го вещества к плотности 2-го.

Решение. Сила давления на дно N равна разности силы тяжести P и силы Архимеда F, которую можно выразить через плотности ρ веществ. Тогда можно составить следующие уравнения:

$$N_i = P_i - F_i \Rightarrow k_i P_i = P_i \left(1 - \left(\frac{c_i}{\rho'} + \frac{1-c_i}{\rho''}\right)\rho_0\right) \Rightarrow k_i = 1 - \left(\alpha' c_i + (1-c_i)\alpha''\right)$$

Здесь $i = 1; 2$ — номера сплавов, $k_1 = 1/2$,$k_2 = 1/3$ ρ', ρ'', ρ_0 — плотности 1-го сплава, 2-го сплава и воды соответственно, c_i — концентрации первого вещества в сплавах ($c_1 = 2/3$, $c_2 = 1/6$). Здесь также введены обозначения $\alpha' = \frac{\rho_0}{\rho'}$, $\alpha'' = \frac{\rho_0}{\rho''}$,

Отсюда получаем выражения для α:

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{(1-k_1)(1-c_2)-(1-k_2)(1-c_1)}{c_1-c_2}, \\ \alpha'' = \frac{(1-k_2)c_1-(1-k_1)c_2}{c_1-c_2}. \end{cases}$$

В результате найдем отношение плотностей:

$$\frac{\rho'}{\rho''} = \frac{\alpha''}{\alpha'} = \frac{(1-k_2)c_1-(1-k_1)c_2}{(1-k_1)(1-c_2)-(1-k_2)(1-c_1)}$$

Подставляем данные задачи и получаем ответ: $\frac{13}{7} \approx 1,86$

{=1,86}

::3.2:: Шар, сделанный из сплава A двух веществ, в котором 1-го вещества в 3 раза больше 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую 1/2 от действующей на него силы тяжести. Шар, сделанный из сплава B этих же веществ, в котором 1-го вещества в 4 раз меньше, чем 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую 1/3 от действующей на него силы тяжести. Найдите отношение плотности 1-го вещества к плотности 2-го.

{=1,71}

::3.3:: Шар, сделанный из сплава A двух веществ, в котором 1-го вещества в 2 раза больше 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую 1/3 от действующей на него силы тяжести. Шар, сделанный из сплава B этих же веществ, в котором 1-го вещества в 5 раз меньше, чем 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую 2/3 от действующей на него силы тяжести. Найдите отношение плотности 1-го вещества к плотности 2-го.

{=0,25}

::3.4:: Шар, сделанный из сплава A двух веществ, в котором 1-го вещества в 3 раза меньше 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую 2/3 от действующей на него силы тяжести. Шар, сделанный из сплава B этих же веществ, в котором 1-го вещества в 2 раз больше, чем 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую 1/3 от действующей на него силы тяжести. Найдите отношение плотности 1-го вещества к плотности 2-го.

{=0,44}

::4.1:: Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 12 км. При этом площадь леса на 45 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите суммарную площадь леса и полей в квадратных километрах.

Решение. Условие задачи может быть выражено следующим соотношением:

$r^2 + 4p^2 + 45 = 12q$,

где p, q, r — длины дорог, лежащих напротив населенных пунктов Лисичанск, Оленевка и Медведьевка соответственно.

Данное условие находится в противоречии с неравенством треугольника:

$r + p > q \Rightarrow 12r + 12p > 12q \Rightarrow 12r + 12p > r^2 + 4p^2 + 45 \Rightarrow (r-6)^2 + (2p-3)^2 < 0$

Отсюда следует, что все три населенных пункта находятся на одной прямой.

Причем, $r = 6$, $p = 1,5, /, q = 7,5$.

Общая площадь равна сумме: $r^2 + 4p^2 + 12q = 36 + 9 + 90 = 135$

Ответ 135

{=135}

::4.2:: Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 20 км. При этом площадь леса на 125 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите суммарную площадь леса и полей в квадратных километрах.

{=375}

::4.3:: Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 12 км. При этом площадь леса на 45 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите площадь леса в квадратных километрах.

{=90}

::4.4:: Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 20 км. При этом площадь леса на 125 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите площадь леса в квадратных километрах.
{=250}

::4.5:: Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 28 км. При этом площадь леса на 245 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите суммарную площадь леса и полей в квадратных километрах.
{=735}

::4.6:: Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 28 км. При этом площадь леса на 245 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите площадь леса в квадратных километрах.
{=490}

::5.1:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает VT диаграмму, которая представляет собой трапецию. Причем продолжения боковых сторон этой трапеции пересекается в начале координат. В течение процесса промежуточные температуры в вершинах трапеции превосходили минимальную температуру начала процесса на $40°C$ и $160°C$. При какой температуре начала процесса максимальная температура цикла будет минимальна? Ответ дайте в градусах Кельвина.

Решение. В указанном процессе выполняется соотношение между температурами:
$T_{min} \cdot T_{max} = (T_{min} + x) \cdot (T_{min} + y)$ Здесь $x = 40$, $y = 160$
Отсюда получим выражение для максимальной температуры:
$T_{max} = (x + y) + T_{min} + \frac{xy}{T_{min}}$
Используя неравенство о средних, получим минимальное значение максимальной температуры в цикле: $T_{max} = (x + y) + 2\sqrt{xy} = 360K$ при $T_{min} = 80K$
Отсюда следует ответ $80K$
{=80}

::5.2:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает VT диаграмму, которая представляет собой трапецию. Причем продолжения боковых сторон этой трапеции пересекается в начале координат. В течение процесса промежуточные температуры в вершинах трапеции превосходили минимальную температуру начала процесса на $30°C$ и $270°C$. При какой температуре начала процесса максимальная температура цикла будет минимальна? Ответ дайте в градусах Кельвина.

{=90}

::5.3:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает VT диаграмму, которая представляет собой трапецию. Причем продолжения боковых сторон этой трапеции пересекается в начале координат. В течение процесса промежуточные температуры в вершинах трапеции превосходили минимальную температуру начала процесса на $90°C$ и $160°C$. При какой температуре начала процесса максимальная температура цикла будет минимальна? Ответ дайте в градусах Кельвина.

{=120}

::5.4:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает VT диаграмму, которая представляет собой трапецию. Причем продолжения боковых сторон этой трапеции пересекается в начале координат. В течение процесса промежуточные температуры в вершинах трапеции превосходили минимальную температуру начала процесса на $90°C$ и $250°C$. При какой температуре начала процесса максимальная температура цикла будет минимальна? Ответ дайте в градусах Кельвина.

{=150}

::6.1:: Вечноживущий обитатель одной далекой планеты бросает горизонтально мяч в цель. Мяч летит горизонтально и практически останавливается у цели, причем скорость мяча линейно зависит от пройденного пути. Известно, что брошенный мяч преодолел половину расстояния до цели за время 40 с. Через сколько секунд после броска мяч будет втрое ближе к цели, чем к месту старта?

Решение. Сравним первую половину и третью четверть пути от старта до цели. Разобьем оба участка на равное большое количество (N) одинаковых отрезков. Длины этих отрезков столь малы, что можно считать скорость на каждом отдельном отрезке постоянной. Отрезки на первом участке пути вдвое длиннее, чем на втором. Рассмотрим участки с номером i. Концы этих отрезков имеют координаты $x_1 = iL/(2N)$ и $x_2 = L/2 + iL/(4N)$, координата откладывается от начала в сторону движения, L — длина пути. Зависимость скорости от координаты имеет вид $v(x) = v_0(1 - x/L)$. Видно, что $v(x_1) = 2v(x_2)$, поэтому время, затраченное на прохождение двух отрезков с одинаковыми номерами одинаково. Следовательно, третья четверть пути будет пройдена за то же время, что и первая половина. Искомое время составит 2τ.

Решение из теории размерности. Найдем связь между начальной скоростью v_0, длиной дистанции L и временем τ, затраченным на половину пути. Движение полностью описывается заданной функцией $v(x)$, которая по условию однозначно определяется начальной скоростью v_0 и L. Вывод точной формулы требует решения дифференциального уравнения, однако мы имеем

$$\tau = f(v_0, L).$$

Выберем в качестве масштаба скорости v_0, масштаба длины L. Тогда время измеряется в единицах L/v_0. Запишем формулу для τ в этой системе единиц:

$$\frac{\tau}{L/v_0} = f(1,1) = \text{const}.$$

Таким образом величина $v_0\tau/L$ определяется только характеристиками движущегося тела и среды, но не параметрами конкретного движения. В частности, для второй половины дистанции имеем $v_0' = v_0/2$, $L' = L/2$, следовательно, так как $v_0'\tau'/L' = v_0\tau/L$, $\tau' = \tau$, то есть третью четверть пути мяч пройдет за то же время, что и первую половину.

Ответ 2τ.

{=80}

::6.2:: Вечноживущий обитатель одной далекой планеты бросает горизонтально мяч в цель. Мяч летит горизонтально и практически останавливается у цели, причем скорость мяча линейно зависит от пройденного пути. Известно, что брошенный мяч преодолел половину расстояния до цели за время 20 с. Через сколько секунд после броска мяч будет втрое ближе к цели, чем к месту старта?

{=40}

::6.3:: Вечноживущий обитатель одной далекой планеты бросает горизонтально мяч в цель. Мяч летит горизонтально и практически останавливается у цели, причем скорость мяча линейно зависит от пройденного пути. Известно, что брошенный мяч преодолел половину расстояния до цели за время 15 с. Через сколько секунд после броска мяч будет втрое ближе к цели, чем к месту старта?

{=30}

::6.4:: Вечноживущий обитатель одной далекой планеты бросает горизонтально мяч в цель. Мяч летит горизонтально и практически останавливается у цели, причем скорость мяча линейно зависит от пройденного пути. Известно, что брошенный мяч преодолел половину расстояния до цели за время 25 с. Через сколько секунд после броска мяч будет втрое ближе к цели, чем к месту старта?

{=50}

Олимпиада школьников Ломоносов–2016
по механике и математическому моделированию

9 класс

В первых четырех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). В пятой задаче требуется прислать решение в присоединенном файле. Ответом на каждую из первых четырех задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

При вычислениях (в случае необходимости) считать:
ускорение свободного падения равно 10 м/с^2

1. Если открыть кран с холодной водой, то ванна наполняется за 5 минут 20 секунд. Если открыть одновременно и кран с холодной водой, и кран с горячей водой, то ванна наполняется до того же уровня за 2 минуты. За какое время наполнится ванна, если открыть только кран с горячей водой? Ответ дайте в секундах.

{192}

Решение. По условию: $\frac{16}{3}v_1 = 1$, $(v_1+v_2)2 = 1$, где v_1, v_2 — скорости поступления воды из холодного и горячего кранов соответственно. Отсюда получим: $v_1 = 3/16$, $v_2 = 5/16$.

Тогда время заполнения ванны из грана с горячей водой $\frac{16}{5}$. Ответ: 3 минуты 12 секунд $=$ 192 секунды

2. Гиря массой 200 граммов стоит на столе. Ее перевернули и поставили на стол другой гранью, площадь которой меньше на 15 кв. см. При этом давление на стол увеличилось на 1200 Па. Найдите площадь грани, на которой гиря стояла первоначально. Ответ дайте в кв. см., при необходимости округлите его до двух знаков после запятой.

{25}

Решение. После перевода в СИ получается: $\frac{2}{S-1{,}5\cdot10^{-3}} - \frac{2}{S} = 1200$.

Здесь S — площадь исходной грани.

Отсюда получается квадратное уравнение: $4\cdot10^5S^2 - 600S - 1 = 0$.

После замены переменных $y = 200S$ уравнение примет вид: $10y^2 - 3y - 1 = 0$, решение которого легко находится $y = 1/2$. Таким образом, площадь искомой грани равна $S = \frac{1}{400}$ м^2 $= 25$ см^2.

Ответ:25

3. Поселки Аркадино, Борисово и Вадимово попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Аркадино и Борисово примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Борисово и Вадимово примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Аркадино и Вадимово примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 12 км. При этом площадь леса на 45 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите суммарную площадь леса и полей в кв. км.

{135}

Решение. Условие задачи может быть выражено следующим соотношением:

$r^2 + 4p^2 + 45 = 12q$,

где p, q, r — длины дорог, лежащих напротив населенных пунктов Аркадино, Борисово и Вадимово соответственно.

Данное условие находится в противоречии с неравенством треугольника:

$r + p > q \Rightarrow 12r + 12p > 12q \Rightarrow 12r + 12p > r^2 + 4p^2 + 45 \Rightarrow (r-6)^2 + (2p-3)^2 < 0$.

Отсюда следует, что все три населенных пункта находятся на одной прямой.

Причем, $r = 6$, $p = 1{,}5$, $q = 7{,}5$.

Общая площадь равна сумме:

$r^2 + 4p^2 + 12q = 36 + 9 + 90 = 135$

Ответ 135

4. Сплав A двух металлов массой 6 кг, в котором 1-го металла в два раза больше 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давление на дно 30 Н. Сплав B этих же металлов массой 3 кг, в котором 1-го металла в 5 раз меньше, чем 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно 10 Н. Какую силу давления (в ньютонах) создаст третий сплав, полученный после сплавления исходных сплавов?

{40}

Решение. В силу закона сохранения массы в результирующем сплаве масса каждого из металлов равна сумме масс этих металлов в исходных сплавах. Таким образом, и силы тяготения, и силы Архимеда так же складываются. Отсюда следует, что реакция опоры будет суммой реакций опоры в первых двух случаях. Ответ: $30 + 10 = 40$.

5. Гаврила взял в руку чугунную сковородку и нагрел ее на плите до тех пор, пока рука не почувствовала, что ручка сковородки нагрелась. После этого Гаврила подставил сковородку под струю холодной воды из водопроводного крана, однако он почувствовал, что ручка сковороды стала горячее (а не холоднее, как предполагал Гаврила). Почему так произошло? Не противоречит ли это законам термодинамики?

Решение. Струя воды действует с некоторой силой на сковороду, поэтому, чтобы ее удержать Гаврила сильнее сжал ручку сковороды. При этом площадь контакта увеличилась и поток тепла также увеличился. Ощущение тепла в первую очередь связано со скоростью потока тепла, а не с температурой. Одинаково нагретые дерево и металл будут восприниматься на ощупь по-разному. Металл будет казаться более горячим.

Олимпиада школьников Ломоносов–2016
по механике и математическому моделированию

7–8 класс

В первых четырех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). В пятой задаче требуется прислать решение в присоединенном файле. Ответом на каждую из первых четырех задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

При вычислениях (в случае необходимости) считать:

ускорение свободного падения равно 10 м/с^2

1. Некий человек нанял работника на год, обещав ему дать 12 рублей и кафтан. Но тот по случаю, проработав 7 месяцев, захотел уйти и просил достойную плату с кафтаном. Ему дали по достоинству 5 рублей и кафтан. Какой цены был кафтан? (*Старинная задача*) Ответ дайте в рублях, при необходимости округлив его до сотых.

{4,8}

Решение. Это задача Е. Д. Войтяховского из «Курса чистой математики» (1811 г.). Если плата за год равна $12 + K$ (K — стоимость кафтана), то за 7 месяцев должны заплатить $\frac{7(12+K)}{12}$. Получаем уравнение $\frac{7(12+K)}{12} = 5 + K$, отсюда $\frac{5K}{12} = 2$, $K = \frac{24}{5} = 4,8$ рубля. Ответ: 4,8.

2. Гиря массой 200 граммов стоит на столе. Ее перевернули и поставили на стол другой гранью, площадь которой меньше на 15 кв. см. При этом давление на стол увеличилось на 1200 Па. Найдите площадь грани, на которой гиря стояла первоначально. Ответ дайте в кв. см., при необходимости округлите его до двух знаков после запятой.

{25}

Решение. После перевода в СИ получается: $\frac{2}{S-1,5\cdot10^{-3}} - \frac{2}{x} = 1200$.

Отсюда получается квадратное уравнение: $4\cdot10^5S^2 - 600S - 1 = 0$.

После замены переменных $y = 200S$ уравнение примет вид: $10y^2 - 3y - 1 = 0$, решение которого легко находится $y = 1/2$. Таким образом, площадь искомой грани равна $S = \frac{1}{400}$ м^2 = 25 см^2.

Ответ:25

3. Поселки Аркадино, Борисово и Вадимово попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Аркадино и Борисово примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Борисово и Вадимово примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Аркадино и Вадимово примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 12 км. При этом площадь леса на 45 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите суммарную площадь леса и полей в кв. км.

{135}

Решение. Условие задачи может быть выражено следующим соотношением:

$r^2 + 4p^2 + 45 = 12q$,

где p, q, r — длины дорог, лежащих напротив населенных пунктов Аркадино, Борисово и Вадимово соответственно.

Данное условие находится в противоречии с неравенством треугольника:

$r + p > q \Rightarrow 12r + 12p > 12q \Rightarrow 12r + 12p > r^2 + 4p^2 + 45 \Rightarrow (r-6)^2 + (2p-3)^2 < 0$.

Отсюда следует, что все три населенных пункта находятся на одной прямой.

Причем, $r = 6$, $p = 1,5$, $q = 7,5$.

Общая площадь равна сумме: $r^2 + 4p^2 + 12q = 36 + 9 + 90 = 135$.

Ответ 135

4. Сплав A двух металлов массой 6 кг, в котором 1-го металла в два раза больше 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давление на дно 30 Н. Сплав B этих же металлов массой 3 кг, в котором 1-го металла в 5 раз меньше, чем 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно 10 Н. Какую силу давления (в ньютонах) создаст третий сплав, полученный после сплавления исходных сплавов?

{40}

Решение. В силу закона сохранения массы в результирующем сплаве масса каждого из металлов равна сумме масс этих металлов в исходных сплавах. Таким образом, и силы тяготения, и силы Архимеда так же складываются. Отсюда следует, что реакция опоры будет суммой реакций опоры в первых двух случаях. Ответ: $30 + 10 = 40$.

5. Гаврила взял в руку чугунную сковородку и нагрел ее на плите до тех пор, пока рука не почувствовала, что ручка сковородки нагрелась. После этого Гаврила подставил сковородку под струю холодной воды из водопроводного крана, однако он почувствовал, что ручка сковороды стала горячее (а не холоднее, как предполагал Гаврила). Почему так произошло? Не противоречит ли это законам термодинамики?

Решение. Струя воды действует с некоторой силой на сковороду, поэтому, чтобы ее удержать Гаврила сильнее сжал ручку сковороды. При этом площадь контакта увеличилась и поток тепла также увеличился. Ощущение тепла в первую очередь связано со скоростью потока тепла, а не с температурой. Одинаково нагретые дерево и металл будут восприниматься на ощупь по-разному. Металл будет казаться более горячим.

Решения задач варианта 161 и ответы к задачам других вариантов

Критерии оценок задач:

Каждая задача оценивается в 20 баллов. Оценка 20 баллов ставится за правильное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности, вычислительные ошибки) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставилась также оценка 10 баллов за частичное продвижение в решении.

Внимание! ***Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.***

1. Расстояние от лежащей в горизонтальной плоскости точки до основания телевизионной башни равно 100 м. При этом из данной точки башня видна (от основания до верхушки) под углом 46°. Без использования таблиц, калькулятора и других вычислительных устройств определите, что больше: высота башни или 103,3 м?

Ответ: Высота башни больше. **Решение.** Высота башни равна $H=100\cdot\mathrm{tg}46^\circ$ $=100\cdot\mathrm{tg}\left(45^\circ+1^\circ\right)$ $=100\dfrac{\mathrm{tg}45^\circ+\mathrm{tg}1^\circ}{1-\mathrm{tg}45^\circ\cdot\mathrm{tg}1^\circ}$ $=100\dfrac{1+\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{180}}{1-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{180}}$. Так как при $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\mathrm{tg}x>x$, а также так как $\pi>3$, то $H>100\dfrac{1+\dfrac{\pi}{180}}{1-\dfrac{\pi}{180}}$ $=100\dfrac{180+\pi}{180-\pi}$ $>100\dfrac{180+3}{180-3}=\dfrac{6100}{59}>103{,}3$. Можно было дать и более точную оценку (так как $\pi>3{,}14$): $H>100\dfrac{180+\pi}{180-\pi}>100\dfrac{180+3{,}14}{180-3{,}14}>103{,}55$.

Приведенное выше решение абсолютно строгое и не использует приближенных вычислений. Возможен также примерный подсчет высоты башни: так как при малых углах $\mathrm{tg}x\approx x$, то $H=100\cdot\mathrm{tg}46^\circ$ $=100\dfrac{1+\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{180}}{1-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{180}}$ $\approx100\dfrac{1+\dfrac{\pi}{180}}{1-\dfrac{\pi}{180}}$ $=100\dfrac{180+\pi}{180-\pi}$ $\approx100\dfrac{180+3{,}14}{180-3{,}14}\approx103{,}55$ м. Это довольно точный результат (вычисление по таблицам дает $100\cdot\mathrm{tg}46^\circ\approx103{,}5530$), но такое решение нельзя признать безупречным, если не делается оценка точности вычислений.

Ответ к варианту 162: 193,5 м больше.

Ответ к варианту 163: высота башни больше.

Ответ к варианту 164: 96,8 м больше.

2. На берегах имеющего форму круга (вид сверху) острова расположены города *A, B, C* и *D*. Прямолинейная асфальтовая дорога *AC* делит остров на две равные половины. Прямолинейная асфальтовая дорога *BD* короче дороги *AC* и пересекает её. Скорость велосипедиста на любой асфальтовой дороге равна 15 км/час. На острове имеются также прямолинейные грунтовые дороги *AB, BC, CD* и *AD*, скорость велосипедиста на которых одинакова. Велосипедист доезжает из пункта *B* до каждого из пунктов *A, C* и *D* по прямолинейной дороге за 2 часа. Найдите площадь, ограниченную четырёхугольником *ABCD*.

Ответ: 450 кв. км. **Решение.** Условие задачи означает, что дан четырёхугольник *ABCD*, у которого углы *B* и *D* – прямые (опираются на диаметр), $AB = BC$ (обе дороги грунтовые, и велосипедист проезжает их за одинаковое время), $BD = 15\,\frac{\text{км}}{\text{час}} \cdot 2\text{ час} = 30$ км. Опустим из точки *B* два перпендикуляра: *BM* – на прямую *AD*, и *BN* – на прямую *CD*. Тогда $\Delta BMA = \Delta BNC$ (оба прямоугольные, гипотенузы равны, $\angle BCN = \angle BAM$ – каждый из этих углов в сумме с $\angle BAD$ даёт $180°$). Поэтому четырёхугольник *MBND* равновелик четырёхугольнику *ABCD*. При этом *MBND* – квадрат, у которого известна диагональ *BD*. Поэтому его площадь равна $\frac{30^2}{2} = 450$ кв. км.

Ответ к варианту 162: 800 кв. км.

Ответ к варианту 163: 200 кв. км.

Ответ к варианту 164: 50 кв. км.

3. Санная горка состоит из прямолинейного склона *AB* и горизонтального участка *BC*. Точка *A* находится на расстоянии 5 м от ближайшей к ней точки *H* горизонтальной земной поверхности. Расстояние *HC* равно 3 м, точка *B* лежит на отрезке *HC*. Найдите расстояние от точки *H* до точки *B*, чтобы время движения саней из состояния покоя по ломаной *ABC* было минимальным. Поле силы тяжести считать однородным, силой трения, сопротивлением воздуха и изменением модуля вектора скорости саней при прохождении точки сопряжения *B* пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ м. **Решение.** Пусть *S* – расстояние *HC*, *H* – расстояние *AH*, *x* – искомое расстояние. Тогда время падения $t_{AH} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, время спуска из точки *A* в точку *B* равно $t_{AB} = \frac{t_{AH}}{\sin\angle ABH}$, при этом $\sin\angle ABH = \frac{H}{\sqrt{H^2+x^2}}$, а скорость в точке *B* равна $V = \sqrt{2gH}$.

Поэтому время движения саней равняется: $t_{ABC} = t_{AB} + t_{BC} = \frac{2\sqrt{H^2+x^2}+S-x}{\sqrt{2gH}}$.

Требуется найти минимум функции $f(x) = 2\sqrt{H^2+x^2} - x$. Производная этой функции $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{H^2+x^2}} - 1$ равна 0, поэтому $2x = \sqrt{H^2+x^2} \Rightarrow 4x^2 = H^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{H}{\sqrt{3}}$. Несложно показать, что это будет точка минимума. При $H = 5$ получаем: $x = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Ответ к варианту 162: $\sqrt{3}$ м.

Ответ к варианту 163: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ м.

Ответ к варианту 164: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ м.

4. Один моль одноатомного идеального газа совершает циклический процесс *abca*. Диаграмма этого процесса в осях *P* – *T* представляет собой криволинейный треугольник, сторона *ab* которого параллельна оси *T*, сторона *bc* – отрезок прямой, проходящей через начало координат, а сторона *ca* – дуга параболы, проходящей через начало координат, ось которой параллельна оси *T*. При этом в точках *a* и *c* температура газа одинакова и равна $T_0 = 320$ К, давление в точке *a* вдвое меньше давления в точке *c*. Определите работу, совершаемую газом за цикл.

Ответ: 664 Дж. **Решение**. Процесс *ab* – изобара, процесс *bc* – изохора, процесс *ca* описывается уравнением $T = P(d - kP)$, где *d, k* – некоторые константы. Несложно видеть, что в таком процессе объем оказывается линейной функцией давления, то есть в осях *PV* данный циклический процесс изображается прямоугольным треугольником с катетами *ab* и *bc*.

Пусть P_0, V_0 – параметры газа в точке *b*. Тогда параметры газа в точке *a*: P_0, $2V_0$, в точке *c*: $2P_0$, V_0. Отсюда находим: $A = \frac{1}{2}P_0V_0 = \frac{1}{4}RT_0 = 664$ Дж.

Ответ к варианту 162: $\frac{2}{3}RT_0 = 1662$ Дж.

Ответ к варианту 163: $\frac{2}{3}RT_0 = 1994$ Дж.

Ответ к варианту 164: $\frac{1}{4}RT_0 = 582$ Дж.

5. Для перемещения между пунктами, расположенными на расстоянии сотен километров на земной поверхности, люди будущего, вероятно, будут прокапывать прямолинейные туннели, в которых капсулы будут перемещаться без трения исключительно под действием силы притяжения Земли. Пусть точки *A, B* и *C* лежат на одном меридиане, расстояние от *A* до *B* по поверхности относится к расстоянию от *B* до *C* по поверхности как $m:n$. Капсула проходит по туннелю *AB* примерно за 42 минуты. Оцените время движения по туннелю *AC*. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 42 мин. **Решение**. Пусть точка *O* – центр Земли. Оценим время движения от *A* до *B*. Для этого рассмотрим треугольник *AOB*. Можно считать, что угол $\alpha = 90° - \angle ABO$ очень мал, так что $\sin\alpha \approx \alpha$. Так как точка в туннеле *AB* притягивается к центру силой тяготения *F*, то в проекции на направление движения получим силу $F\sin\alpha \approx F\alpha$. Под действием этой силы тело по каналу будет двигаться с ускорением $a \approx R\ddot{\alpha}$. Тогда модель движения точки от *A* до *B* можно рассматривать как модель математического маятника, для которого период не зависит от расстояния от *B* до *A*. Это значит, что время движения будет одинаковым.

Ответ к варианту 162: 42 мин.
Ответ к варианту 163: 42 мин.
Ответ к варианту 164: 42 мин.

6. Кинофильм на пленке нужно перемотать с одной катушки на другую. Диаметры пустых катушек одинаковы и равны *a*. Найдите время, необходимое для перемотки, если длина киноленты равна *L*, толщина кинопленки мала и равна *S*, а приемная катушка вращается с постоянной угловой скоростью ω.

Ответ: $T = \frac{\pi}{S\omega}\left(\sqrt{a^2 + \frac{4SL}{\pi}} - a\right)$. **Решение**. За каждый оборот приемной катушки на нее наматывается 1 виток пленки, значит, радиус увеличивается на *S*. Один оборот катушка совершает за время $t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$. За время *t* катушка совершит $n = \frac{t}{t_0}$ оборотов, а значит, радиус увеличится на величину $\Delta r = S \cdot n$. То есть радиус приемной катушки меняется со временем по закону: $r(t) = \frac{a}{2} + \frac{S\omega}{2\pi}t$. Скорость *V* намотки пленки: $V = \omega\left(\frac{a}{2} + \frac{S\omega}{2\pi}t\right)$.

Таким образом, пленка движется равноускоренно, и время *T*, необходимое для прохождения всей пленки длиной *L*, будет определяться из уравнения: $\frac{L}{\omega} = \frac{S\omega}{4\pi}T^2 + \frac{aT}{2}$.

В данном случае у уравнения один положительный корень, который и будет ответом к задаче:

$$T = \frac{\pi}{S\omega}\left(\sqrt{a^2 + \frac{4SL}{\pi}} - a\right).$$

Ответ к варианту 162: $T = \frac{\pi}{S\omega}\left(\sqrt{a^2 + \frac{4SL}{\pi}} - a\right)$.

Ответ к варианту 163: $T = \frac{\pi}{S\omega}\left(\sqrt{a^2 + \frac{4SL}{\pi}} - a\right)$.

Ответ к варианту 164: $T = \frac{\pi}{S\omega}\left(\sqrt{a^2 + \frac{4SL}{\pi}} - a\right)$.

Олимпиада «Ломоносов – 2016» по механике и математическому моделированию.

9 класс. Решения задач

1. Автомобиль двигался со скоростью V. При въезде в город водитель уменьшил скорость на x%, а при выезде из города увеличил её на $0,5x\%$. Оказалось, что эта новая скорость на $0,6x\%$ меньше скорости V.

А) Можно ли найти величину x? Если можно, чему она равна?

Б) Можно ли найти величину V? Если можно, чему она равна?

Ответ: а) Можно; 20; б) нет. **Решения.**

А) Условие задачи означает, что выполнено уравнение

$$V\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{0{,}5x}{100}\right)=V\left(1-\frac{0{,}6x}{100}\right)\Leftrightarrow\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{200}\right)=1-\frac{3x}{500}\Leftrightarrow\frac{x^2}{20000}=\frac{3x}{500}-\frac{x}{200}.$$

$\Leftrightarrow x=0$; $x=20$. Значение $x=0$ противоречит условию. Значит, $x=20$.

Б) Любое положительное число V удовлетворяет условию.

2. В сосуде с водой на дне расположен куб из материала, плотность которого ρ_1 в 3 раза превышает плотность воды ρ_0. С каким ускорением и в каком направлении надо начать перемещать сосуд, чтобы куб стал всплывать?

Ответ: не меньше, чем g *вниз*. **Решение.** Если ускорение сосуда больше или равно g, то давление столба на верхнюю поверхность куба отсутствует. Так как сила реакции сосуда направлена вверх или равна нулю, ускорение куба относительно земли не превосходит g, при этом относительное ускорение будет направлено вверх, то есть куб начнет всплывать.

3. Туристы из США, приезжая в Европу, для перевода температуры в градусах Цельсия C в привычные для них градусы Фаренгейта F нередко используют приближённую формулу перевода: F=2C+30. Укажите диапазон температур (в градусах Цельсия), при которых отклонение температуры в градусах Фаренгейта, полученной по указанной приближённой формуле, от температуры, полученной по точной формуле, не превышает 5%. Для получения точной формулы следует знать, что вода замерзает при $32F$, а кипит при $212F$.

Ответ: $1\frac{11}{29}\le C\le 32\frac{8}{11}$. **Решение.** Обе шкалы температур равномерны, поэтому они связаны линейным законом: F=kC+b. Из условия определяются константы a и b. Получается точная формула: $F=\frac{9}{5}C+32$.

Отклонение температур, посчитанных по двум формулам, равно:

$$\frac{(2C+30)-(\frac{9}{5}C+32)}{\frac{9}{5}C+32}=\frac{C-10}{9C+160}.$$

По условию: $-\frac{5}{100} \leq \frac{C-10}{9C+160} \leq \frac{5}{100}$. Отсюда: $\frac{40}{10029} \leq C \leq \frac{360}{11}$. Это означает, что в диапазоне температур примерно от 1 до 33 градусов Цельсия использование приближённой формулы вполне оправдано (ведь делать перевод градусов по ней гораздо удобнее, чем по точной формуле).

4. На берегах имеющего форму круга (вид сверху) острова расположены города *A, B, C* и *D*. Прямолинейная асфальтовая дорога *AC* делит остров на две равные половины. Прямолинейная асфальтовая дорога *BD* короче дороги *AC* и пересекает её. Скорость велосипедиста на любой асфальтовой дороге равна 15 км/час. На острове имеются также прямолинейные грунтовые дороги *AB, BC, CD* и *AD*, скорость велосипедиста на которых одинакова. Велосипедист доезжает из пункта *B* до каждого из пунктов *A, C* и *D* по прямолинейной дороге за 2 часа. Найдите площадь, ограниченную четырёхугольником *ABCD*.

Ответ: 450 кв. км. **Решение.** Условие задачи означает, что дан четырёхугольник *ABCD*, у которого углы *B* и *D* – прямые (опираются на диаметр), $AB = BC$ (обе дороги грунтовые, и велосипедист проезжает их за одинаковое время), $BD = 15\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ 2 час =30км. Опустим из точки *B* два перпендикуляра: *BM* – на прямую *AD*, и *BN* – на прямую *CD*. Тогда ΔBMA=ΔBNC (оба прямоугольные, гипотенузы равны, $\angle BNC = \angle BAM$ – каждый из этих углов в сумме с $\angle BAD$ даёт 180$^{\text{o}}$). Поэтому четырёхугольник *MBND* равновелик четырёхугольнику *ABCD*. При этом *MBND* – квадрат, у которого известна диагональ *BD*. Поэтому его площадь равна $\frac{30^2}{2} = 450$ кв. км.

5. В два самовара – большой и маленький – налили очень горячую воду одинаковой температуры. Оба самовара имеют одну и ту же форму и сделаны из одинакового материала. Какой из них раньше остынет до комнатной температуры?

Ответ: маленький. **Решение.** Если один самовар в *n* раз больше другого, то его объем больше в n^3 раз, а площадь поверхности больше в n^2 раз. Поэтому на единицу поверхности в большом самоваре приходится в *n* раз больший объем. Значит, он будет остывать медленней.

Олимпиада «Ломоносов – 2016» по механике и математическому моделированию.

7 – 8 классы. Решения задач

1. Автомобиль двигался со скоростью V. При въезде в город водитель уменьшил скорость на x%, а при выезде из города увеличил её на $0,5x\%$. Оказалось, что эта новая скорость на $0,6x\%$ меньше скорости V. Найдите величину x.

Ответ: 20. **Решение**. Условие задачи означает, что выполнено уравнение
$$V\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{0,5x}{100}\right)=V\left(1-\frac{0,6x}{100}\right)\Leftrightarrow\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{200}\right)=1-\frac{3x}{500}\Leftrightarrow\frac{x^2}{20000}=\frac{3x}{500}-\frac{x}{200}.$$
$\Leftrightarrow x=0$; $x=20$. Значение $x=0$ противоречит условию. Значит, $x=20$.

2. Бочка высотой 1,5 метра полностью заполнена водой и закрыта крышкой. Масса воды в бочке - 1000 кг. В крышку бочки вставлена вертикально длинная тонкая трубка сечением 1 см^2, которую полностью заполняют водой. Найдите длину трубки, если известно, что после её наполнения давление на дно бочки увеличилось в 2 раза. Плотность воды равна 1000 кг/м^3.

Ответ: 1,5 м. **Решение.** Для решения задачи нужно знать только, как меняется давления с глубиной: $p=\rho gh$. Из этого соотношения следует, что для увеличения давления в два раза необходимо в два раза увеличить высоту столба жидкости. Это значит, что трубка должна быть такой же высоты, как и бочка – 1,5 м.

3. Поле Чудес в Стране Дураков имеет форму прямоугольника со сторонами 6 км и 2,5 км. Мальвина и Буратино одновременно начали двигаться навстречу друг другу из двух его несмежных вершин по диагонали со скоростями 4 км/час и 6 км/час соответственно. В этот же момент пудель Артемон помчался со скоростью 12 км/час от Мальвины к Буратино, затем, добежав до него, мгновенно развернулся и побежал к Мальвине, и так далее. Какое расстояние пробежит Артемон, пока сказочные герои не встретятся?

Ответ: 7,8 км. **Решение**. Диагональ прямоугольника равна $\sqrt{6^2+2,5^2}=\sqrt{36+\dfrac{25}{4}}$ $=\sqrt{\dfrac{169}{4}}=\dfrac{13}{2}$ (км). Поэтому встреча Мальвины и Буратино произойдёт через $\dfrac{13}{2}:(4+6)$ $=\dfrac{13}{2\cdot 10}=\dfrac{13}{20}$ (час). Всё это время пудель Артемон бегал со скоростью 12 км/час. Значит, он пробежал путь $\dfrac{13}{20}\cdot 12=\dfrac{78}{10}$ (км).

4. Туристы из США, приезжая в Европу, для перевода температуры в градусах Цельсия C в привычные для них градусы Фаренгейта F нередко используют приближённую формулу перевода: $F=2C+30$. Укажите диапазон температур (в градусах Цельсия), при которых отклонение температуры в градусах Фаренгейта, полученной по указанной приближённой формуле, от температуры, полученной по точной формуле, не превышает 5%. Для получения точной формулы следует знать, что вода замерзает при $32F$, а кипит при $212F$.

Ответ: $1\frac{11}{29} \le C \le 32\frac{8}{11}$. **Решение.** Обе шкалы температур равномерны, поэтому они связаны линейным законом: $F = kC + b$. Из условия определяются константы a и b. Получается точная формула: $F = \frac{9}{5}C + 32$.

Отклонение температур, посчитанных по двум формулам, равно: $\frac{(2C+30)-\left(\frac{9}{5}C+32\right)}{\frac{9}{5}C+32}$ $= \frac{C-10}{9C+160}$. По условию: $-\frac{5}{100} \le \frac{C-10}{9C+160} \le \frac{5}{100}$. Отсюда: $\frac{40}{29} \le C \le \frac{360}{11}$. Это означает, что в диапазоне температур примерно от 1 до 33 градусов Цельсия использование приближённой формулы вполне оправдано (ведь делать перевод градусов по ней гораздо удобнее, чем по точной формуле).

5. В два самовара – большой и маленький – налили очень горячую воду одинаковой температуры. Оба самовара имеют одну и ту же форму и сделаны из одинакового материала. Какой из них раньше остынет до комнатной температуры?

Ответ: маленький. **Решение.** Если один самовар в n раз больше другого, то его объем больше в n^3 раз, а площадь поверхности больше в n^2 раз. Поэтому на единицу поверхности в большом самоваре приходится в n раз больший объем. Значит, он будет остывать медленней.