

Задания для разминки

1. Найдите сумму квадратов корней уравнения $2^{x^2} = 4^{2-x}$.

Ответ. 12.

2. В прямоугольном треугольнике с катетом 2 и гипотенузой 4 найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из прямого угла. Ответ укажите в градусах.

Ответ. 15.

Основное задание

1.1. Проезд в Москве по карте «Тройка» в 2016 году стоит 32 рубля за одну поездку на метро и 31 рубль за одну поездку на наземном транспорте. Какое наименьшее суммарное число поездок можно совершить по этим тарифам, потратив **ровно** 5000 рублей?

Ответ. 157.

Решение. Если x — число поездок на наземном транспорте, а y — на метро, то получаем $31x + 32y = 5000$, откуда $32(x + y) = 5000 + x \geq 5000$. Следовательно, $x + y \geq 5000/32 = 156\frac{1}{4}$. Наименьшее целое значение $x + y$ равно 157, оно достигается при $x = 24$, $y = 133$.

1.2. Проезд в Москве по карте «Тройка» в 2015 году стоил 30 рублей за одну поездку на метро и 29 рублей за одну поездку на наземном транспорте. Какое наименьшее суммарное число поездок можно было совершить по этим тарифам, потратив **ровно** 4300 рублей?

Ответ. 144.

1.3. Проезд в Москве по карте «Тройка» в 2014 году стоил 28 рублей за одну поездку на метро и 26 рублей за одну поездку на наземном транспорте. Какое наименьшее суммарное число поездок можно было совершить по этим тарифам, потратив **ровно** 3800 рублей?

Ответ. 136.

1.4. Проезд в московском метро по карте «Тройка» в 2015 году стоил 30 рублей за одну поездку, а с 1 января 2016 года подорожал на 2 рубля. Какое наименьшее число поездок в метро можно было совершить по этим тарифам суммарно в 2015 и 2016 годах, потратив на это **ровно** 4700 рублей?

Ответ. 147.

1.5. Проезд в Москве на наземном транспорте по карте «Тройка» в 2015 году стоил 29 рублей за одну поездку, а с 1 января 2016 года подорожал на 2 рубля. Какое наименьшее число поездок на наземном транспорте можно было совершить по этим тарифам суммарно в 2015 и 2016 годах, потратив на это **ровно** 3700 рублей?

Ответ. 120.

2.1. Определите количество кратных трём натуральных делителей числа $11! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 11$.

Ответ. 432.

Решение. Разложение данного числа на простые множители имеет вид $11! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$. Все кратные трём делители этого числа имеют вид $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta \cdot 11^\varphi$, где $\alpha \in [0; 8]$, $\beta \in [1; 4]$, $\gamma \in [0; 2]$, $\delta \in [0; 1]$, $\varphi \in [0; 1]$. Общее количество таких делителей равно $(8+1) \cdot 4 \cdot (2+1)(1+1)(1+1) = 432$.

2.2. Определите количество чётных натуральных делителей числа $12! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 12$.

Ответ. 720.

2.3. Определите количество кратных трём натуральных делителей числа $10! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10$.

Ответ. 216.

2.4. Определите количество чётных натуральных делителей числа $13! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 12 \cdot 13$.

Ответ. 1440.

3.1. Найдите все корни уравнения $\sin(\pi \cos 2x) = \cos(\pi \sin^2 x)$, лежащие на отрезке $[-\frac{5\pi}{3}; -\frac{5\pi}{6}]$. В ответ запишите делённую на π сумму этих корней (в радианах), округлив её при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. $-6,25$.

Решение. Пусть $t = \pi \sin^2 x$. Тогда $\pi \cos 2x = \pi - 2t$, поэтому уравнение принимает вид

$$\sin(\pi - 2t) = \cos t \Leftrightarrow \sin 2t = \cos t \Leftrightarrow (2 \sin t - 1) \cos t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ t = (-1)^l \frac{\pi}{6} + \pi l, \quad k, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Так как $0 \leq t \leq \pi$, эти равенства возможны только при $k = 0, l = 0$ и $l = 1$. Следовательно, $\sin^2 x = \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ или $\frac{5}{6}$. Учитывая, что $\arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$, получаем решение исходного уравнения: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, x = \pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\pi m}{2}, n, m \in \mathbb{Z}$. Поскольку $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{\pi}{6} (= \arcsin \frac{1}{2})$, на отрезок $[-\frac{5\pi}{3}; -\frac{5\pi}{6}]$ попадают 5 корней $-\pi \pm \alpha, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, сумма которых равна $-\frac{25\pi}{4}$.

3.2. Найдите все корни уравнения $\cos(\pi \sin^2 x) = \sin(\pi \cos 2x)$, принадлежащие интервалу $(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3})$. В ответ запишите делённую на π сумму этих корней (в радианах), округлив её при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. $-8,75$.

3.3. Найдите все корни уравнения $\sin(\pi \cos 2x) + \cos(\pi \cos^2 x) = 0$, принадлежащие интервалу $(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\pi}{3})$. В ответ запишите делённую на π сумму этих корней (в радианах), округлив её при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. $-3,75$.

3.4. Найдите все корни уравнения $\cos(\pi \cos^2 x) + \sin(\pi \cos 2x) = 0$, лежащие на отрезке $[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}]$. В ответ запишите делённую на π сумму этих корней (в радианах), округлив её при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. $-5,25$.

4.1. В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD . Определите расстояние между серединой отрезка AD и прямой BC , если $AC = 6, BC = 5, BD = 3$. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ. $4,24$ (точное значение: $\sqrt{5} + 2$).

Решение. Пусть $AC = a, BC = b, BD = c, N$ — точка пересечения хорд, M — середина AD , H — точка пересечения прямых MN и BC . Обозначим $\angle BAD = \alpha, \angle CDA = \beta, \alpha + \beta = 90^\circ$. Тогда $\angle BNH = \angle ANM = \angle MAN = \alpha, \angle CNH = \angle MND = \angle NDM = \beta, \angle BCD = \angle DAN = \alpha, \angle CBA = \angle CDA = \beta$ как опирающиеся на одну и ту же хорду. Поэтому прямые NH и BC перпендикулярны, и искомое расстояние равно длине отрезка MH .

Пусть $AN = x, NB = y, CN = u, ND = v$. Из подобия $\triangle ACN$ и $\triangle DBN$ и теоремы Пифагора получаем $\frac{u}{y} = \frac{a}{c}, u^2 + y^2 = b^2, x^2 = a^2 - u^2, v^2 = c^2 - y^2$. В итоге

$$MH = \frac{\sqrt{x^2 + v^2}}{2} + \frac{uy}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}{2} + \frac{abc}{a^2 + c^2},$$

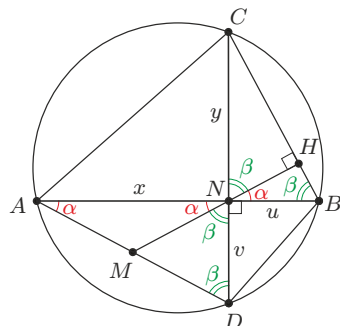
что при $AC = 6, BC = 5, BD = 3$ даёт $MH = \sqrt{5} + 2 \approx 4,24$.

4.2. Четырёхугольник $KLMN$ со сторонами $KL = 4, LM = 10, MN = 12$ вписан в окружность. Определите расстояние между серединой стороны KN и прямой LM , если прямые KM и LN перпендикулярны. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ. $6,87$ (точное значение: $\sqrt{15} + 3$).

4.3. В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD . Определите расстояние между серединой отрезка AD и прямой BC , если $BD = 6, AC = 12, BC = 10$. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ. $8,47$ (точное значение: $2\sqrt{5} + 4$).



4.4. Четырёхугольник $KLMN$ со сторонами $MN = 6$, $KL = 2$, $LM = 5$ вписан в окружность. Определите расстояние между серединой стороны KN и прямой LM , если прямые KM и LN перпендикулярны. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ. 3,44 (точное значение: $\frac{\sqrt{15}+3}{2}$).

5.1. Решите неравенство

$$8 \cdot \frac{|x+1| - |x-7|}{|2x-3| - |2x-9|} + 3 \cdot \frac{|x+1| + |x-7|}{|2x-3| + |2x-9|} \leq 8.$$

В ответ запишите сумму его целочисленных решений, удовлетворяющих условию $|x| < 120$.

Ответ. 6 (решение неравенства: $[\frac{3}{2}; 3) \cup (3; \frac{9}{2}]$).

Решение. Обозначим через a и b соответственно первое и второе слагаемые в левой части неравенства. Тогда $b > 0$ и

$$ab = 24 \cdot \frac{(x+1)^2 - (x-7)^2}{(2x-3)^2 - (2x-9)^2} = 24 \cdot \frac{8 \cdot (2x-6)}{6 \cdot (4x-12)} = 16$$

при $x \neq 3$, откуда $a = \frac{16}{b}$. Неравенство $\frac{16}{b} + b \leq 8$ ($\Leftrightarrow (\frac{4}{\sqrt{b}} - \sqrt{b})^2 \leq 0$) выполнено только при $b = 4$. Остаётся решить уравнение

$$3 \cdot \frac{|x+1| + |x-7|}{|2x-3| + |2x-9|} = 4.$$

Если $x \geq 7$ или $x \leq -1$, то выражение в левой части равно $\frac{3}{2}$. Если $-1 < x < \frac{3}{2}$ или $\frac{9}{2} < x < 7$, то оно равно $\frac{6}{|3-x|} < 4$. При всех $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$ уравнение обращается в верное равенство. Итак, с учётом условия $x \neq 3$ получаем решение исходного неравенства: $[\frac{3}{2}; 3) \cup (3; \frac{9}{2}]$. Целочисленными решениями являются 2 и 4, они оба удовлетворяют условию $|x| < 120$, их сумма равна 6.

5.2. Решите неравенство

$$8 \cdot \frac{|x+3| - |x-5|}{|2x-11| - |2x+7|} - 9 \cdot \frac{|x+3| + |x-5|}{|2x-11| + |2x+7|} \geq -8.$$

В ответ запишите сумму его целочисленных решений, удовлетворяющих условию $|x| < 90$.

Ответ. 8 (решение неравенства: $[-3; 1) \cup (1; 5]$).

5.3. Решите неравенство

$$12 \cdot \frac{|x+10| - |x-20|}{|4x-25| - |4x-15|} - \frac{|x+10| + |x-20|}{|4x-25| + |4x-15|} \geq -6.$$

В ответ запишите сумму его целочисленных решений, удовлетворяющих условию $|x| < 100$.

Ответ. 10 (решение неравенства: $[\frac{15}{4}; 5) \cup (5; \frac{25}{4}]$).

5.4. Решите неравенство

$$9 \cdot \frac{|x+4| - |x-2|}{|3x+14| - |3x-8|} + 11 \cdot \frac{|x+4| + |x-2|}{|3x+14| + |3x-8|} \leq 6.$$

В ответ запишите сумму его целочисленных решений, удовлетворяющих условию $|x| < 110$.

Ответ. -6 (решение неравенства: $[-4; -1) \cup (-1; 2]$).

6.1. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: -1, 4, 6, 9, 10, 11, 15, 16, 20, 22. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. -4914 (числа на доске: -3, 2, 7, 9, 13).

Решение. Сумма чисел полученного набора равна 112. Каждое число из исходных пяти в этой сумме повторяется 4 раза. Следовательно, сумма искомых чисел равна $112 : 4 = 28$. Сумма

двух наименьших равна -1 , сумма двух наибольших равна 22 . Следовательно, среднее число (третье по величине из пяти) равно $28 - 22 - (-1) = 7$. В наборе из условия задачи второе число равно сумме первого и третьего искомых чисел, откуда первое число равно $4 - 7 = -3$, а второе равно 2 . Аналогично получаем, что четвертое число равно 9 , а пятое равно 13 . Итак, на доске написаны числа $-3, 2, 7, 9, 13$, а их произведение равно -4914 .

6.2. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: $3, 8, 9, 16, 17, 17, 18, 22, 23, 31$. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. 3360 (числа на доске: $1, 2, 7, 15, 16$).

6.3. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: $2, 6, 10, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24$. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. -3003 (числа на доске: $-1, 3, 7, 11, 13$).

6.4. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: $6, 9, 10, 13, 13, 14, 17, 17, 20, 21$. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. 4320 (числа на доске: $1, 5, 8, 9, 12$).

6.5. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: $-1, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 18, 20, 24$. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. -2002 (числа на доске: $-2, 1, 7, 11, 13$).

6.6. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: $5, 8, 9, 13, 14, 14, 15, 17, 18, 23$. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. 4752 (числа на доске: $2, 3, 6, 11, 12$).

6.7. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: $-1, 2, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 20$. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. -2970 (числа на доске: $-3, 2, 5, 9, 11$).

6.8. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: $5, 9, 10, 11, 12, 16, 16, 17, 21, 23$. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. 5292 (числа на доске: $2, 3, 7, 9, 14$).

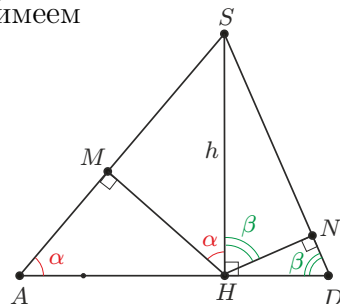
7.1. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{12}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. $374,12$ (точное значение: $216\sqrt{3}$).

Решение. Рассмотрим сечение пирамиды $SABC$, проходящее через боковое ребро SA и апофему противоположной грани SD . Тогда SH — высота пирамиды, расстояние от H до прямой SD равно $HN = 2x$, где $x = 2$, а расстояние от H до прямой SA равно $HM = 2y$, где $y = 2\sqrt{3}$. Обозначим $SH = h$, $AB = a$ и $HD = d = a\sqrt{3}/6$, тогда $AH = 2d$, $V = \frac{a^2 h}{4\sqrt{3}} = \sqrt{3}d^2 h$ и, пользуясь связью между высотой прямоугольного треугольника и его катетами, имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{d^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{1}{(2x)^2} \\ \frac{1}{(2d)^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{1}{(2y)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2 = \frac{3x^2 y^2}{y^2 - x^2} \\ h^2 = \frac{12x^2 y^2}{4x^2 - y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{18x^3 y^3}{(y^2 - x^2)\sqrt{4x^2 - y^2}} = 216\sqrt{3} \approx 374,12.$$



7.2. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{11}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 335,64 (точное значение: $1584\sqrt{2,2/7}$).

7.3. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{10}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 309,84 (точное значение: $80\sqrt{15}$).

7.4. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{7}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 296,32 (точное значение: $112\sqrt{7}$).

7.5. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{6}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 334,63 (точное значение: $432\sqrt{0,6}$).

7.6. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{5}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 485,42 (точное значение: $720\sqrt{5/11}$).

7.7. Расстояния от середины высоты правильной треугольной пирамиды до боковой грани и до бокового ребра равны 2 и $\sqrt{13}$ соответственно. Найдите объём пирамиды. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 432,99 (точное значение: $208\sqrt{13/3}$).

7.8. Расстояния от середины высоты правильной треугольной пирамиды до боковой грани и до бокового ребра равны 2 и $\sqrt{14}$ соответственно. Найдите объём пирамиды. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 533,38 (точное значение: $201,6\sqrt{7}$).

8.1. В разложении функции $f(x) = (1 + x - x^2)^{20}$ по степеням x найдите коэффициент при x^{3n} , где n равно сумме всех коэффициентов разложения.

Ответ. 760.

Решение. Разложение по степеням x имеет вид $f(x) = \sum_{k=0}^{40} a_k x^k$. Сумма всех коэффициентов равна $\sum_{k=0}^{40} a_k = f(1) = 1$. Следовательно, надо найти коэффициент при x^3 . Имеем:

$$f(x) = ((1 - x^2) + x)^{20} = (1 - x^2)^{20} + 20(1 - x^2)^{19}x + \frac{20 \cdot 19}{2}(1 - x^2)^{18}x^2 + \\ + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6}(1 - x^2)^{17}x^3 + \text{слагаемые, в которые } x^3 \text{ не входит.}$$

В первое и третье слагаемое x^3 также не входит. Во второе слагаемое x^3 входит с коэффициентом $(-20) \cdot 19 = -380$; в четвёртое слагаемое x^3 входит с коэффициентом $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140$. Значит коэффициент при x^3 равен $-380 + 1140 = 760$.

8.2. В разложении функции $g(x) = (1 - x + x^2)^{15}$ по степеням x найдите коэффициент при x^{3n} , где n есть сумма всех коэффициентов разложения.

Ответ. -665.

8.3. В разложении функции $f(x) = (1 + x - x^2)^{25}$ по степеням x найдите коэффициент при x^{3n} , где n есть сумма всех коэффициентов разложения.

Ответ. 1700.

8.4. В разложении функции $g(x) = (1 - x + x^2)^{20}$ по степеням x найдите коэффициент при x^{3n} , где n есть сумма всех коэффициентов разложения.

Ответ. -1520 .

9.1. Найдите наименьшее четырёхзначное число, не кратное 10 и обладающее следующим свойством: если переставить цифры в обратном порядке, то получится число, которое является делителем первоначального, причём частное отлично от единицы.

Ответ. 8712.

Решение. Найдём все четырёхзначные числа, обладающие указанным в условии задачи свойством. Пусть $\overline{abcd}$ — искомое число, тогда $\overline{dcba}$ — число, полученное из него перестановкой цифр в обратном порядке, $a, d \neq 0$. По условию $\overline{abcd} = k \cdot \overline{dcba}$, где k — натуральное, $k > 1$. С одной стороны, имеем $1000kd < k \cdot \overline{dcba} = \overline{abcd} < 1000(a + 1)$, откуда $kd < a + 1$, поэтому $kd \leq a$, $d \leq \frac{a}{k}$. С другой стороны, $1000k(d + 1) > k \cdot \overline{dcba} = \overline{abcd} > 1000a$, откуда $k(d + 1) > a$, $d > \frac{a}{k} - 1$. Следовательно, $d = \left[\frac{a}{k} \right]$, где $[x]$ означает целую часть числа x (т.е. наименьшее целое число, не превосходящее x). Тогда $a \geq k$, так как иначе $d = \left[\frac{a}{k} \right] = 0$.

Заметим также, что последняя цифра числа ak должна быть равна $d = \left[\frac{a}{k} \right]$. Составим таблицу, в клетки которой для каждой пары a и k запишем последовательно значение $\left[\frac{a}{k} \right]$ (если оно отлично от нуля) и последнюю цифру числа ak .

$k \backslash a$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1 4	1 6	2 8	2 0	3 2	3 4	4 6	4 8
3		1 9	1 2	1 5	2 8	2 1	2 4	3 7
4			1 6	1 0	1 4	1 8	2 2	2 6
5				1 5	1 0	1 5	1 0	1 5
6					1 6	1 2	1 8	1 4
7						1 9	1 6	1 3
8							1 4	1 2
9								1 1

Здесь выделены те клетки, в которых обе цифры одинаковы. Таким образом, требуемое условие может быть выполнено только в двух случаях: 1) $a = 8$, $k = 4$ (тогда $d = 2$) и 2) $a = 9$, $k = 9$ (тогда $d = 1$).

В первом случае для цифр b и c получаем равенство

$$8000 + 100b + 10c + 2 = 4 \cdot (2000 + 100c + 10b + 8) \Leftrightarrow 2b = 13c + 1.$$

Если $c = 0$, то $2b = 1$, что невозможно. При $c \geq 2$ получим $b = \frac{13c+1}{2} > 13$, что также невозможно. Остаётся вариант $c = 1$, $b = 7$.

Во втором случае для цифр b и c получаем равенство

$$9000 + 100b + 10c + 1 = 9 \cdot (1000 + 100c + 10b + 9) \Leftrightarrow b = 89c + 8.$$

При $c \geq 1$ имеем $b = 89c + 8 \geq 97$, что невозможно. Поэтому в этом случае $c = 0$, $b = 8$.

Итак, указанным в условии задачи свойством обладают только числа 8712 и 9801.

9.2. Найдите наибольшее четырёхзначное число, не кратное 10 и обладающее следующим свойством: если переставить цифры в обратном порядке, то получится число, которое является делителем первоначального, причём частное отлично от единицы.

Ответ. 9801.

9.3. Найдите наименьшее четырёхзначное число, не делящееся на 10 и обладающее следующим свойством: если переставить цифры в обратном порядке, то получится число, которое кратно первоначальному, причём частное отлично от единицы.

Ответ. 1089.

9.4. Найдите наибольшее четырёхзначное число, не делящееся на 10 и обладающее следующим свойством: если переставить цифры в обратном порядке, то получится число, которое кратно первоначальному, причём частное отлично от единицы.

Ответ. 2178.

10.1. Предложите текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{11}{x + 1,5} + \frac{8}{x} \geq \frac{12}{x + 2} + 2.$$

Напишите формулировку задачи, её решение и ответ.

Пример требуемой задачи. Пункты А и Б соединены двумя дорогами: одна длиной 19 км, а другая — 12 км. В 12:00 из пункта А по длинной дороге вышел пешеход и прошёл первые 11 км с некоторой постоянной скоростью, а затем, утомившись, шёл остаток пути до пункта Б в среднем на 1,5 км/ч медленнее. В 14:00 из пункта А по короткой дороге вышел второй пешеход и прошёл весь путь со средней скоростью, на 0,5 км/ч большей, чем вначале шёл первый. С какой средней скоростью первый пешеход прошёл последние 8 км пути, если известно, что он прибыл в пункт Б не раньше второго пешехода?

Краткое решение. Если x — искомая средняя скорость первого пешехода (в км/ч) на втором участке пути, то $x + 1,5$ — его скорость на первом участке, а $(x + 1,5) + 0,5 = x + 2$ — средняя скорость второго пешехода. Тогда, подсчитывая время, затраченное каждым из пешеходов на дорогу, из условия задачи получаем требуемое неравенство. Поскольку по смыслу задачи $x > 0$, обе части неравенства можно домножить на величину $x(x + 1,5)(x + 2) > 0$, тогда получим $11x(x + 2) + 8(x + 1,5)(x + 2) \geq 12x(x + 1,5) + 2x(x + 1,5)(x + 2)$, или, после преобразований, $(x - 4)(x + 1)(x + 3) \leq 0$. Следовательно, $0 < x \leq 4$, причём все найденные значения x удовлетворяют условию задачи.

Ответ: не более 4 км/ч.

10.2. Предложите текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{8}{x - 1} + \frac{6}{x} + 1 \leq \frac{9}{x - 3,5}.$$

Напишите формулировку задачи, её решение и ответ.

10.3. Предложите текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{40}{x} + \frac{30}{x + 1} \geq \frac{90}{2x - 5} - 5.$$

Напишите формулировку задачи, её решение и ответ.

10.4. Предложите текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{20}{x - 2} + \frac{55}{2x - 1} - 5 \leq \frac{30}{x}.$$

Напишите формулировку задачи, её решение и ответ.

Задания для разминки

1. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x + 4$.

Ответ. -5 .

2. Найдите площадь равнобокой трапеции с основаниями 2 и 8, в которую можно вписать окружность.

Ответ. 20.

Основное задание

1.1. Если 200-й день какого-то года воскресенье и 100-й день следующего за ним года — тоже воскресенье, то каким днём недели был 300-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).

Ответ. 1.

Решение. Между 200-м днем года и 100-м днем следующего года либо $165 + 100 = 265$, либо $166 + 100 = 266$ дней. Число 266 кратно 7, число 265 — нет. Поэтому в текущем году 366 дней, то есть он високосный. Значит, предыдущий год был обычным. Поэтому между 300-м днём предыдущего года и 200-м днём текущего $65 + 200 = 265$ дней. Так как $265 = 7 \cdot 37 + 6$, то количество дней на 1 меньше числа, кратного 7. Значит, это был понедельник.

1.2. Если 300-й день какого-то года воскресенье и 200-й день следующего за ним года — тоже воскресенье, то каким днём недели был 100-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).

Ответ. 2.

1.3. Если 200-й день какого-то года вторник и 100-й день следующего за ним года — тоже вторник, то каким днём недели был 300-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).

Ответ. 3.

1.4. Если 300-й день какого-то года вторник и 200-й день следующего за ним года — тоже вторник, то каким днём недели был 100-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).

Ответ. 4.

1.5. Если 200-й день какого-то года четверг и 100-й день следующего за ним года — тоже четверг, то каким днём недели был 300-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).

Ответ. 5.

1.6. Если 200-й день какого-то года пятница и 100-й день следующего за ним года — тоже пятница, то каким днём недели был 300-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).

Ответ. 6.

1.7. Если 300-й день какого-то года пятница и 200-й день следующего за ним года — тоже пятница, то каким днём недели был 100-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).

Ответ. 7.

2.1. Сколько слагаемых получится, если в выражении $(4x^3 + x^{-3} + 2)^{2016}$ раскрыть скобки и привести подобные члены?

Ответ. 4033.

Решение. В получившейся сумме будут одночлены вида $k_n x^{3n}$ для всех целых $n \in [-2016; 2016]$ с положительными коэффициентами k_n , т. е. всего $2 \cdot 2016 + 1 = 4033$ слагаемых.

2.2. Сколько слагаемых получится, если в выражении $(y^2 + y^{-2} + 5)^{2017}$ раскрыть скобки и привести подобные члены?

Ответ. 4035.

2.3. Сколько слагаемых получится, если в выражении $(2z^4 + 3z^{-4} + 1)^{2005}$ раскрыть скобки и привести подобные члены?

Ответ. 4011.

2.4. Сколько слагаемых получится, если в выражении $(t^3 + 5t^{-3} + 3)^{1711}$ раскрыть скобки и привести подобные члены?

Ответ. 3423.

2.5. Сколько слагаемых получится, если в выражении $(x^2 + 3x^{-2} + 4)^{1755}$ раскрыть скобки и привести подобные члены?

Ответ. 3511.

3.1. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку D и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AD и DB . Найдите площадь оставшейся фигуры, если длина лежащей внутри неё части хорды, проходящей через точку D перпендикулярно AB , равна 6. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 28,27 (точное значение: 9π).

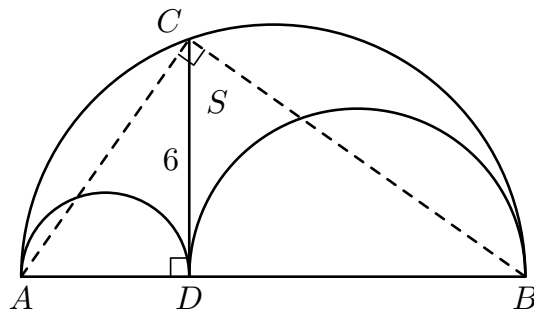
Решение. Площадь S получившейся фигуры равна

$$S = \frac{\pi}{2} \left(\left(\frac{AB}{2} \right)^2 - \left(\frac{AD}{2} \right)^2 - \left(\frac{DB}{2} \right)^2 \right) = \frac{\pi}{8} (AB^2 - AD^2 - BD^2).$$

Так как $AB = AD + DB$, получаем, что

$$S = \frac{\pi}{4} AD \cdot BD.$$

Обозначим через C такую точку на дуге полукруга, что $DC \perp AB$. Так как $DC^2 = AD \cdot BD$, то $S = \pi \left(\frac{DC}{2} \right)^2$. По условию $DC = 6$, следовательно $S = 9\pi \approx 28,27$.



3.2. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку C и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AC и CB . Найдите площадь оставшейся фигуры, если длина лежащей внутри неё части хорды, проходящей через точку C перпендикулярно AB , равна 8. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 50,27 (точное значение: 16π).

3.3. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку M и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AM и MB . Найдите площадь оставшейся фигуры, если длина лежащей внутри неё части хорды, проходящей через точку M перпендикулярно AB , равна $2\sqrt{7}$. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 21,99 (точное значение: 7π).

3.4. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку D и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AD и DB . Площадь оставшейся фигуры оказалась равна 8π . Найдите длину лежащей внутри неё части хорды, проходящей через точку D перпендикулярно AB . При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 5,66 (точное значение: $4\sqrt{2}$).

3.5. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку C и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AC и CB . Площадь оставшейся фигуры оказалась равна 10π . Найдите длину лежащей внутри неё части хорды, проходящей через точку C перпендикулярно AB . При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 6,32 (точное значение: $2\sqrt{10}$).

3.6. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку M и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AM и MB . Площадь оставшейся фигуры оказалась равна $16\pi^3$. Найдите длину лежащей внутри неё части хорды, проходящей через точку M перпендикулярно AB . При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 25,13 (точное значение: 8π).

4.1. Функция f удовлетворяет равенству $(x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}$ для каждого значения x , не равного 0 и 1. Найдите $f\left(\frac{2016}{2017}\right)$.

Ответ. 2017.

Решение. Подставим в равенство $\frac{1}{x}$ вместо x . Вместе с исходным равенством получим систему из двух линейных уравнений относительно $f(x)$ и $f\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\begin{cases} (x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}, \\ \left(\frac{1}{x}-1\right)f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{1-x}. \end{cases}$$

Вычитая из второго равенства первое, умноженное на $\frac{1-x}{x}$, находим $\left(1 + \frac{(1-x)^2}{x}\right)f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{x}$, откуда $\frac{x^2-x+1}{x}f(x) = \frac{x^2-x+1}{x(1-x)}$, или $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Следовательно, $f\left(\frac{2016}{2017}\right) = 2017$.

4.2. Функция f удовлетворяет равенству $(1-x)f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}$ для каждого значения x , не равного 0 и 1. Найдите $f\left(\frac{2017}{2016}\right)$.

Ответ. -2016.

4.3. Функция f удовлетворяет равенству $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1-x}{x}f(x) = \frac{x}{1-x}$ для каждого значения x , не равного 0 и 1. Найдите $f\left(\frac{2017}{2018}\right)$.

Ответ. -2017.

4.4. Функция f удовлетворяет равенству $f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x-1}{x}f(x) = -\frac{x}{x-1}$ для каждого значения x , не равного 0 и 1. Найдите $f\left(\frac{2018}{2017}\right)$.

Ответ. 2018.

4.5. Функция g удовлетворяет равенству $(1+x)g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x}$ для каждого значения x , не равного 0 и -1. Найдите $g\left(-\frac{2015}{2016}\right)$.

Ответ. 2016.

4.6. Функция g удовлетворяет равенству $g\left(\frac{1}{x}\right) - (x+1)g(x) = -\frac{1}{x+1}$ для каждого значения x , не равного 0 и -1. Найдите $g\left(-\frac{2016}{2015}\right)$.

Ответ. -2015.

4.7. Функция g удовлетворяет равенству $g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1+x}{x}g(x) = -\frac{x}{1+x}$ для каждого значения x , не равного 0 и -1. Найдите $g\left(-\frac{2014}{2015}\right)$.

Ответ. -2014.

4.8. Функция g удовлетворяет равенству $\frac{x+1}{x}g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x+1}$ для каждого значения x , не равного 0 и -1. Найдите $g\left(-\frac{2019}{2018}\right)$.

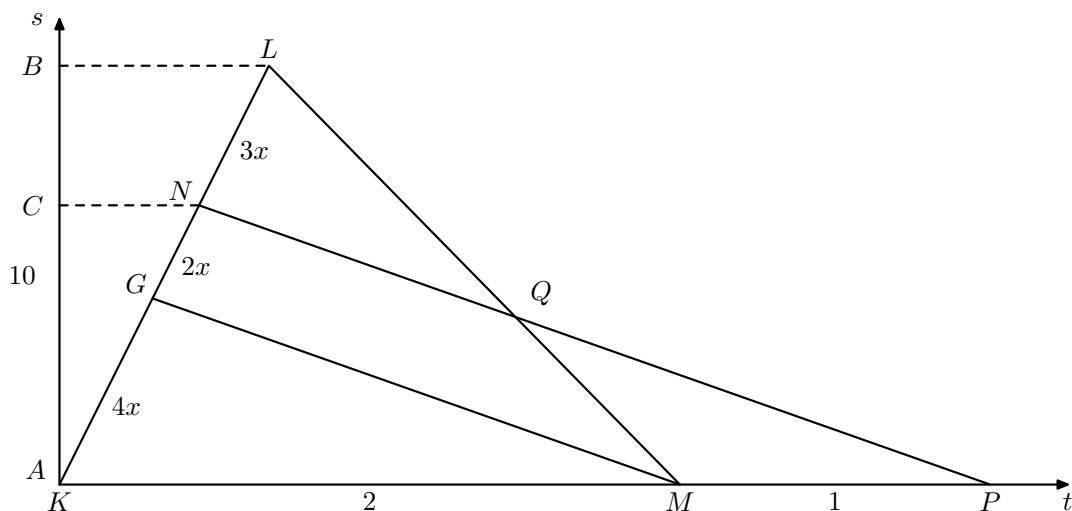
Ответ. 2019.

5.1. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 10 км, в 7:00 выехал автомобиль. Проехав $\frac{2}{3}$ пути, автомобиль миновал пункт C , из которого в этот момент в пункт

А выехал велосипедист. Как только автомобиль прибыл в B , оттуда в обратном направлении сразу же выехал автобус и прибыл в A в 9:00. В скольких километрах от B автобус догнал велосипедиста, если велосипедист прибыл в пункт A в 10:00 и скорость каждого участника движения постоянна?

Ответ. 6.

Решение. Изобразим графики движения автомобиля (отрезок KL), автобуса (отрезок LM) и велосипедиста (отрезок NP) в осях $(t; s)$, где t — время (в часах), s — расстояние (в километрах) от пункта A . Пусть Q — точка пересечения LM и NP . По условию $MK = 2$ и $PM = 1$. Проведём $MG \parallel NQ$, $G \in KL$, тогда по теореме Фалеса $\frac{NG}{GK} = \frac{PM}{MK} = \frac{1}{2}$. Значит, если $NG = 2x$, то $GK = 4x$, а $LN = 3x$. Откуда (опять по теореме Фалеса) $\frac{LQ}{QM} = \frac{LN}{NG} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$. Поэтому искомое расстояние равно $\frac{3}{5} \cdot 10 = 6$ км.



Участники, знакомые с теоремой Менелая, могут решить задачу так. Точки N , Q и P лежат на одной прямой, поэтому $\frac{KN}{NL} \cdot \frac{LQ}{QM} \cdot \frac{MP}{PK} = 1$, или $\frac{2}{1} \cdot \frac{LQ}{QM} \cdot \frac{1}{3} = 1$. Значит, $\frac{LQ}{QM} = \frac{3}{2}$.

5.2. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 20 км, в 10:00 выехал автомобиль. Проехав $2/3$ пути, автомобиль миновал пункт C , из которого в этот момент в пункт A выехал велосипедист. Как только автомобиль прибыл в B , оттуда в обратном направлении сразу же выехал автобус, который догнал велосипедиста на расстоянии 12 км от B и прибыл в A в 12:00. На сколько минут позже автобуса в пункт A прибыл велосипедист, если скорость каждого участника движения постоянна?

Ответ. 60.

5.3. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 7 км, в 11:00 выехал велосипедист. Проехав $2/5$ пути, велосипедист миновал пункт C , из которого в этот момент в пункт A вышел пешеход. Как только велосипедист прибыл в B , оттуда в обратном направлении сразу же выехал мотоциклист и прибыл в A в 12:00. В скольких километрах от B мотоциклист догнал пешехода, если пешеход прибыл в A в 13:30 и скорость каждого участника движения постоянна?

Ответ. 5.

5.4. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 14 км, в 12:00 выехал велосипедист. Проехав $2/5$ пути, велосипедист миновал пункт C , из которого в этот момент в пункт A вышел пешеход. Как только велосипедист прибыл в B , оттуда в обратном направлении сразу же выехал мотоциклист, который догнал пешехода на расстоянии 4 км от A и прибыл в A в 13:00. На сколько минут позже мотоциклиста в A прибыл пешеход, если скорость каждого участника движения постоянна?

Ответ. 90.

6.1. Найдите сумму всех целых чисел $x \in [-3; 13]$, удовлетворяющих неравенству

$$\left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{12}\right) \left(1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{12}\right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{6} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}\right) \leq 16.$$

Ответ. 28.

Решение. Обозначим $t = \frac{\pi x}{12}$, тогда неравенство принимает вид

$$(1 - \operatorname{ctg}^2 t) (1 - 3 \operatorname{ctg}^2 t) (1 - \operatorname{tg} 2t \cdot \operatorname{ctg} 3t) \leq 16.$$

Так как

$$1 - \operatorname{ctg}^2 t = -\frac{\cos 2t}{\sin^2 t}, \quad 1 - 3 \operatorname{ctg}^2 t = \frac{\sin^2 t - 3 \cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{4 \sin^2 t - 3}{\sin^2 t} = -\frac{\sin 3t}{\sin^3 t},$$

$$1 - \operatorname{tg} 2t \cdot \operatorname{ctg} 3t = 1 - \frac{\sin 2t \cdot \cos 3t}{\cos 2t \cdot \sin 3t} = \frac{\sin t}{\cos 2t \cdot \sin 3t},$$

то неравенство приводится к виду $\frac{1}{\sin^4 t} \leq 16$, то есть $|\sin t| \geq \frac{1}{2}$. Поэтому $t \in [\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Необходимо ещё учесть условия $\sin t \neq 0$, $\cos 2t \neq 0$, $\sin 3t \neq 0$. Получаем, что из полученного решения нужно вырезать точки $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ и $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $x \in [2 + 12n; 10 + 12n]$, $x \neq 3 + 6n$, $x \neq \pm 4 + 12n$. В отрезок $[-3; 13]$ попадают числа $-2, 2, 5, 6, 7, 10$. Их сумма равна 28.

6.2. Найдите сумму всех целых чисел $x \in [-11; 5]$, удовлетворяющих неравенству

$$\left(1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{12}\right) \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{12}\right) \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}\right) \leq 16.$$

Ответ. -23.

6.3. Найдите сумму всех целых чисел $x \in [-19; 10]$, удовлетворяющих неравенству

$$\left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{24}\right) \left(1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{24}\right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{12} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{8}\right) \leq 4.$$

Ответ. -82.

6.4. Найдите сумму всех целых чисел $x \in [-7; 18]$, удовлетворяющих неравенству

$$\left(1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{24}\right) \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{24}\right) \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{8} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{12}\right) \leq 4.$$

Ответ. 101.

7.1. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 2 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол 45° с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

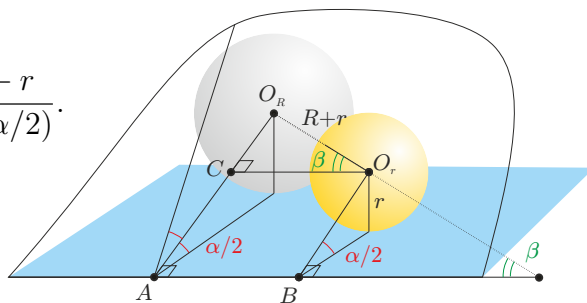
Ответ. 0,56 (точное значение: $\frac{5}{9}$).

Решение. Обозначим искомую величину двугранного угла через α . Пусть R и r — радиусы, а O_R и O_r — центры большего и меньшего шаров соответственно, A и B — основания перпендикуляров, проведённых из O_R и O_r к ребру двугранного угла, β — угол между ребром двугранного угла и $O_R O_r$, $R = kr$. Тогда (см. рис.)

$$O_R A = \frac{R}{\sin(\alpha/2)}, \quad O_r B = \frac{r}{\sin(\alpha/2)} \Rightarrow CO_R = \frac{R - r}{\sin(\alpha/2)}.$$

Из прямоугольного треугольника $O_R O_r C$ находим

$$\sin \beta = \frac{CO_R}{O_R O_r} = \frac{R - r}{(R + r) \sin(\alpha/2)} = \frac{k - 1}{k + 1} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha/2)}.$$



Отсюда $\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{\sin \beta}\right)$, $\cos \alpha = 1 - 2\left(\frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{\sin \beta}\right)^2$. При $k = 2$, $\beta = 45^\circ$ получаем $\cos \alpha = \frac{5}{9}$.

7.2. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 3 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол 60° с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,33 (точное значение: $\frac{1}{3}$).

7.3. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 4 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол 60° с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,04 (это значение точное).

7.4. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 2 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол 30° с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,11 (точное значение: $\frac{1}{9}$).

7.5. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 1,5 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол 30° с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,68 (это значение точное).

7.6. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 1,5 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол 45° с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,84 (это значение точное).

8.1. Вычислите $\frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$. Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,9.

Решение. Поскольку

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)n(n+1-n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

получаем, что число из условия задачи равно

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}.$$

8.2. Вычислите $\frac{1}{5\sqrt{4} + 4\sqrt{5}} + \frac{1}{6\sqrt{5} + 5\sqrt{6}} + \frac{1}{7\sqrt{6} + 6\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$. Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,4.

8.3. Вычислите $\frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{400\sqrt{399} + 399\sqrt{400}}$. Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,95.

8.4. Вычислите $\frac{1}{5\sqrt{4} + 4\sqrt{5}} + \frac{1}{6\sqrt{5} + 5\sqrt{6}} + \frac{1}{7\sqrt{6} + 6\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{400\sqrt{399} + 399\sqrt{400}}$. Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,45.

8.5. Вычислите $\frac{1}{2\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}} - \frac{1}{5\sqrt{4}-4\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}-99\sqrt{100}}$.
Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 1,1.

8.6. Вычислите $\frac{1}{2\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}} - \frac{1}{5\sqrt{4}-4\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{400\sqrt{399}-399\sqrt{400}}$.
Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 1,05.

9.1. Найдите наименьшее натуральное число n , для которого в десятичной записи n вместе с n^2 используются все цифры от 1 до 9 **ровно** по одному разу.

Ответ. 567.

Решение. Если $n \geq 1000$, то $n^2 \geq 10^6$, тогда десятичные записи n и n^2 содержат вместе не менее 11 цифр. Если же $n \leq 316$, то $n^2 \leq 99856$, и десятичные записи n и n^2 содержат вместе не более 8 цифр. Следовательно, $317 \leq n \leq 999$.

Сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45 и делится на 9, поэтому $n + n^2$ также делится на 9. Поскольку $n + n^2 = n(n + 1)$ есть произведение двух взаимно простых чисел, оно делится на 9 только в двух случаях: 1) n делится на 9; 2) $n + 1$ делится на 9, т.е. n имеет остаток 8 при делении на 9.

Первые такие числа, бóльшие 316, равны 323 и 324. Значит, искомые числа лежат в арифметических прогрессиях $323 + 9k$ и $324 + 9k$, $k \in \mathbb{N}$. При этом в записи числа n не должно быть одинаковых цифр и цифры 0, и оно не может заканчиваться на 1, 5 и 6 (иначе его квадрат оканчивается на ту же цифру). Кроме того, если n содержит цифру 4 и заканчивается на 2 или 8, то оно также не подходит, так как тогда n^2 заканчивается на 4. С учётом этого будем выписывать последовательно оставшиеся возможные варианты $n \geq 317$ в таблицу:

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
324	104976	378	142884	459	210681	539	290521
359	128881	387	149769	467	218089	549	301401
368	135424	413	170569	512	262144	567	321489
369	136161	423	178929	513	263169	...	...

Среди проверенных чисел первым, удовлетворяющим условию задачи, оказывается число 567. Аналогично, перебирая возможные значения $n \leq 999$ «с конца», можно найти наибольшее из таких чисел, а именно 854 (при этом перебор можно сократить, замечая, что при $n \geq 953$ запись числа $n^2 \geq 908209$ также содержит цифру 9).

9.2. Найдите наибольшее натуральное число n , для которого в десятичной записи n вместе с n^2 используются все цифры от 1 до 9 **ровно** по одному разу.

Ответ. 854.

9.3. Найдите наименьшее число n , которое является квадратом натурального числа и для которого в десятичной записи n вместе с $\sqrt{n}$ используются все цифры от 1 до 9 **ровно** по одному разу.

Ответ. 321489.

9.4. Найдите наибольшее число n , которое является квадратом натурального числа и для которого в десятичной записи n вместе с $\sqrt{n}$ используются все цифры от 1 до 9 **ровно** по одному разу.

Ответ. 729316.

10.1. Составьте текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{50}{2x+2} + \max\left(\frac{20}{x}, \frac{30}{x+2}\right) \leq 10.$$

Напишите условие задачи, её решение и ответ.

Пример требуемой задачи. Две бригады проводят ремонт офисного помещения, состоящего из трёх кабинетов: 1-й площадью 50 м^2 , 2-й площадью 30 м^2 и 3-й площадью 20 м^2 . Производительность второй бригады выше на $2 \text{ м}^2/\text{ч}$, чем у первой. Первый кабинет они отремонтировали вместе, а затем разделились: первая бригада ремонтировала только 3-й кабинет, а вторая — только 2-й. Какова должна быть минимальная производительность первой бригады, чтобы вся работа была выполнена не более чем за 10 часов?

Краткое решение. Пусть x — производительность первой бригады (в $\text{м}^2/\text{ч}$), тогда $x + 2$ — производительность второй бригады, а $2x + 2$ — их производительность при совместной работе. Из условия задачи получаем требуемое в задании неравенство. Его нужно решить на множестве положительных значений x . Если $0 < x \leq 4$, то придём к неравенству $2x^2 - 7x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1/2] \cup [4; +\infty)$. Если $x \geq 4$, то получим неравенство $2x^2 - 5x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3/2] \cup [4; +\infty)$.

Таким образом, окончательно получаем $x \in [4; +\infty)$.

Ответ: $4 \text{ м}^2/\text{ч}$.

10.2. Составьте текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{40}{2x + 6} + \max\left(\frac{20}{x}, \frac{40}{x + 6}\right) \leq 14.$$

Напишите условие задачи, её решение и ответ.

10.3. Составьте текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{18}{2x + 1} + \max\left(\frac{16}{x}, \frac{20}{x + 1}\right) \leq 6.$$

Напишите условие задачи, её решение и ответ.

10.4. Составьте текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{36}{2x + 3} + \max\left(\frac{12}{x}, \frac{21}{x + 3}\right) \leq 8.$$

Напишите условие задачи, её решение и ответ.

Олимпиада школьников

«ЛОМОНОСОВ»

по математике

Задания заочного этапа 2016/2017 учебного года для 9 класса

1. Индиана Джонс добрался до заброшенного храма в джунглях и зашел в сокровищницу. Там стояло 5 шкатулок, причем известно, что только в одной из них клад, а остальные обрушивают каменную плиту на голову того, кто пытается их открыть. Шкатулки занумерованы слева направо. Первая, четвертая и пятая сделаны из кедра, вторая и третья - из сандалового дерева. На первой написано "Клад во мне или в 4-й шкатулке"; на второй написано "Клад в шкатулке слева от меня"; на третьей написано "Клад во мне или в крайней справа шкатулке"; на четвертой написано "В шкатулках, стоящих левее меня клада нет"; на пятой шкатулке написано "На всех остальных шкатулках написана ложь". Последний хранитель храма умирая поведал Индиане тайну: на шкатулках из кедра и из сандала написано одинаковое количество ложных утверждений. В какой шкатулке клад?

ОТВЕТ 2.

Решение: Последовательно рассмотрим варианты, каждый кроме второго приводит к противоречию.

2. Известно, что $x + y + z = 2016$ и $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{7}{224}$. Найдите $\frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x}$

ОТВЕТ:60.

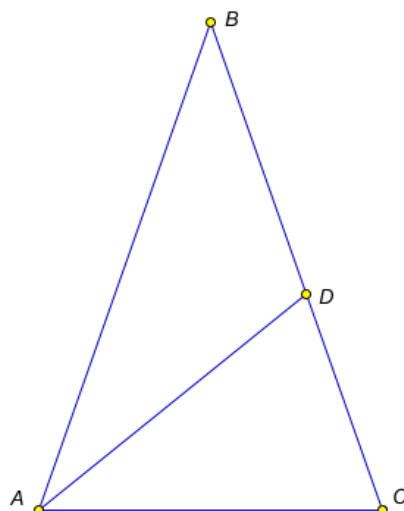
Решение: Прибавим по 1 к каждой дроби, получим $\frac{z}{x+y} + 1 + \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} + 1 = \frac{x+y+z}{x+y} + \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} = 2016 \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) = \frac{2016}{32} = 63$.

3. Равнобедренный треугольник можно разрезать на два равнобедренных треугольника (не обязательно равных). Найдите какие значения может принимать наименьший угол такого треугольника. В ответе укажите наименьшее из этих значений в градусах, умноженное на 6006.

ОТВЕТ: 154440.

Решение: Рассмотрим треугольник ABC с углами $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle B = 180^\circ - 2\alpha$. Чтобы получилось два треугольника прямая должна проходить через одну из вершин.

Рассмотрим случай, когда она проходит через вершину A и делит треугольник на два: ADB и ADC (см. рис.).



Треугольник ADC является равнобедренным в двух случаях:

- I) $\angle ADC = \alpha$. Приравнявая $\angle BAD = \angle ABD$ (т.к. угол $\angle ADB$ тупой) приходим к уравнению $180^\circ - 2\alpha = 3\alpha - 180^\circ$, откуда $\alpha = 72^\circ$. Наименьший угол тогда равен $\angle B = 36^\circ$
- II) $\angle ADC = \angle DAC = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$. Тогда $\frac{3\alpha}{2} - 90^\circ = 180^\circ - 2\alpha$, откуда $\alpha = \frac{540^\circ}{7}$. В этом случае наименьший угол равен $\angle B = \frac{180^\circ}{7}$.

Если же прямая проходит через вершину B, то случаи рассматриваются аналогично, но там наименьший угол равен 36° или 45° , что больше, чем $\frac{180}{7}$.

Умножая $\frac{180}{7}$ на 6006 и сокращая на 7, получим ответ.

4. Постройте на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|3x + 4| + |4y - 3| \leq 12$. В ответе укажите площадь получившейся фигуры.

ОТВЕТ: 24.

Решение: Сдвинем координатные оси на $-\frac{4}{3}$ по оси Ox , и на $\frac{3}{4}$ по оси Oy . В новых координатах полученная фигура задается неравенством $|3x| + |4y| \leq 12$. Несложно показать, что это будет ромб с диагоналями 6 и 8, следовательно, его площадь равна 24.

5. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 + y^2 = 6x + 2y + 15$?

ОТВЕТ: 12.

Решение: Выделим полный квадрат, получим уравнение окружности $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$. Это возможно, когда одно из слагаемых равно 25 и другое 0 (4 случая), или когда одно равно 16, а другое 9 (8 случаев).

6. Найдите наибольшее десятизначное число вида $\overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$, обладающее следующим свойством: цифра, равная a_i встречается в его записи ровно a_{9-i} раз (например, цифра, равная a_2 встречается ровно a_7 раз).

ОТВЕТ: 8888228888.

Решение: Все цифры разобьем на пары $a_0 - a_9, \dots, a_4 - a_5$. Докажем, что цифра 9 не может присутствовать в указанном числе. Допустим, $a_i = 9$, тогда парная цифра a_{9-i} встречается 9 раз. Если $a_{9-i} \neq 9$, то 9 встречается только 1 раз, поэтому получаем число, из одной девятки и девяти единиц, но тогда две единицы стоят в одной паре, что

противоречит условию. Если же $a_{9-i} = 9$, то получим число из девяти цифр 9 и одной, не равной 9, и эта цифра образует пару с девяткой, что тоже невозможно.

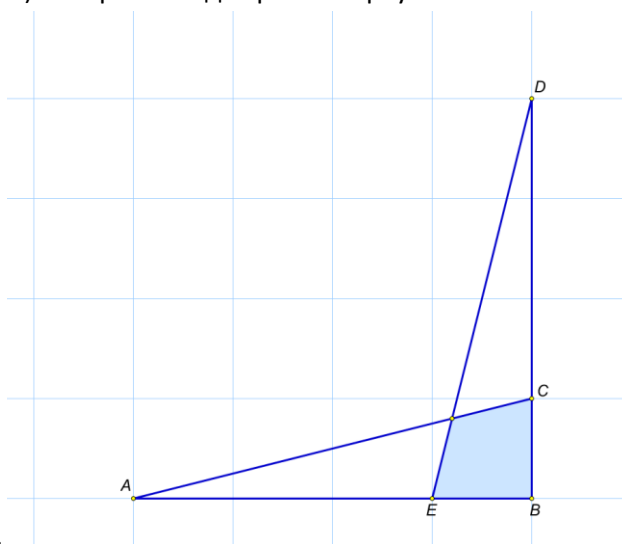
Посмотрим, может ли число содержать 8. В паре с ней может быть цифра 8, значит, число содержит восемь восьмерок, образующих пары, наибольшее такое число равно 8888228888. Если же в паре не 8, то число содержит 8 цифр, которые меньше 8, т.е. не может начинаться на четыре цифры 8, следовательно, меньше, чем 8888228888.

7. На окружности отмечено 2017 различных точек $A_1, \dots, A_{2017}$ и проведены все возможные хорды, попарно соединяющие эти точки. Через точку A_1 проведена прямая, не проходящая ни через одну из точек $A_2, \dots, A_{2017}$. Найдите наибольшее возможное количество хорд, которые могут иметь хотя бы одну общую точку с этой прямой.

ОТВЕТ: 1018080.

Решение: Пусть по одну сторону от указанной прямой расположено k точек, тогда по другую – $2016-k$. Тогда $k(2016-k)$ хорд пересекают прямую и еще 2016 проходят через точку A_1 . Заметим, что $k(2016-k) = -(k-1008)^2 + 1008^2$. Максимум этого выражения достигается при $k=1008$.

8. На клетчатой бумаге (1клетка = 1см.) изображены два равных треугольника ABC и BDE.



Найдите площадь их общей части.

ОТВЕТ: 0,8.

Решение: Введем систему координат, с началом в точке B, а в качестве осей возьмем BD и BA. Запишем уравнения прямых: AC и DE: $y=4-4x$ и $y=1/4 - 1/4x$. Они пересекаются в точке с координатами $(0,8; 0,8)$. Значит общую часть можно разбить на два одинаковых треугольника с основанием 1 и высотой 0,8. Очевидно, площадь каждого равна 0,4.

Олимпиада школьников

«ЛОМОНОСОВ»

по математике

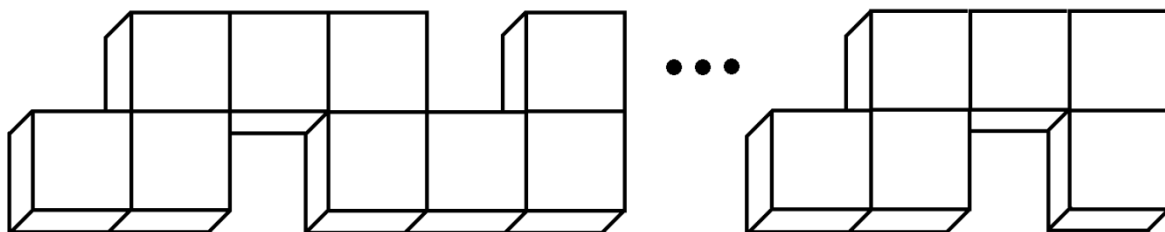
Задания заочного этапа 2016/2017 учебного года для 7-8 класса

1. Индиана Джонс добрался до заброшенного храма в джунглях и зашел в сокровищницу. Там стояло 5 шкатулок, причем известно, что только в одной из них клад, а остальные обрушивают каменную плиту на голову того, кто пытается их открыть. Шкатулки занумерованы слева направо. Первая, четвертая и пятая сделаны из кедра, вторая и третья - из сандалового дерева. На первой написано "Клад во мне или в 4-й шкатулке"; на второй написано "Клад в шкатулке слева от меня"; на третьей написано "Клад во мне или в крайней справа шкатулке"; на четвертой написано "В шкатулках, стоящих левее меня клада нет"; на пятой шкатулке написано "На всех остальных шкатулках написана ложь". Последний хранитель храма умирая поведал Индиане тайну: на шкатулках из кедра и из сандала написано одинаковое количество ложных утверждений. В какой шкатулке клад?

ОТВЕТ 2.

Решение: Последовательно рассмотрим варианты, каждый кроме второго приводит к противоречию.

2. На то, чтобы покрасить кубик со всех сторон уходит 60 граммов краски. Сколько краски потребуется, чтобы покрасить «змейку», составленную из 2016 таких кубиков? На рисунке показаны начало и конец змейки, а остальные кубики заменены на многоточие.



ОТВЕТ: 80660.

Решение: Разобьем змейку на 336 периодических фрагментов, каждый из которых содержит 6 кубиков. На покраску периодического фрагмента из 6 кубиков уходит 240 гр. краски. Получим 80640 г., учитывая, что на покраску торцов требуется еще 20 г., получим ответ.

3. Известно, что $x + y + z = 2016$ и $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{7}{224}$. Найдите $\frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x}$.

ОТВЕТ: 60.

Решение: Прибавим по 1 к каждой дроби, получим $\frac{z}{x+y} + 1 + \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} + 1 = \frac{x+y+z}{x+y} + \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} = 2016 \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) = \frac{2016}{32} = 63$.

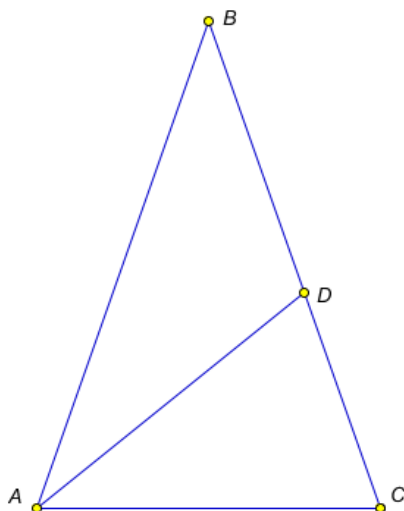
4. Равнобедренный треугольник можно разрезать на два равнобедренных треугольника (не обязательно равных). Найдите какие значения может принимать наименьший угол такого

треугольника. В ответе укажите наименьшее из этих значений в градусах, умноженное на 6006.

ОТВЕТ: 154440.

Решение: Рассмотрим треугольник ABC с углами $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle B = 180^\circ - 2\alpha$. Чтобы получилось два треугольника прямая должна проходить через одну из вершин.

Рассмотрим случай, когда она проходит через вершину A и делит треугольник на два: ADB и ADC (см. рис.).



Треугольник ADC является равнобедренным в двух случаях:

- I) $\angle ADC = \alpha$. Приравняв $\angle BAD = \angle ABD$ (т.к. угол $\angle ADB$ тупой) приходим к уравнению $180^\circ - 2\alpha = 3\alpha - 180^\circ$, откуда $\alpha = 72^\circ$. Наименьший угол тогда равен $\angle B = 36^\circ$
- II) $\angle ADC = \angle DAC = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$. Тогда $\frac{3\alpha}{2} - 90^\circ = 180^\circ - 2\alpha$, откуда $\alpha = \frac{540^\circ}{7}$. В этом случае наименьший угол равен $\angle B = \frac{180^\circ}{7}$.

Если же прямая проходит через вершину B , то случаи рассматриваются аналогично, но там наименьший угол равен 36° или 45° , что больше, чем $\frac{180^\circ}{7}$.

Умножая $\frac{180^\circ}{7}$ на 6006 и сокращая на 7, получим ответ.

5. Постройте на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|3x + 4| + |4y - 3| \leq 12$. В ответе укажите площадь получившейся фигуры.

ОТВЕТ: 24.

Решение: Сдвинем координатные оси на $-\frac{4}{3}$ по оси Ox , и на $\frac{3}{4}$ по оси Oy . В новых координатах полученная фигура задается неравенством $|3x| + |4y| \leq 12$. Несложно показать, что это будет ромб с диагоналями 6 и 8, следовательно, его площадь равна 24.

6. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 + y^2 = 6x + 2y + 15$?

ОТВЕТ: 12.

Решение: Выделим полный квадрат, получим уравнение окружности $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$. Это возможно, когда одно из слагаемых равно 25 и другое 0 (4 случая), или когда одно равно 16, а другое 9 (8 случаев).

7. Найдите все натуральные числа N , такие, что остаток от деления 2017 на N равен 17. В ответе укажите количество таких N .

ОТВЕТ 13.

Решение: В качестве N подойдут все положительные делители числа 2000, большие 17. Делители 2000 имеют вид $2^a \cdot 5^b$, где $a=0,1,2,3,4$ и $b=0,1,2,3$. Всего их будет 20 штук, но следует отбросить 1,2,4,5,8,10 и 16.

8. На окружности отмечено 2017 различных точек $A_1, \dots, A_{2017}$ и проведены все возможные хорды, попарно соединяющие эти точки. Через точку A_1 проведена прямая, не проходящая ни через одну из точек $A_2, \dots, A_{2017}$. Найдите наибольшее возможное количество хорд, которые могут иметь хотя бы одну общую точку с этой прямой.

ОТВЕТ: 1018080.

Решение: Пусть по одну сторону от указанной прямой расположено k точек, тогда по другую – $2016-k$. Тогда $k(2016-k)$ хорд пересекают прямую и еще 2016 проходят через точку A_1 . Заметим, что $k(2016-k) = -(k-1008)^2 + 1008^2$. Максимум этого выражения достигается при $k=1008$.

Олимпиада школьников

«ЛОМОНОСОВ»

по математике

Задания заочного этапа 2016/2017 учебного года для 5-6 класса

1. Замените буквы А, Б, В, Г, Д, Е цифрами (разным буквам соответствуют разные цифры), так, чтобы разность трехзначных чисел АБВ-ГДЕ принимала наименьшее возможное положительное значение. В ответе укажите значение этой разности.

ОТВЕТ: 3.

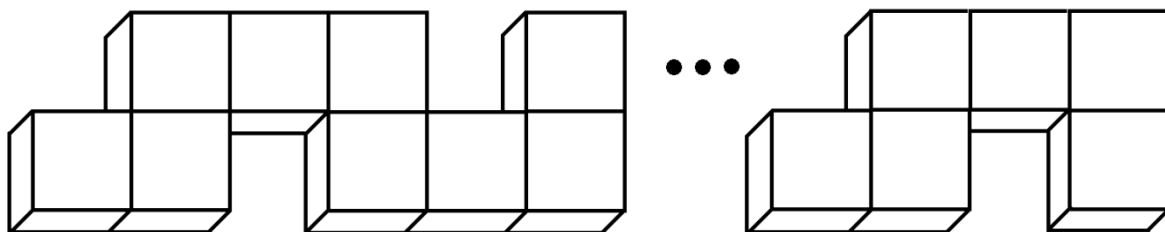
Решение: Подойдет, например 401-398. Очевидно, что меньшее значение получить нельзя.

2. Индиана Джонс добрался до заброшенного храма в джунглях и зашел в сокровищницу. Там стояло 5 шкатулок, причем известно, что только в одной из них клад, а остальные обрушивают каменную плиту на голову того, кто пытается их открыть. Шкатулки занумерованы слева направо. Первая, четвертая и пятая сделаны из кедра, вторая и третья - из сандалового дерева. На первой написано "Клад во мне или в 4-й шкатулке"; на второй написано "Клад в шкатулке слева от меня"; на третьей написано "Клад во мне или в крайней справа шкатулке"; на четвертой написано "В шкатулках, стоящих левее меня клада нет"; на пятой шкатулке написано "На всех остальных шкатулках написана ложь". Последний хранитель храма, умирая, поведал Индиане тайну: на шкатулках из кедра и из сандала написано одинаковое количество ложных утверждений. В какой шкатулке клад?

ОТВЕТ 2.

Решение: Последовательно рассмотрим варианты, каждый кроме второго приводит к противоречию.

3. На то, чтобы покрасить кубик со всех сторон уходит 60 граммов краски. Сколько краски потребуется, чтобы покрасить «змейку», составленную из 2016 таких кубиков? На рисунке показаны начало и конец змейки, а остальные кубики заменены на многоточие.



ОТВЕТ: 80660.

Решение: Разобьем змейку на 336 периодических фрагментов, каждый из которых содержит 6 кубиков. На покраску периодического фрагмента из 6 кубиков уходит 240 гр. краски. Получим 80640 г., учитывая, что на покраску торцов требуется еще 20 г., получим ответ.

4. Известно, что $x + y + z = 2016$ и $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{32}$. Найдите $\frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x}$

ОТВЕТ:60.

Решение: Прибавим по 1 к каждой дроби, получим $\frac{z}{x+y} + 1 + \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} + 1 = \frac{x+y+z}{x+y} + \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} = 2016 \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) = \frac{2016}{32} = 63$.

5. Найдите все натуральные числа N , такие, что остаток от деления 2017 на N равен 17. В ответе укажите количество таких N .

ОТВЕТ 13.

Решение – В качестве N подойдут все положительные делители числа 2000, большие 17. Делители 2000 имеют вид $2^a \cdot 5^b$, где $a=0,1,2,3,4$ и $b=0,1,2,3$. Всего их будет 20 штук, но следует отбросить 1,2,4,5,8,10 и 16.

6. Имеется 5 одинаковых вёдер, максимальная вместимость каждого из которых - некоторое целое число литров, и 30-литровая бочка, в которой находится целое число литров воды. Из бочки разлили всю воду по вёдрам, при этом первое ведро оказалось заполненным наполовину, второе - на треть, третье - на четверть, четвертое - на одну пятую, пятое - на одну шестую своего объёма. Сколько литров воды было в бочке?

ОТВЕТ:29.

Решение $-\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = \frac{87x}{60} = \frac{29x}{20}$ будет целым только при x кратном 20. Но $x > 20$ брать нельзя, т.к. сумма получится больше 30 литров.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2016/2017 учебный год
Заключительный этап для 10–11 классов

Решения и ответы к варианту 1, ответы к вариантам 2–4

1. Когда автомобиль едет из пункта A в пункт B , он тратит 25% времени на путь в гору, 60% — по равнине, а остальное время — с горы. Время его движения из A в B и по той же дороге из B в A одинаково, а его скорости в гору, с горы и по равнине постоянны, но различны. Во сколько раз быстрее автомобиль едет с горы, чем в гору?

Ответ: $5/3$.

Решение. Если скорость автомобиля с горы в $x \neq 1$ раз больше скорости в гору, то из условия имеем:

$$\begin{aligned} 0,25 + 0,15 &= 0,25/x + 0,15x \Rightarrow 0,15x^2 - (0,25 + 0,15)x + 0,25 = 0 \\ &\Rightarrow (x - 1)(x - 5/3) = 0 \Rightarrow x = 5/3. \end{aligned}$$

Ответ к варианту 2: $5/4$.

Ответ к варианту 3: $4/3$.

Ответ к варианту 4: $7/4$.

2. Решите уравнение $\sqrt{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 2\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} + \sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{257}{16}$.

Решение. Обозначим $t = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}$, тогда $\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} = \frac{2}{\sqrt{t}}$, и данное уравнение принимает вид $\sqrt{t} = \frac{4}{\sqrt{t}} + \sqrt{2}$, или $t - \sqrt{2}t - 4 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{t}$, находим $\sqrt{t} = -\sqrt{2}$ или $\sqrt{t} = 2\sqrt{2}$. Первое уравнение решений не имеет, а из второго, возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 8 \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - 4} = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = (32 - x)^2, \\ x \leq 32 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{257}{16}.$$

Ответ к варианту 2: $\frac{577}{16}$.

Ответ к варианту 3: $\frac{1025}{16}$.

Ответ к варианту 4: $\frac{745}{36}$.

3. Выясните, какое из чисел больше: $11^{\lg 121}$ или $10 \cdot 10^{\lg^2 11} + 11$.

Ответ: первое.

Решение. Поскольку $11^{\lg 121} = (11^{\lg 11})^2$, а $10 \cdot 10^{\lg^2 11} + 11 = 10 \cdot (10^{\lg 11})^{\lg 11} + 11 = 10 \cdot 11^{\lg 11} + 11$, требуется сравнить числа x^2 и $10x + 11$, где $x = 11^{\lg 11}$. Выражение $x^2 - 10x - 11 = (x - 11)(x + 1)$ в точке $x = 11^{\lg 11} > 11$ принимает положительное значение, поэтому первое число больше.

Ответ к варианту 2: первое.

Ответ к варианту 3: второе.

Ответ к варианту 4: второе.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Касательные к этой окружности, проведённые в точках A и C , пересекаются на прямой BD . Найдите сторону AD , если $AB = 2$ и $BC : CD = 4 : 5$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

Решение. Пусть M — точка пересечения касательных. По условию M лежит на прямой BD . Поскольку $BC < CD$, точка B находится между точками M и D . Тогда, так как $\angle MCB = \angle CDB = \frac{\angle BC}{2}$, то треугольники MCB и MDC подобны, поэтому $\frac{CD}{BC} = \frac{MD}{MC}$. Аналогично из подобия треугольников MAB и MDA получаем $\frac{AD}{AB} = \frac{MD}{MA}$. Кроме того, отрезки касательных к окружности MC и MA равны, поэтому $\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AB}$, а значит, $AD = \frac{AB \cdot CD}{BC} = \frac{2 \cdot 5}{4} = \frac{5}{2}$.

Ответ к варианту 2: $\frac{9}{4}$.

Ответ к варианту 3: $\frac{5}{4}$.

Ответ к варианту 4: $\frac{7}{2}$.

5. Вычислите $\sqrt{n} + \sqrt{n+524}$, если известно, что это число рациональное и что n — натуральное.

Ответ: 262.

Решение. Пусть искомое число равно a . Имеем $\sqrt{n+524} = a - \sqrt{n}$, $n + 524 = a^2 - 2a\sqrt{n} + n$. По условию a рационально, поэтому и $\sqrt{n}$ рационально. Значит, $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда число $\sqrt{n+524}$ тоже рационально, поэтому $n + 524 = m^2$, $m \in \mathbb{N}$. Значит, $m^2 - k^2 = 524$, $(m - k)(m + k) = 4 \cdot 131$. Заметим, что числа $m - k$ и $m + k$ одинаковой чётности, а число 131 простое. Следовательно, $m - k = 2$ и $m + k = 2 \cdot 131$. Оба равенства выполнены при $m = 132$, $k = 130$. Итак, $a = m + k = 262$.

Ответ к варианту 2: 226.

Ответ к варианту 3: 254.

Ответ к варианту 4: 218.

6. В прямой круговой конус, радиус основания которого равен 2, вписан шар. Найдите объём этого шара, если он в три раза меньше объёма конуса.

Ответ: $\frac{16\pi}{9}\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ или $\frac{16\pi}{9}\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

Решение. Пусть r — радиус вписанного шара, $R = 2$ — радиус основания, h — высота конуса, 2φ — угол между образующей конуса и плоскостью его основания, $0 < \varphi < \pi/4$, $t = \operatorname{tg} \varphi$, $0 < t < 1$. Тогда $r = Rt$, $h = R \operatorname{tg} 2\varphi = R \frac{2t}{1-t^2}$. По условию

$$kV_{\text{шара}} = V_{\text{конуса}} \Leftrightarrow k \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Leftrightarrow 4kt^3 = \frac{2t}{1-t^2} \Leftrightarrow 2kt^4 - 2kt^2 + 1 = 0.$$

При $k = 3$ это уравнение имеет два решения $t_{1,2} = \sqrt{\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2k}} = \frac{\sqrt{3 \pm \sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$, причём оба удовлетворяют условию $0 < t < 1$. Значит, возможны два случая, в одном из которых объём шара равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3 t^3 = \frac{16\pi}{9}\sqrt{9+5\sqrt{3}}$, а в другом $V = \frac{16\pi}{9}\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

Ответ к варианту 2: $18\pi\sqrt{20+14\sqrt{2}}$ или $18\pi\sqrt{20-14\sqrt{2}}$.

Ответ к варианту 3: $\frac{4\pi}{3}\sqrt{20+14\sqrt{2}}$ или $\frac{4\pi}{3}\sqrt{20-14\sqrt{2}}$.

Ответ к варианту 4: $18\pi\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ или $18\pi\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

7. Найдите все значения a , при каждом из которых ровно одно из следующих двух утверждений является истинным:

1) «Уравнение $\cos(\cos x) + \sin(\sin x) = a$ имеет ровно два корня на отрезке $[0; \pi]$ »;

2) «Уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = a$ имеет корни».

Ответ: $[-\frac{1}{2}; \cos 1) \cup (\frac{3}{2}; 1 + \sin 1)$.

Решение. 1) Функция $f(x) = \cos(\cos x) + \sin(\sin x)$ возрастает на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (каждое из слагаемых — монотонно возрастающая функция) и убывает на промежутке от $\frac{\pi}{2}$ до π (так как $f(\pi - x) = f(x)$). Поэтому $E(f) = [f(0); f(\pi/2)] = [\cos 1; 1 + \sin 1]$. Данное уравнение имеет ровно два корня на отрезке $[0; \pi]$ при $a \in [\cos 1; 1 + \sin 1)$.

2) Во втором уравнении используем замену $t = \sin 2x$:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \sin 2x = a \Leftrightarrow 1 - \frac{t^2}{2} + t = a \Leftrightarrow t^2 - 2t - 2 = -2a.$$

Область значений функции $g(t) = t^2 - 2t - 2 = (t-1)^2 - 3$ на отрезке $[-1; 1]$ есть множество $E(g) = [g(1); g(-1)] = [-3; 1]$. Данное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $-2a \in [-3; 1]$, то есть $a \in [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$.

3) Поскольку $1 + \sin 1 > 1 + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$, ровно одно из данных утверждений 1), 2) является истинным при $a \in [-\frac{1}{2}; \cos 1) \cup (\frac{3}{2}; 1 + \sin 1)$.

Ответ к варианту 2: $[-\frac{3}{2}; -1 + \cos 1) \cup (\frac{1}{2}; \sin 1)$.

Ответ к варианту 3: $(-1 - \sin 1; -\frac{3}{2}] \cup (-\cos 1; \frac{1}{2}]$.

Ответ к варианту 4: $(-\sin 1; -\frac{1}{2}) \cup (1 - \cos 1; \frac{3}{2}]$.

8. Рассматриваются всевозможные наборы, которые состоят из 2017 различных натуральных чисел и в каждом из которых ни одно из чисел нельзя представить в виде суммы двух других чисел этого набора. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее число в таком наборе?

Ответ: 4032.

Решение. Положим для краткости $n = 2017$. Рассмотрим следующий набор из n чисел: $n-1, n, n+1, \dots, 2n-3, 2n-2$. Так как $(n-1) + n = 2n-1 > 2n-2$, то ни одно из чисел этого набора не может равняться сумме двух других, то есть представленный набор удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь имеется произвольный набор из n натуральных чисел, удовлетворяющий условию задачи. Докажем, что наибольшее из этих чисел N не меньше, чем $2n-2$. Пусть $N \leq 2n-3$. Докажем, что в таком наборе чисел есть пара чисел, меньших N , сумма которых равна N . Разобьём все натуральные числа, меньшие N , на пары с суммой, равной N : $(1, N-1); (2, N-2), \dots$. Если таких пар $n-1$ или больше, то чисел, меньших N , будет не меньше, чем $2n-2$, что невозможно. Поэтому таких пар не больше, чем $n-2$, а чисел в наборе n . Значит, в наборе найдётся, по крайней мере, одна пара чисел с суммой, равной N .

Таким образом, в произвольном наборе из n чисел, удовлетворяющих условию задачи, наибольшее из этих чисел не меньше, чем $2n-2$ (причём эта оценка достижима). В случае $n = 2017$ это число 4032.

Ответ к варианту 2: 4030.

Ответ к варианту 3: 4028.

Ответ к варианту 4: 4034.

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

заключительный этап 2016/2017 учебного года

Решения задач по математике

9 класс

1. На доске было написано 21 последовательное натуральное число. Когда одно из чисел стерли, сумма оставшихся стала равна 2017. Какое число стерли?

Ответ: 104.

Решение: Пусть на доске были написаны числа $N-10, N-9, \dots, N, \dots, N+10$. Их сумма равна $21N$. Когда стерли одно из этих чисел – x – сумма стала равна 2017, $21N - x = 2017$. Следовательно, $x = 21N - 2017$, поскольку это одно из этих чисел, получаем $N - 10 \leq 21N - 2017 \leq N + 10$. Решим неравенства $\frac{2007}{20} \leq N \leq \frac{2027}{20}$, откуда $N = 101$, следовательно, $x = 21 \cdot 101 - 2017 = 104$.

2. Прямая проходит через точку с координатами $(10; 0)$ и пересекает параболу $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2 . Найдите $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Ответ: 0.1.

Решение. Точки x_1, x_2 , являются решениями уравнения $x^2 = k(x - 10)$, где k – коэффициент наклона прямой. Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = k, x_1 x_2 = 10k$.

Следовательно, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{k}{10k} = \frac{1}{10}$.

3. Сколько диагоналей в правильном 32-угольнике не параллельны ни одной из сторон этого 32-угольника?

Ответ: 240.

Решение: Всего в 32-угольнике $32 \cdot (32-3) / 2 = 464$ диагоналей. Разобьем стороны на 16 пар параллельных сторон. Несложно заметить, что если зафиксировать какую-то пару, т.е. 4 вершины, то оставшиеся вершины можно соединить попарно диагоналями, параллельными этой паре. Их всего будет $(32-4) / 2 = 14$. Значит диагоналей, параллельных какой-то стороне – $14 \cdot 16 = 224$. А не параллельных – $464 - 224 = 240$.

4. Про натуральные числа m и n известно, что $3n^3 = 5m^2$. Найдите наименьшее возможное значение $m+n$.

Ответ: 60.

Решение: Очевидно, если m, n содержат простые сомножители, не равные 3 или 5, то на них можно сократить (и уменьшить $m+n$).

Пусть $n = 3^a \cdot 5^b, m = 3^c \cdot 5^d$. Тогда из условия вытекает, что $3a+1=2c, 3b=2d+1$.

Наименьшие возможные значения: $a=1, b=1, c=2, d=1$, откуда $n=15, m=45$.

5. Петя и Вася играют в игру. На доске написано число: 1122333344445555666677777. За один ход разрешается стереть любое количество одинаковых цифр. Выигрывает

тот, кто сотрет последнюю цифру. Петя ходит первым. Может ли он так ходить, чтобы гарантированно выиграть?

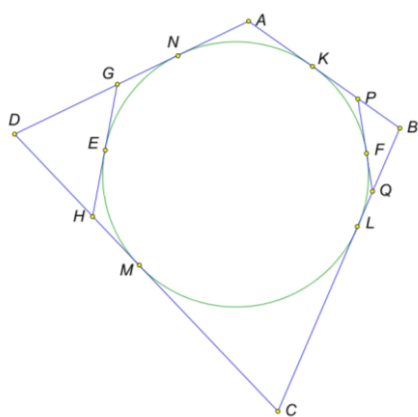
Ответ: Да, может.

Решение: Первым ходом Петя может, например, стереть все цифры 7. Запишем оставшиеся цифры в виде:

11 333 5555 | 6666 444 22.

После этого Петя симметрично (относительно средней черты) повторяет ходы Васи

6. Из отрезков длин 3, 5, 7 и 9 составлен четырехугольник, в который вписана окружность. К ней проведены две касательные: одна пересекает одну пару соседних сторон четырёхугольника, а другая — пару оставшихся. Найдите разность периметров треугольников, отсечённых от четырёхугольника этими касательными.



Ответ: 4 или 8.

Решение: Обозначим точки касания со сторонами $AB=3$, $BC=5$, $CD=9$, $DA=7$ как K, L, M, N , соответственно (см. рис.). Пусть касательные в точках E, F отсекают треугольники DGH и PBQ . Заметим, что периметр DGH равен $2DM$, а периметр PBQ — $2BL$, т.е. их разность $2(DM-BL)$. Обозначим $AK=AN=x$, $BK=BL=y$, $CL=CM=z$, $DM=DN=t$. Получим уравнения: $x+y=3$, $y+z=5$, $z+t=9$, $t+x=7$. Вычитая из третьего уравнения

второе, получим $t-y=4$, откуда $2(DM-BL) = 8$. Проводя с другой стороны касательные, получим аналогично $2(CL-AN)=4$.

7. Про функцию $y = f(x)$ известно, что она определена и непрерывна на всей числовой прямой, нечётна и периодична с периодом 5, а также что $f(-1) = f(2) = -1$. Какое наименьшее число корней может иметь уравнение $f(x) = 0$ на отрезке $[1755; 2017]$?

Ответ: 210.

Решение. Поскольку функция f нечётна и определена в нуле, получаем $f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. В силу 5-периодичности тогда имеем $f(5) = f(0) = 0$. Используем ещё раз нечётность: $f(1) = -f(-1) = 1$, и опять в силу 5-периодичности $f(3) = f(-2) = 1$, $f(4) = f(-1) = -1$. Итак, в точках 1, 2, 3 и 4 значения функции равны соответственно 1, -1, 1 и -1. Значит, на каждом из трёх интервалов между этими точками есть не менее одного нуля функции f . Итого на периоде $[0; 5)$ у функции не менее 4 нулей (ясно, что эта оценка достижима: можно взять, например, кусочно-линейную функцию, у неё будет ровно 4 нуля). На промежутке $[1755; 2015)$ период помещается 52 раза (на нём не менее $52 \cdot 4 = 208$ нулей), плюс ноль в точке 2015 и хотя бы один на интервале $(2016; 2017)$. Итого не менее 210 нулей.

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

заключительный этап 2016/2017 учебного года

Решения задач по математике

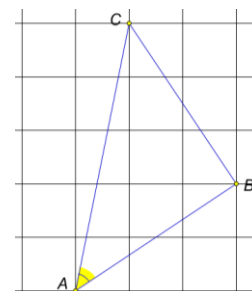
7-8 классы

1. На клетчатой бумаге нарисовали треугольник ABC (см. рис.).

Найдите величину угла $\angle A$.

Ответ: 45° .

Решение: Заметим, что $AB=BC$. Также, несложно показать, что $\angle B = 90^\circ$. Отсюда, учитывая, что сумма углов треугольника равна 180, получаем ответ.



2. А у нас сегодня кошка родила вчера котят! Известно, что два самых легких весят в сумме 80 г., четыре самых тяжелых – 200 г., а суммарный вес всех котят равен X г. При каком наименьшем X по этим данным нельзя однозначно определить, сколько котят родила кошка?

Ответ: $X=480$.

Решение: Упорядочим котят по весу: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. По условию $a_1 + a_2 = 80$, следовательно, $a_3, \dots, a_n \geq 40$. Так же по условию $a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 200$, следовательно, $a_1, \dots, a_{n-4} \leq 50$. Получаем, что $a_3 + \dots + a_{n-4} = X - 280 = X_1$, при этом каждое слагаемое в левой части принадлежит отрезку $[40; 50]$. Значит $40 \times (n - 6) \leq X_1 \leq 50 \times (n - 6)$, откуда вытекает, что $n-6$ лежит на $[X_1/50; X_1/40]$. Длина этого отрезка равна $X_1/200$, значит два различных целых числа могут попасть только при $X_1 \geq 200$. Берем $X_1=200$ и проверяем, что такие наборы весов существуют: $40 \times 7 + 50 \times 4 = 480$ и $40 \times 2 + 50 \times 8 = 480$. Для полноты решения надо добавить, что если $X=200$, то котят 4, если $200 < X < 280$, то котят 5 и при $X=280$ котят 6, т.е. количество котят тоже определяется однозначно.

3. Найдите двузначное число, цифры которого различны и квадрат которого равен кубу суммы его цифр.

Ответ: 27.

Решение: Запишем условие в виде $\overline{AB}^2 = (A + B)^3$. Заметим, что сумма цифр $(A+B)$ не превосходит 17, т.е. $\overline{AB}^2 \leq 17^3$. Кроме того, это число $\overline{AB}^2 = n^6$, где n – некоторое натуральное число, которое не превосходит 4. Но 1, 2 не подходят, т.к. их кубы однозначны. Осталось 3 и 4, непосредственная проверка показывает, что $27^2 = (2 + 7)^2 = 729$.

4. На окружности отмечено 100 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причем у любого отрезка один конец синий, а другой – красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одинаковому количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?

Ответ: 50.

Решение: Возьмем 50 красных и 50 синих точек. Первую красную точку не соединяем ни с какой другой, вторую с одной синей, ..., 50-ю – с 49 синими. Очевидно, что больше 50 красных точек быть не может, т.к. если их 51 или больше, то синих не более 49, следовательно, количество вариантов соединения не более 50, т.е. (по принципу Дирихле) какие-то две красные точки будут принадлежать одинаковому количеству отрезков.

5. Сколько диагоналей в правильном 32-угольнике не параллельны ни одной из сторон этого 32-угольника?

Ответ: 240.

Решение: Всего в 32-угольнике $32 \cdot (32-3) / 2 = 464$ диагоналей. Разобьем стороны на 16 пар параллельных сторон. Несложно заметить, что если зафиксировать какую-то пару, т.е. 4 вершины, то оставшиеся вершины можно соединить попарно диагоналями, параллельными этой паре. Их всего будет $(32-4) / 2 = 14$. Значит диагоналей, параллельных какой-то стороне – $14 \cdot 16 = 224$. А не параллельных – $464 - 224 = 240$.

6. Про натуральные числа m и n известно, что $3n^3 = 5m^2$. Найдите наименьшее возможное значение $m+n$.

Ответ: 60.

Решение: Очевидно, если m, n содержат простые сомножители, не равные 3 или 5, то на них можно сократить (и уменьшить $m+n$).

Пусть $n = 3^a \cdot 5^b, m = 3^c \cdot 5^d$. Тогда из условия вытекает, что $3a+1=2c, 3b=2d+1$.

Наименьшие возможные значения: $a=1, b=1, c=2, d=1$, откуда $n=15, m=45$.

7. Петя и Вася играют в игру. На доске написано число: 11223334445555666677777. За один ход разрешается стереть любое количество одинаковых цифр. Выигрывает тот, кто сотрет последнюю цифру. Петя ходит первым. Может ли он так ходить, чтобы гарантированно выиграть?

Ответ: Да, может.

Решение: Первым ходом Петя может, например, стереть все цифры 7. Запишем оставшиеся цифры в виде:

11 333 5555 | 6666 444 22.

После этого Петя симметрично (относительно средней черты) повторяет ходы Васи.

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

заключительный этап 2016/2017 учебного года

Решения задач по математике

5-6 классы

1. Следователь Подберезовиков преследует Максима Деточкина (каждый едет на своей машине). В начале оба ехали по шоссе со скоростью 60 км/ч, при этом Подберезовиков отставал от Деточкина на 2 км. На въезде в город каждый из них снизил скорость до 40 км/ч, а на выезде из города, оказавшись на хорошей трассе, каждый увеличил скорость до 70 км/ч. Когда трасса закончилась, на границе с проселочной дорогой каждому пришлось снова снизить скорость до 30 км/ч. Каким стало расстояние между ними на проселочной дороге?

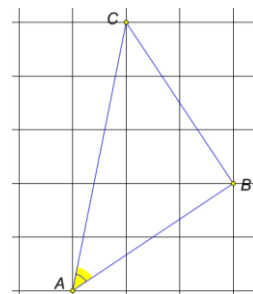
Ответ: 1км.

Решение: В момент, когда Деточкин въехал в город, Подберезовиков отставал от него на 2 км. Подберезовиков проехал их за $\frac{2}{60}$ часа, за это время Деточкин проехал $\frac{2}{60} \cdot 40$ км. Т.е. расстояние уменьшилось на $\frac{40}{60}$. Аналогично, при выезде из города и переходе на проселочную дорогу расстояние умножается на $\frac{70}{40}$ и на $\frac{30}{70}$. В итоге $2 \times \frac{40}{60} \times \frac{70}{40} \times \frac{30}{70} = 1$ км.

2. На клетчатой бумаге нарисовали треугольник ABC (см. рис.). Найдите величину угла $\angle A$.

Ответ: 45° .

Решение: Заметим, что $AB=BC$. Также, несложно показать, что $\angle B = 90^\circ$. Отсюда, учитывая, что сумма углов треугольника равна 180, получаем ответ.



3. А у нас сегодня кошка родила вчера котят! Известно, что два самых легких весят в сумме 80 г., четыре самых тяжелых – 200 г., а суммарный вес всех котят равен 500г. Сколько котят родила кошка?

Ответ: 11.

Решение: Два самых легких весят 80 г., следовательно, остальные весят не менее 40 г. каждый. Аналогично получаем, что все, кроме 4 самых тяжелых весят не более 50г. Рассмотрим котят, которые не входят в состав 2 самых легких и 4 самых тяжелых. Их общий вес равен $500-200-80=220$ г. Значит их 5 штук, т.к. если их 4, то вес не может быть более $4 \times 50 = 200$ г., а если их 6, то их вес не менее $6 \times 40 = 240$ г. Тогда всего котят 11.

4. Найдите двузначное число, цифры которого различны и квадрат которого равен кубу суммы его цифр.

Ответ: 27.

Решение: Запишем условие в виде $\overline{AB}^2 = (A + B)^3$. Заметим, что сумма цифр $(A+B)$ не превосходит 17, т.е. $\overline{AB}^2 \leq 17^3$. Кроме того, это число $\overline{AB}^2 = n^6$, где n -

некоторое натуральное число, которое не превосходит 4. Но 1, 2 не подходят, т.к. их кубы однозначны. Осталось 3 и 4, непосредственная проверка показывает, что $27^2 = (2 + 7)^2 = 729$.

5. На окружности отмечено 25 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причем у любого отрезка один конец синий, а другой – красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одинаковому количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?

Ответ: 13.

Решение: Возьмем 13 красных и 12 синих точек. Первую красную точку не соединяем ни с какой другой, вторую с одной синей, ..., 13-ю – с 12 синими. Очевидно, что больше красных быть не может, т.к. если их более 13, то количество вариантов соединения менее 13, т.е. (по принципу Дирихле) какие-то две красные точки будут принадлежать одинаковому количеству отрезков.

6. Петя и Вася играют в игру. На доске написано число: 11223334445555666677777. За один ход разрешается стереть любое количество одинаковых цифр. Выигрывает тот, кто сотрет последнюю цифру. Петя ходит первым. Может ли он так ходить, чтобы гарантированно выиграть?

Ответ: Да, может.

Решение: Первым ходом Петя может, например, стереть все цифры 7. Запишем оставшиеся цифры в виде:

11 333 5555 | 6666 444 22.

После этого Петя симметрично (относительно средней черты) повторяет ходы Васи.

Критерии выставления оценок:

1. Каждая задача оценивалась в 15 баллов.
2. Если суммарное количество технических баллов в работе было меньше 20, то выставлялась оценка 2.
3. Если суммарное количество технических баллов в работе было больше 100, то выставлялась оценка 100.
4. В работах 5-6 классов итоговое количество баллов за работу увеличивали на 10 баллов, если технические баллы за работу были не менее 20 баллов.

ЛОМОНОСОВ – 2017. МАТЕМАТИКА. Предложения по критериям проверки

Задача № 1 = 15 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Арифметическая ошибка при идейно верном решении, или получен ответ, обратный к верному	$\pm$	10
Ответ получен, но обоснование имеет серьёзные недостатки	$\mp$	5

Задача № 2 = 15 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Арифметическая ошибка в конце идейно верного решения	$\pm$	10
При способе решения с последовательным возведением в квадрат дополнительно к верному получен посторонний корень (например, 2, 5, 13/4 или 25/4), который не отброшен и записан в ответ	–	0

Задача № 3 = 15 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Решение в целом верное, но перепутан знак неравенства	$\pm$	10
Задача обоснованно сведена к сравнению чисел x^2 и $ax + b$ или к исследованию функции (функций), но решение не закончено, ИЛИ использован разумный способ сравнения, но не обоснован	$\mp$	5

Задача № 4 = 15 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Рассмотрен не тот случай расположения точек, что следует из условия задачи	$\pm$	10
В отношениях отрезков перепутаны числитель и знаменатель (или допущены другие вычислительные ошибки), из-за чего получен неверный ответ, при этом решение идейно верное	$\mp$	5

Задача № 5 = 15 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Недостатки в обосновании единственности решения (например, в решении не указано, что числа m и k определяются однозначно, либо что число 131 (113 и т.д.) простое, либо что числа должны иметь одинаковую чётность и т.п.).	$\pm$	10

Без объяснения используется, что оба слагаемых ($\sqrt{n}$ и $\sqrt{n+\dots}$) в вычисляемом выражении целые	$\mp$	5
<i>Замечание.</i> В решении допустимо без доказательства (непосредственной проверки) использовать следующие факты, оценка за это не снижается: 1) $\sqrt{n}$ иррационально, если n не является полным квадратом; 2) число 113 (131 и т.д.) простое.		

Задача № 6 = 15 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Получен верный ответ, но реализуемость обоих вариантов не проверена, хотя следует из имеющихся в решении ограничений на искомую величину (например, $0 < t < 1$ и т.п.)	$\dagger$	15
Арифметическая ошибка при идейно верном решении, ИЛИ обоснование возможности двух вариантов имеет серьезные недостатки (например, необходимые для этого ограничения на искомую величину в решении полностью отсутствуют)	$\pm$	10
Получен лишь один из вариантов ответа	$\mp$	5

Задача № 7 = 15 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Ответ отличается от верного на одну точку	$\dagger$	15
Верно найдено множество значений a , при которых истинно утверждение 1), И то же для утверждения 2), но ответ неверен	$\pm$	10
Верно найдено множество значений a , при которых истинно утверждение 1), ИЛИ то же для утверждения 2)	$\mp$	5

Задача № 8 = 15 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Доказана верная оценка снизу, но нет подтверждающего её точность примера	$\pm$	10
Получен верный ответ и приведен верный пример, но доказательство, что нельзя выбрать меньше, отсутствует или неверно	$\mp$	5

5. Сведения об опубликованных сборниках олимпиадных заданий и методических пособиях

1. Олимпиада «Ломоносов – 2015-2016» по математике для 10 – 11 классов. Зеленский А.С., Козко А.И., Крицков Л.В., Панферов В.С., Разборов А.Г., Савчук А.М., Сергеев И.Н., Шейпак И.А., Юмашев М.В. // Математика в школе, издательство Шк. пресса (М.), 2017, № 1, с. 16-28.
2. Олимпиада школьников "Ломоносов - 2014-2015" по математике для 10-11 классов Зеленский А.С., Козко А.И., Крицков Л.В., Панферов В.С., Разборов А.Г., Сергеев И.Н., Ушаков В.Г., Шейпак И.А., Юмашев М.В. // Математика в школе, издательство Шк. пресса (М.), 2016, № 1, с. 12-19.
3. Олимпиада школьников "Ломоносов-2014" по математике Зеленский А.С., Козко А.И., Крицков Л.В., Панферов В.С., Разборов А.Г., Сергеев И.Н., Шейпак И.А., Юмашев М.В. // Математика в школе, издательство Шк. пресса (М.), 2015, № 2, с. 26-28.
4. Решения задач олимпиады школьников "Ломоносов - 2014" по математике Зеленский А.С., Козко А.И., Крицков Л.В., Панферов В.С., Разборов А.Г., Сергеев И.Н., Шейпак И.А., Юмашев М.В. // Математика в профильной школе. ФРАКТАЛ, 2015, № 1, с. 50-58
5. Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005-2015) Бегунц А.В., Бородин П.А., Горяшин Д.В., Зеленский А.С., Панферов В.С., Сергеев И.Н., Шейпак И.А. место издания МЦНМО Москва, 2016, ISBN 978-5-4439-1021-5, 176 с.